弹性结构与液体的耦联振动理论

居荣初　曾心传　编著

地震出版社

弹性结构与液体的耦联振动理论

居荣初　曾心传　编著

地震出版社

1983

内 容 提 要

本书是有关弹性结构和液体耦联振动分析方面的专门著作。书中详细介绍了液体弹性力学的基本计算原理，然后按结构的不同类型诸如贮液容器、构架式容器、混凝土重力坝、梁式结构、管道、平板结构以及闸墩等，分章介绍了它们在地震、冲击及谐振荷载作用下的计算方法。最后一章扼要介绍了随机振动理论在这一领域内的应用，并结合反应谱理论介绍了某些实用的工程计算方法。

本书适合在土木、水利、化工和机械等工程领域内从事于结构振动分析的科学工作者和工程技术人员以及大专院校有关专业的师生和研究生参考。

弹性结构与液体的耦联振动理论

居荣初　曾心传　编著

*

地震出版社出版

北京复兴路63号

北京建国门外印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

*

787×1092 1/16 20.5印张 510千字

1983年3月第一版 1983年3月第一次印刷

印数：1—5,000册

统一书号：13180·190 定价：3.10元

前　　言

随着社会主义建设和科学技术事业的迅速发展，工业、农业和国防等方面，都将提出很多新问题，需要我们去探索和解决，并作出科学的回答。其中，固体和液体的耦联振动就是重要问题之一。关于这个问题的研究，从1933年H. M韦斯特加德（Westergaard）发表他的著名文章《由地震而引起作用于坝体的动水压力》以来，已有四十余年了，但引起人们的极大注意和兴趣的却只是近十余年的事。

随着电子计算机时代的到来，在土建、水利、机械、造船、化工和航空等部门都已出现了各种类型的新颖结构，这些结构物的共同点是薄壁、轻质和高强。因此，对设计、制造和施工等方面都提出了更为严格和合理的要求。过去我们没有考虑或者无法精确考虑的一些问题，现在就已不能回避了。特别是现在有了电子计算机这一先进运算工具，为结构物达到精确、合理的最佳设计提供了可靠的保证。

在工程实践中，结构物和液体耦联振动的实例是极为常见的，例如在地震荷载或其它振动荷载作用下的挡水坝、进水塔、输液管道、桥墩、各种类型的贮液器和冷却塔等等都属于这种类型的问题。而随着海洋石油开采事业的发展，大量修建在海洋里的采油平台、江河里的结构物、化工容器、船舶结构以至航空结构，都存在着上述的实际问题。又如当今正兴起的力学分支——生物力学，在其中某些方面也要涉及到弹性体和流体的耦联力学问题。当然，关于后一问题的研究，已超出了本书的研究范围。

近年来，国外有关固体和流体相互作用方面的文献日渐增多，也说明了人们对于这个问题的研究愈来愈重视，但遗憾的是，目前还没有一本系统介绍这一专门问题的书。因此，我们觉得有必要编写这样一本书以飨读者。

本书主要是向有关工程技术人员较系统地介绍关于弹性体（包括刚体）和液体耦联振动的基本概念和理论，使他们能掌握相应的解题方法，并为他们在参阅其它有关的专门文献时作必要的知识准备。当然本书也希望能对有关的科研、教学人员有所裨益。鉴于上述原因，书中对于一些主要公式的推演都比较详尽、仔细。有关梁式结构、圆柱形管道、贮液容器和闸墩结构等章节的大部分内容，均是作者们历年来的研究成果。

本书在编写过程中，得到中国科学院工程力学研究所江近仁同志，中国建筑科学研究院刘锡荟同志等的大力支持。上海化工学院王良琛同志对本书的出版提出了有益的建议。国家地震局地震研究所陈冬生、梁传珏两位同志分别承担了第二章的一、二及三、四等节内容的编写工作。作者在此谨致谢忱。

本书难免存在缺点或错误，恳切地希望广大读者给予批评指正。

作　者

目　录

第一章　不可压缩流体动力学的基本知识……………………（1）

第一节　欧拉方程及其边值问题的提法……………………（1）
第二节　重力波……………………（4）
第三节　阻尼的考虑……………………（7）
参考文献……………………（10）

第二章　弹性系统振动的基本理论……………………（11）

第一节　单自由度系统的振动……………………（11）
第二节　多自由度系统的振动……………………（24）
第三节　连续体系的振动……………………（31）
第四节　地震力计算的基础知识……………………（35）
参考文献……………………（39）

第三章　贮液构筑物的抗震分析……………………（40）

第一节　刚性贮液构筑物的液动压力……………………（40）
第二节　弹性贮液构筑物的动力性质……………………（71）
第三节　反应谱理论的应用……………………（93）
第四节　作用于贮液构筑物上的液动压力的简化计算方法……………………（115）
参考文献……………………（138）

第四章　构架式贮液容器的抗震分析……………………（140）

第一节　单层构架贮液容器……………………（140）
第二节　多层构架贮液容器……………………（148）
第三节　算例……………………（152）
参考文献……………………（154）

第五章　混凝土坝的动力计算……………………（155）

第一节　概述……………………（155）
第二节　水平简谐运动时作用于刚性坝面的动水压力……………………（156）
第三节　水平地震时作用于刚性坝面的动水压力……………………（165）
第四节　水平地震时弹性坝体和水库体系的耦联振动……………………（169）
第五节　竖向地面运动时的计算……………………（194）
第六节　坝体具有倾斜上游面时的计算……………………（198）
第七节　若干问题的讨论……………………（211）

参考文献……………………………………………………………………………… (220)

第六章 梁式结构物在液体内的耦联振动……………………………… (222)

第一节 基本运动方程………………………………………………………… (222)
第二节 圆柱形结构物的动水压力………………………………………… (223)
第三节 受弯曲悬臂梁的横向自由振动…………………………………… (227)
第四节 地震作用下的反应（广义坐标的确定）………………………… (230)
第五节 剪切悬臂梁结构的自由振动……………………………………… (231)
第六节 弯曲梁自振特性计算实例………………………………………… (235)
第七节 椭圆坐标中的三维波动方程……………………………………… (237)
第八节 椭圆形结构物的动水压力………………………………………… (249)
第九节 椭圆形截面梁的自由振动………………………………………… (246)
第十节 地震作用下的反应计算…………………………………………… (248)
第十一节 若干计算结果……………………………………………………… (250)
参考文献……………………………………………………………………………… (252)

第七章 输液管道、平板结构和液体的耦联振动……………………… (253)

第一节 管道内可压缩性液体的一维流动………………………………… (253)
第二节 管道内具有液体时的弯曲振动…………………………………… (262)
第三节 平板在流体作用下的振动………………………………………… (266)
第四节 有限及无限长管道具有加劲圆环及弹簧支承时的振动……… (270)
第五节 无限长管道具有中间"固定"支承时的振动…………………… (283)
参考文献……………………………………………………………………………… (288)

第八章 泄水闸的抗震分析…………………………………………………… (289)

第一节 概述……………………………………………………………………… (289)
第二节 动水压力计算………………………………………………………… (289)
第三节 对称性的利用………………………………………………………… (291)
第四节 运动方程及其解……………………………………………………… (293)
第五节 算例……………………………………………………………………… (297)
第六节 模型试验……………………………………………………………… (302)
第七节 对闸墩抗震计算的一些看法……………………………………… (304)
参考文献……………………………………………………………………………… (305)

第九章 随机振动理论在贮液建筑物抗震分析中的应用……………… (306)

第一节 线性动力系统对随机荷载的反应………………………………… (306)
第二节 贮液容器在地震荷载作用下的计算……………………………… (308)
第三节 构架式贮液容器在平稳随机干扰作用下的计算……………… (315)
参考文献……………………………………………………………………………… (317)

附　录 ………………………………………………………………………… (318)

一、椭圆坐标的推导……………………………………………………………… (318)

二、式（7.3.28）的推导………………………………………………………… (320)

第一章　不可压缩流体动力学的基本知识

本书除少数几个章节中考虑了流体的可压缩性影响外，绝大部分章节是以不可压缩流体动力学作为考虑各种问题的基础。为了便于读者阅读，这里对它们的一些基本知识作简要的叙述。对于想在这些领域中有更深入了解的读者，可以参阅有关专著[1-4]。

第一节　欧拉方程及其边值问题的提法

一、欧拉方程

所谓不可压缩流体，是指它的密度在运动过程中保持为常数，即密度既不随时间亦不随空间变化的流体。在研究流体运动时，常常可以忽略液体中内摩擦力(粘滞力)的影响，这种流体称为理想流体。本书主要考虑理想不可压缩流体的运动问题。

如图 1.1.1 所示，首先设想一个能够确定流体所充满的空间内任意点坐标的坐标系。为方便起见，采用直角坐标系，并认为它是静止的。至于向圆柱坐标、球坐标以及任意坐标系的坐标变换和在运动坐标系中的表示等问题，可根据一般向量解析或运动学的各种定理加以解决。

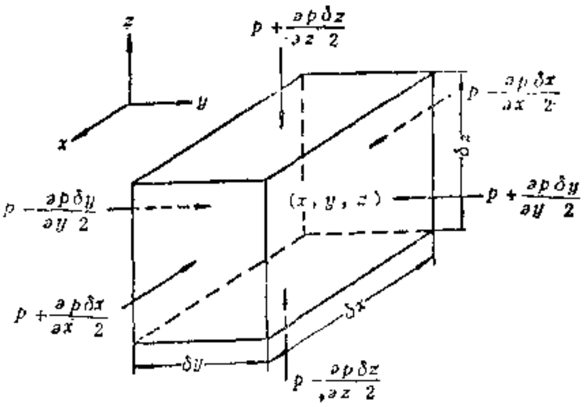


图 1.1.1

下面求流体内的加速度。在流体内考虑一点(x, y, z)，在 x，y，z 方向所观察到的流速分别为 u，v，w。现在我们只考虑 x 方向的流速，而其它方向的流速也可以用同样的方法考虑。

流速 u，一般作为空间坐标 x, y, z 和时间 t 的函数，并表示如下：

$$u=f(x,y,z,t). \tag{1.1.1}$$

在这里一定要注意：u 是观察到的流速，所以

$$\frac{dx}{dt}\neq u.$$

x, y, z 是已在空间确定的坐标，时刻 t 是独立变数。

在时刻 t，我们考虑以流体中一点(x, y, z)为中心的一个微小六面体，令 x, y, z 方向的边长分别为 $\delta x, \delta y, \delta z$。若 $\delta x, \delta y, \delta z$ 很小，则该六面体内的密度和温度等可以看成是不变的。经过时间 δt 后，即在时刻 $t+\delta t$，该微小六面体移动到点 $(x+u\delta t,\ y+v\delta t,\ z+w\delta t)$。于是，微小六面体的速度变化量为

$$\begin{aligned}&f(x+u\delta t,\ y+v\delta t,\ z+w\delta t)-f(x,y,z,t)\\&=\frac{\partial f}{\partial t}\delta t+\frac{\partial f}{\partial x}u\delta t+\frac{\partial f}{\partial y}v\delta t+\frac{\partial f}{\partial z}w\delta t\ .\end{aligned}$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)\delta t,$$

即微小六面体的动量在δt时间内的改变量为

$$\delta_M=\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)\delta t\cdot \cdot(\rho\delta x\delta y\delta z). \tag{1.1.2}$$

式(1.1.2)所表示的量，应等于δt时间内作用于微小六面体上力的冲量。式中ρ是点(x, y, z)处流体的密度。因此有

$$a_x=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}. \tag{1.1.3}$$

我们把它称为点(x, y, z)处流体的加速度。

下面研究作用于微小六面体上的力。如图1.1.1所示，设X是质量力在x方向的分力，p是压力，则在x方向的合力为

$$p\delta y\delta z-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\right)\delta y\delta z+\rho X\delta x\delta y\delta z. \tag{1.1.4}$$

式(1.1.2)与式(1.1.4)乘δt而得的冲量相等，这就是牛顿运动第二定律，即

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho X. \tag{1.1.5 a}$$

同样，对于y和z方向有

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho Y, \tag{1.1.5 b}$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho Z, \tag{1.1.5 c}$$

式中Y和Z是质量力在y和z方向的分力。式(1.1.5)叫做欧拉方程。

欧拉方程的特点，是假定流体内与座标面平行的应力(即摩擦力)是零。因此欧拉方程对于上面所定义的理想流体是完全成立的，而对于实际流体是不正确的。关于摩擦力，在本章第三节还要叙述。

在柱坐标系r,θ,z中，欧拉方程具有下列形式：

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\theta^2}{r}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}+\rho X_r,\\
&\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{v_r v_\theta}{r}\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\frac{X_\theta}{r},\\
&\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+X_z.
\end{aligned}\right\} \tag{1.1.6}$$

这里，v_r,v_θ,v_z是流体微团速度向量在r,θ,z方向上的分量，X_r,X_θ,X_z是质量力在相应坐标方向上的分量。

对于二维流动，欧拉方程为

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho X,\\
&\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho X.
\end{aligned}\right\} \tag{1.1.7}$$

二、连续性方程

所谓连续性方程，就是将质量守恒定律应用于流体的运动。在图 1.1.2 中，流入（或流出）微小六面体的流体总质量，应等于该微小六面体内流体质量的增加(或减少)。

在 δt 时间内，由表面 $ABCD$ 流入的质量为

$$(\rho u)\delta y\delta z\delta t,$$

由表面 $A'B'C'D'$ 流出的质量为

$$\left\{\rho u+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\delta x\right\}\delta y\delta z\delta t.$$

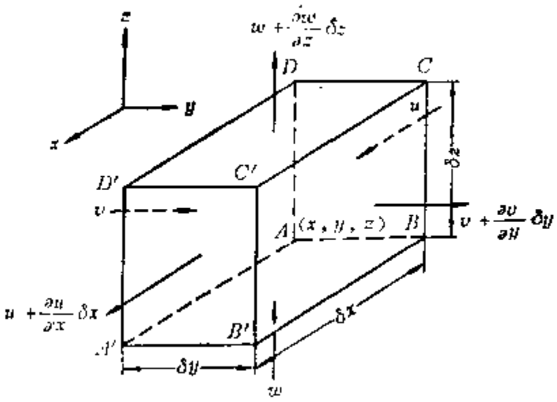


图 1.1.2

同样也能考虑 y 和 z 方向，就是说，在六面体内只留有质量

$$-\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\right\}\delta x\delta y\delta z\delta t. \tag{1.1.8}$$

这就只能看成六面体内的密度发生了变化，其质量增量为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\delta x\delta y\delta z\delta t. \tag{1.1.9}$$

因此根据式(1.1.8)和(1.1.9)，能够得出

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\right\},$$

或

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0. \tag{1.1.10}$$

在式(1.1.10)中，如果流体是不可压缩的，即 $\rho=$常数，那么就有

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{1.1.11}$$

式(1.1.10)称为流体的连续性方程；式(1.1.11)是不可压缩流体的连续性方程。这些方程不是从式(1.1.5)导出的，也就是说，式(1.1.10)或(1.1.11)是独立的。比如理想流体的运动，是由变量 u，v，w，p 表示的，所以能够用式(1.1.5)和式(1.1.11)这四个方程完全描述。因此，将这些方程联立，并在已知的边界条件下求解，就能求得 u、v、w 和 p。

在柱坐标系中，连续性方程具有下列形式：

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{v_r}{r}=0. \tag{1.1.12}$$

对于二维流动，连续性方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \tag{1.1.13}$$

三、势流

如果运动流体的速度向量满足方程

$$\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}=0,\ \frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}=0,\ \frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0, \tag{1.1.14}$$

则流体的运动称为无旋的。若将流体微团的速度分量借助于速度势 $\varphi(x,\ y,\ z,\ t)$来表示：

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad w=\frac{\partial\varphi}{\partial z},\tag{1.1.15}$$

显然，(1.1.14)式恒满足。将(1.1.15)代入连续性方程(1.1.11)，可见速度势$\varphi(x, y, z, t)$满足拉普拉斯(Laplace)方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0.\tag{1.1.16}$$

无旋运动同样称为势流。对于势流，我们今后假定流体微团运动速度是小到可以忽略掉速度的二次项以上的量。于是，由欧拉方程（1.1.5）即可导得如下决定流体中压力的关系式：

$$p=-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\rho\Omega,\tag{1.1.17}$$

其中 Ω 是质量力(体力)的势，

$$X=\frac{\partial\Omega}{\partial x},\ Y=\frac{\partial\Omega}{\partial y},\ Z=\frac{\partial\Omega}{\partial z}.$$

如果体力(质量力)仅由重力所产生，此时

$$\Omega=-\rho g z,$$

则可得到

$$p=-\rho g z-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t},\tag{1.1.18}$$

其中 g 为重力加速度。

四、边界条件的提法

对于理想不可压缩流体流动的具体问题，需要寻求方程（1.1.11）满足给定边界条件的解。对于不动墙，其边界条件为：流体速度在墙上的法向分量为零；对于可动墙，其边界条件为：在墙的法线方向上，流体速度与墙的运动速度相等。考虑到由于流体沿着单位向量 $\vec{n}$ 方向的流动速度 v_n 与速度势 φ 间存在着关系式

$$v_n=\frac{\partial\varphi}{\partial n},$$

因而，边界条件可以写为：

对于不动墙

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0,\tag{1.1.19}$$

对于可动墙

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=v_{0n},\tag{1.1.20}$$

其中 v_{0n} 是墙体运动速度 v_0 在该墙的法线方向 $\vec{n}$ 上的投影。必须指出的是，速度势 φ 所满足的方程(1.1.11)不显含时间，因而，时间只经过边界条件(1.1.20)而包含在解中。求出速度势 φ 之后，流体中的压力 p 可由式(1.1.18)得到。

第二节　重　　力　　波

位于定常均匀重力场中的流体的自由表面是一平面。如果在流体自由表面的无论什么区

域中激发一局部扰动，那末，此扰动就将以所谓重力波的形式向所有方向传播。这种波具有如下特点：它们基本上沿着流体表面传播，且由初始扰动所激发的运动将在流体内部随深度的增加非常迅速地消失。

重力波中流体的运动是有势的，所以，在给定情况下，问题归结为满足拉普拉斯方程(1.1.16)及边界条件式(1.1.19)或式(1.1.20)的速度势 $\varphi(x, y, z, t)$。

我们把流体的自由平衡表面置于 xy 平面，z 轴垂直向上。以 $f(x, y, t)$ 表示振动流体表面偏离平衡位置的垂直位移，并设 p_0 为振动流体表面的压力。从式(1.1.18)，可以写出

$$p_0=-\rho g f-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_{z=f}. \tag{1.2.1}$$

用下面表示式来代替 φ：

$$\varphi'=\varphi+\frac{p_0}{\rho}t.$$

由于速度向量的分量是速度势关于坐标的导数，显然，对速度势增加以与时间有关的项不会影响速度向量的分量之值，故这样作常常是允许的。将上式代入式(1.2.1)，得

$$gf+\frac{\partial\varphi'}{\partial t}\bigg|_{z=f}=0. \tag{1.2.2}$$

考虑到与波体的尺寸相比较，波面上的位移是很小的，因此，波面上的速度分量 w 可以由公式

$$w=\frac{\partial f}{\partial t}$$

来计算；另一方面，计及 $w=\frac{\partial\varphi'}{\partial z}$，我们可以写出关系式

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial z}\bigg|_{z=f}=\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{1.2.3}$$

将式(1.2.2)对 t 求导，得

$$\frac{\partial f}{\partial t}=-\frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2}\bigg|_{z=f},$$

将它代入式(1.2.3)，即得到在波面上应满足的条件：

$$\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z}\right)+\frac{1}{g}\left.\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2}\right)_{z=f}=0. \tag{1.2.4}$$

考虑到波面的位移 f 很小，可以在条件式(1.2.4)中用 $z=0$ 来代替 $z=f$。换句话说，问题归结为求解如下方程：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi'}{\partial z^2}=0,\\&\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z}+\frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2}\right)_{z=0}=0.\end{aligned}\right\} \tag{1.2.5}$$

设流体自由表面无论在 x 轴方向还是在 y 轴方向上均是无限的，且假定重力波波高与流体深度相比是很小的。在此情况下，我们可以把流体深度认为是无限的。如果这些条件均满足，则可不计侧墙的流体底部的边界条件。

现在，考虑在 x 轴方向上传播的重力波，如图 1.2.1 所示。在此情况下，表征流体运动的所有量均可以认为与座标 y 无关。此时，可以把(1.2.5)中第一个方程的解设为

$$\varphi' = Z(z)\cos(kx - \omega t). \tag{1.2.6}$$

其中 ω 是流体中给定点处运动的圆频率，k 称为波数，它与波长(即运动状态在给定瞬时沿 x 轴变化的周期)之间存在关系式 $\lambda = \frac{2\pi}{k}$。将式(1.2.6)代入(1.2.5)中的第一个方程，得到

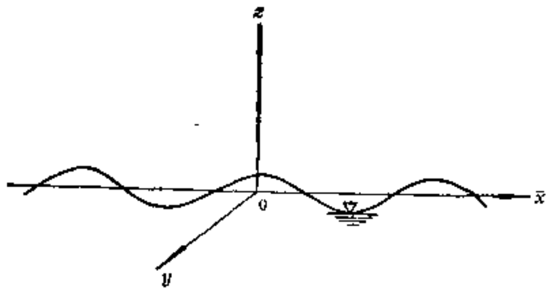


图 1.2.1

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0,$$

其一般解具有如下形式：

$$Z(z) = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz}. \tag{1.2.7}$$

由于流体在 $z < 0$ 的区域中，随着深度的增加，流体微团的运动速度和动压力均应趋于零，即当 $z \to \infty$ 时应有 $\varphi' \to 0$，从而有 $C_2 = 0$。这样，可以将式(1.2.6)写为

$$\varphi' = C_1 e^{kz}\cos(kx - \omega t). \tag{1.2.8}$$

现在，将式(1.2.8)代入(1.2.5)的第二个方程，即使之满足波面上的条件，得到

$$k = \frac{\omega^2}{g},$$

即

$$\omega^2 = kg. \tag{1.2.9}$$

由此可见，圆频率 ω 和波数 k 并非相互独立的量，其间乃是互为联系的。

将势式(1.2.8)对坐标变量取导数，得到流体微团的相应速度分量：

$$\left.\begin{aligned} u &= -C_1 k e^{kz}\sin(kx - \omega t), \\ w &= C_1 k e^{kz}\cos(kx - \omega t). \end{aligned}\right\} \tag{1.2.10}$$

从上列方程看出，在空间每一给定点处，流体微团的速度向量的端点可画出以 $C_1 k e^{kz}$ 为半径的圆，且其绝对值随 z(流体的深度)的增加成指数地减小(注意：在图 1.2.1 的坐标系中，z 是一负值)。此外，从此方程还可以看出，重力波传播的相速度为

$$c = \frac{\omega}{k},$$

而其群速度则等于

$$U = \frac{\partial \omega}{\partial k}.$$

计及式(1.2.9)，我们得到

$$\left.\begin{aligned} c &= \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \\ U &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \end{aligned}\right\} \tag{1.2.11}$$

由此可见，重力波传播的速度正比于其波长的平方根。

最后，我们来考查流体微团的运动轨迹。为此目的，我们用 x 和 z 表示随此微团在空间运动之移动座标，而以 x_0 和 z_0 表示其在某一初始时刻在空间中的位置。计及流体微团的位移很小，我们可以写出

$$u=\frac{\partial x}{\partial t},\quad w=\frac{\partial z}{\partial t},$$

从而，由式(1.2.10)进行积分，得到

$$\left.\begin{aligned} x-x_0&=C_1\frac{k}{\omega}e^{kz}\cos(kx-\omega t),\\ z-z_0&=C_1\frac{k}{\omega}e^{kz}\sin(kx-\omega t). \end{aligned}\right\}\tag{1.2.12}$$

从此结果明显看出，流体微团在空间的运动轨迹是以点(x_0, z_0)为圆心的圆周，其半径等于$C_1\frac{k}{\omega}e^{kz}$。与速度向量一样，此半径随 z 的增加而成指数地衰减。

第三节　阻尼的考虑

上两节，我们讨论了理想不可压缩流体运动的基本方程以及将在以后遇到的一类重要波——重力波。为了讨论方便起见，我们忽略掉了由于流体内部的粘滞效应而产生的阻尼力。但是，众所周知，在真实流体中，粘滞性总是存在着的。因而，流体运动时，流体微团之间总要因为粘滞作用而产生阻尼力。

计算流体中耗散力的最好途径归结为考虑粘性流体的运动；但是，由此而产生的数学和力学上的困难，使问题的求解变得异常复杂，除了对某些具体问题可以利用数值方法，比如有限差分法或有限单元法求解外，现在还不可能得到对于实际有用的解。因此，本书凡在不得不考虑流体阻尼力的地方，均利用由雷利(Rayleigh)提出、尔后由兰姆(Lamb)[3]所采用的方法，认为流体微团的运动被正比于相对速度的力所阻扰。

这样，在考查具有阻尼的不可压缩流体的运动时，在方程(1.1.5)和(1.1.6)中，应引入正比于相应速度之力。用 ν 表示流体中的阻尼系数(量纲为 1/秒)，此时，欧拉方程(1.1.5)和(1.1.6)应写为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\nu u+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=X,\\ &\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\nu v+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=Y,\\ &\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\nu w+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=Z, \end{aligned}\right]\tag{1.1.5'}$$

和

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\theta^2}{r}+\nu v_r+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=X_r,\\ &\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{v_r v_\theta}{r}+\frac{\nu v_\theta}{r}+\frac{1}{r\rho}\frac{\partial p}{\partial\theta}=\frac{X_\theta}{r},\\ &\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}+\nu v_z+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=X_z. \end{aligned}\right]\tag{1.1.6'}$$

而连续性方程仍然具有原来的形式。对于势流，如果考虑三维流动，速度势仍然应满足拉普拉斯方程(1.1.16)。

和前面一样，假设流体微团运动速度相当小，以至可以忽略掉速度二次以上的项。此时，以方程(1.1.5′)为例，可以得到决定流体中压力的如下关系式：

$$p=-\rho\nu\varphi-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\rho\Omega. \tag{1.3.1}$$

如果计及重力的影响，则可得到

$$p=-\rho g z-\rho\nu\varphi-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{1.3.2}$$

现在，考察重力波在具有阻尼的流体中的传播。此时，仿照前面，由式(1.3.2)可见，波面上应满足条件

$$p_0=-\rho g f-\nu\rho\varphi\Big|_{z=0}-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{z=0}. \tag{1.3.3}$$

设

$$\varphi=\varphi'-\frac{p_0}{\nu\rho}, \tag{1.3.4}$$

将它代入式(1.3.3)中，得

$$gf+\nu\varphi'\Big|_{z=0}+\frac{\partial\varphi'}{\partial t}\Big|_{z=0}=0.$$

考虑到式(1.2.3)，从上式可以得到条件

$$\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z}+\frac{\nu}{g}\frac{\partial\varphi'}{\partial t}+\frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2}\right)_{z=0}=0. \tag{1.3.5}$$

和前面一样，若假定重力波在 xz 平面内传播，并考虑到 $z\to-\infty$ 时流体的运动速度应趋于零，则满足式(1.2.5)中第一个方程的速度势可以具有如下形式：

$$\varphi'=C_1e^{kz+i(kx-\omega t)}. \tag{1.3.6}$$

将式(1.3.6)代入式(1.3.5)，得

$$C_1\left(k-\frac{i\nu}{g}\omega-\frac{\omega^2}{g}\right)=0.$$

由于 C_1 为不恒等于零的常数，故有

$$k-\frac{i\nu}{g}\omega-\frac{\omega^2}{g}=0,$$

或

$$k=\frac{i\nu}{g}\omega+\frac{\omega^2}{g}, \tag{1.3.7}$$

$$\omega=\frac{1}{2}(-i\nu\pm\sqrt{4kg-\nu^2}). \tag{1.3.7′}$$

由此可见，在流体具有阻尼的情形里，波数 k 与圆频率 ω 之间同样是互有联系的，并且这时的关系比无阻尼时更为复杂。

将 k 的表示式(1.3.7)代入式(1.3.6)并对座标求导，然后分离实部和虚部，得到液体微团相应速度分量：

$$
\left.\begin{aligned}
u &= -C_1 e^{\left(\frac{\omega^2}{g}z-\frac{\nu\omega}{g}x\right)}\left[\frac{\nu\omega}{g}\cos\left(\frac{\nu\omega}{g}z+\frac{\omega^2}{g}x-\omega t\right)+\right.\\
&\quad\left.+\frac{\omega^2}{g}\sin\left(\frac{\nu\omega}{g}z+\frac{\omega^2}{g}x-\omega t\right)\right]\\
w &= C_1 e^{\left(\frac{\omega^2}{g}z-\frac{\nu\omega}{g}x\right)}\left[\frac{\omega^2}{g}\cos\left(\frac{\nu\omega}{g}z+\frac{\omega^2}{g}x-\omega t\right)-\right.\\
&\quad\left.-\frac{\nu\omega}{g}\sin\left(\frac{\nu\omega}{g}z+\frac{\omega^2}{g}x-\omega t\right)\right].
\end{aligned}\right\} \tag{1.3.8}
$$

若令

$$
\frac{\nu\omega}{g}=A\cos\theta,
$$

$$
\frac{\omega^2}{g}=A\sin\theta,
$$

则上式可以改写为

$$
\left.\begin{aligned}
u &= -C_1 A e^{\left(\frac{\omega^2}{g}z-\frac{\nu\omega}{g}x\right)}\cos\left(\frac{\nu\omega}{g}z+\frac{\omega^2}{g}x-\omega t-\theta\right),\\
w &= -C_1 A e^{\left(\frac{\omega^2}{g}z-\frac{\nu\omega}{g}x\right)}\sin\left(\frac{\nu\omega}{g}z+\frac{\omega^2}{g}x-\omega t-\theta\right).
\end{aligned}\right\} \tag{1.3.9}
$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
A &= \frac{\omega}{g}\sqrt{\nu^2+\omega^2},\\
\theta &= \operatorname{arctg}\frac{\omega}{\nu}.
\end{aligned}\right\} \tag{1.3.10}
$$

由此可见，在具有内阻尼的不可压缩流体中的任意给定点处，和无阻尼流体的情形一样，速度向量的端点亦画出一个圆，不过，这时圆的半径为$C_1Ae^{\left(\frac{\omega^2}{g}z-\frac{\nu\omega}{g}x\right)}$，因而其量值不但随$z$（流体的深度，在图1.2.1坐标系中$z$为负值），同时亦随$x$（距扰动源的水平距离）的增加成指数地衰减。当然，由于流体的粘性系数一般是比较小的，因而在x方向上的衰减比在z方向上的衰减速度为慢。另一方面，我们从式(1.2.10)得知，对于理想（无阻尼）不可压缩流体，速度向量的绝对值只在z方向上发生衰减，而在x方向上则无衰减发生。这是无阻尼流体和具有内阻尼的流体之间的一大差异。

我们从式(1.2.10)还可以看出，在理想（无粘性）不可压缩流体自由表面上某一局部区域中激发一扰动时，所产生的重力波基本上沿着流体表面传播；而对于具有内阻尼的流体，从式(1.3.9)知，重力波将向流体内部传播，其传播方向与水平方向成$(90^\circ-\theta)$角度。其次，从式(1.7.9)知，重力波在粘滞流体内传播的相速度等于[6]

$$
c=\frac{g}{\sqrt{\nu^2+\omega^2}}.
$$

再由(1.3.7)，得

$$
c=\frac{2g}{\sqrt{2\nu^2\mp 2i\nu\sqrt{\frac{8\pi g}{\lambda}-\nu^2}+\frac{8\pi g}{\lambda}}}, \tag{1.3.11}
$$

亦即传播速度不再简单地正比于波长λ的平方根，这是重力波在无阻尼流体和有阻尼流体中

传播的又一差异。

最后，我们来考虑粘性流体中流体微团的轨迹。为此，从式(1.3.9) 对时间变量 t 进行积分，得到

$$\left.\begin{aligned} x-x_0&=C_1\frac{A}{\omega}e^{\left(\frac{\omega^2}{g}z-\frac{\nu\omega}{g}x\right)}\sin\left(\frac{\nu\omega}{g}z+\frac{\omega^2}{g}x-\omega t-\theta\right),\\ z-z_0&=C_1\frac{A}{\omega}e^{\left(\frac{\omega^2}{g}z-\frac{\nu\omega}{g}x\right)}\cos\left(\frac{\nu\omega}{g}z+\frac{\omega^2}{g}x-\omega t-\theta\right). \end{aligned}\right\} \tag{1.3.12}$$

从这个表示式明显看出，与无阻尼流体一样，有阻尼流体微团在空间的运动轨迹仍然是一以点$(x_0,\ z_0)$为圆心的圆周，只不过此时其半径变成了$C_1\frac{A}{\omega}e^{\left(\frac{\omega^2}{g}z-\frac{\nu\omega}{g}x\right)}$，它随着 z 或 x 的增加成指数地衰减。

当阻尼系数 ν 为零时，上面各公式均变成了无阻尼流体情况下与之相应的公式。因而，以上讨论是理想无粘性流体向着粘性流体的一种简单推广。应当指出的是，由于流体的阻尼系数一般均很小[6]，从实用观点来说，将流体阻尼力略去可以使计算大大简化且可以得到足够精确的结果。因此，在以后各种问题的讨论中，除非特殊需要，我们将只对理想（无粘性）的不可压缩流体进行研究。

参 考 文 献

[1] Н. Е. Кочин, И. А. Кебель, Н В. Розе, Теоретическая Гидромеханика, ОГИЗ, 1948.
[2] L. M. Milne-Thomson, Theoretical Hydrodynamics, 3rd ed., Macmillan, New York, 1960.
[3] H. Lamb, Hydrodynamics, Dover Publ., Inc., New York, 1945.
[4] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Fluid Mechanics, Pergamon Press, 1963.
[5] A. C. Eringen, E. S. Suhubi, Elastodynamics, Vol. II, Academic Press, New York, 1975.
[6] Г. Н. Микишев, Н. Я. Дорожкин, Эксперментальные исследования свободных колебаний жидкост и в сосудах, Изв. АН СССР, ОГН, «Механика и Машиностроение», №4, АН ССР, 1961.

第二章　弹性系统振动的基本理论

在这一章里我们将介绍线性弹性系统的经典分析方法，以便为随后诸章中所论述的各种具体问题提供一个基础。

一个处于平衡状态的弹性系统，当受到某种扰动，破坏了原来的平衡状态时，就将发生振动。为确定系统的振动状态所需的独立参数的数目，称为该系统的自由度。如果仅需一个独立参数就能确定系统的振动状态，则称该系统为单自由度系统。如果一个系统的振动状态需要一个以上的独立参数才能确定，则称该系统为多自由度系统；而连续的弹性体可视为无穷多个自由度系统。本章将讨论单自由度、多自由度和弹性体系的基本振动理论。

第一节　单自由度系统的振动

一、振动的一般方程

我们考虑如图 2.1.1 所示的单自由度系统。该系统由一质量为 m 的物体通过弹簧和阻尼器与支座连接而成。弹性系统受到外界激振的方式可归结为二种：一种是物体直接受到一个随时间变化的激振力 $F(t)$(如图 2.1.1 a 所示)；另一种是支座产生一已知运动 $x_0(t)$(如图 2.1.1 b 所示)。其中 k 为弹簧常数，c 为阻尼系数。

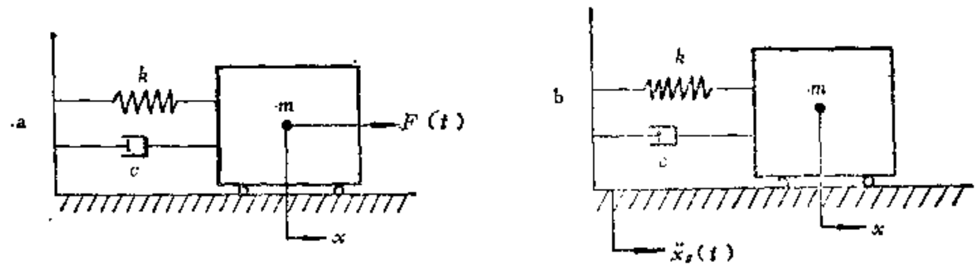


图 2.1.1

设 x 为相对于支座从平衡位置起算的物体的位移，则对图 2.1.1 a 所示情形，x 代表物体的绝对位移。此时，物体受到惯性力 $-m\ddot{x}$，弹簧恢复力 $-kx$，阻尼力 $-c\dot{x}$ 及激振外力 $F(t)$ 的作用。由达朗贝尔(D'Alembert)原理可得运动方程[1]：

$$F-m\ddot{x}-c\dot{x}-kx=0,$$

即

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F. \tag{2.1.1}$$

对图 2.1.1 b 而言，x 仅代表物体对于支座的相对位移，因而物体的绝对位移 $x'=x_g+x$。此时，物体受到的惯性力为 $-m\ddot{x}'=-m(\ddot{x}_g+\ddot{x})$，而弹簧恢复力和阻尼力仅与相对位移 x 和相对速度 $\dot{x}$ 有关，故仍为 $-kx$，$-c\dot{x}$。因而运动方程为

$$m(\ddot{x}_g+\ddot{x})+c\dot{x}+kx=0,$$

即

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=-m\ddot{x}_g. \tag{2.1.2}$$

由此看到，在支座运动情况下，对弹性系统相对运动起作用的是支座运动的加速度，而不是位移。比较式(2.1.1)与式(2.1.2)可知，此二种情况下，方程的左边完全类似，仅右端项不同。

为使二个方程写成相同的标准形式，我们令：

$$p^2=\frac{k}{m},\quad \zeta=\frac{c}{c_c}=\frac{c}{2\sqrt{km}}, \tag{2.1.3}$$

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{F(t)}{m}, & \text{受外力作用时},\\ -\ddot{x}_g. & \text{支座运动时}.\end{cases} \tag{2.1.4}$$

我们将看到：① p 正好是无阻尼自由振动时的圆频率，② $c_c=2\sqrt{km}$ 是使自由阻尼运动不产生振动的最小阻尼系数，故称 c_c 为临界阻尼系数，而 ζ 称为阻尼比。由此，式(2.1.1)和式(2.1.2)可以写成同一标准形式

$$\ddot{x}+2\zeta p\dot{x}+p^2x=f \tag{2.1.5}$$

这样我们就可以把二种激振方式统一起来进行求解和讨论，只要记住对于外力激振，x 代表绝对位移，f 代表单位质量受到的激振力；对于支座运动情形，x 代表相对位移，而 f 代表支座运动的加速度(符号相反)。

二、无阻尼自由运动

我们首先讨论无阻尼时的自由振动，即 $\zeta=0$，$f(t)=0$ 的情形。此时方程(2.1.5)变成

$$\ddot{x}+p^2x=0. \tag{2.1.6}$$

容易得到方程(2.1.6)的通解为

$$x=c_1\cos pt+c_2\sin pt, \tag{2.1.7}$$

常数 c_1，c_2 可由初始条件确定。设 $t=0$时，

$$x(0)=x_0,\quad \dot{x}(0)=\dot{x}_0,$$

在式(2.1.7)中，令 $t=0$，得

$$c_1=x_0.$$

将式(2.1.7)对时间求导数，再令 $t=0$，可得

$$c_2=\frac{\dot{x}_0}{p}.$$

将c_1，c_2代入式(2.1.7)，得

$$x=x_0\cos pt+\frac{\dot{x}_0}{p}\sin pt. \tag{2.1.8}$$

由式(2.1.8)知，无阻尼自由振动的解由二个有相同圆频率 p 的简谐运动迭加而成：一个与 $\cos pt$ 成比例，由初始位移引起；另一个与 $\sin pt$ 成比例，由初始速度引起（图 2.1.2 a、b)。此二个组成部分都是周期运动，其周期为

$$T=\frac{2\pi}{p}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{2.1.9}$$

如果令

$$\begin{cases} x_0 = A\cos\alpha, \\ \dfrac{\dot{x}_0}{p} = A\sin\alpha, \end{cases} \tag{2.1.10}$$

则可求得

$$\begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{\dot{x}_0}{p}\right)^2}, \\ \alpha = \mathrm{tg}^{-1}\dfrac{\dot{x}_0}{px_0}. \end{cases} \tag{2.1.11}$$

将式（2.1.10）代入式（2.1.8），经整理后可得到通解的等效表达式

$$x = A\cos(pt-\alpha). \tag{2.1.12}$$

由此可知，由式（2.1.8）给出的二个简谐运动相加后仍是一个简谐运动，它的周期T仅取决于系统本身的特性（m和k），而与引起系统振动的初始状态（x_0，$\dot{x}_0$）无关，此振动的最大位移为A，称为振幅，α称为初相位，A，α二常数依赖于p和初始条件（图 2.1.2 c）。

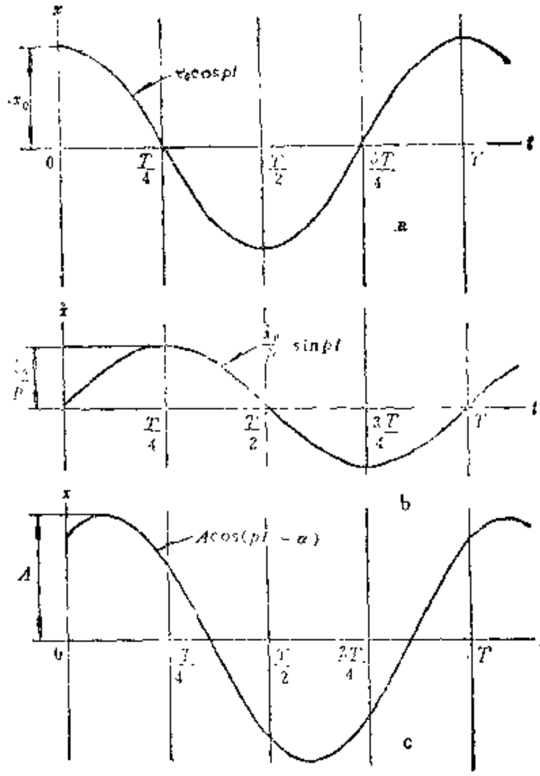


图 2.1.2

三、无阻尼强迫振动

如果系统不是处于自由状态，而是受到外界施加的变力或支座产生的运动，则系统的反应变得较为复杂。

当单自由度系统受到外力$F(t) = B\sin\omega t$的作用时，令$A = \dfrac{B}{m}$，则$f(t) = A\sin\omega t$。此时，系统的运动方程为

$$\ddot{x} + p^2x = A\sin\omega t. \tag{2.1.13}$$

由常系数线性微分方程理论可知，式（2.1.13）的通解等于相应的齐次方程（2.1.7）的通解式（2.1.8）与式（2.1.13）的任一特解之和。

取式（2.1.13）的特解为下列形式：

$$\bar{x} = C_3\sin\omega t. \tag{2.1.14}$$

为确定任意常数C_3，将式（2.1.14）代入式（2.1.13），即得

$$C_3 = \frac{A}{p^2-\omega^2}.$$

于是，式（2.1.13）的通解为

$$x = C_1\cos pt + C_2\sin pt + \frac{1}{1-\left(\dfrac{\omega}{p}\right)^2}\frac{A}{p^2}\sin\omega t. \tag{2.1.15}$$

式（2.1.15）的前二项代表自由振动，第三项与激振力成比例，称为稳态强迫振动。

所以，系统的运动实际是二种不同振幅不同频率的简谐运动的迭加，形成比较复杂的运动。然而，由于实际上系统存在着阻尼（这里没有考虑），自由振动将很快消失，仅剩下稳态强迫振动

$$x=\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{p}\right)^2}\cdot\frac{1}{p^2}\sin\omega t. \tag{2.1.16}$$

由于

$$\frac{A}{p^2}\sin\omega t=\frac{m}{k}\cdot\frac{B}{m}\sin\omega t=\frac{1}{k}F(t)$$

正好代表激振力 $F(t)$ 静力作用时产生的"静"位移．而因子 $1/(1-\omega^2/p^2)$ 代表此力的动力作用，此因子的绝对值

$$\beta=\left|\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{p}\right)^2}\right|, \tag{2.1.17}$$

常称做放大倍数。

β 依赖于频率比 ω/p（图 2.1.3），当 ω/p 很小时，$\beta\approx1$，运动的幅度与激振力静力作用时相同；当 ω/p 接近于 1 时，β 迅度增大．强迫振动的位移相应增大，特别是当 $p=\omega$，即共振时，β 和 x 变为无穷大（由于实际上存在着阻尼，幅值不可能无限增大）；当 ω 增大到超过 p 时，β 逐渐减小；当 $\omega\gg p$ 时，β 将趋向于零，即在高频脉动力作用下，物体可视为静止不动。

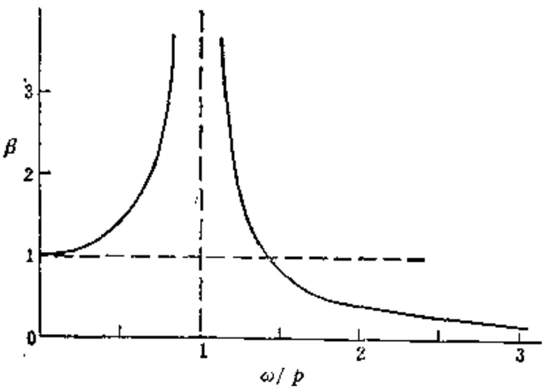


图 2.1.3

四、具有粘滞阻尼的自由振动

在上面的讨论中没有考虑系统中实际存在的阻尼作用。因此，自由振动的振幅不随时间变化，而强迫振动的振幅在共振时可以无限增大。然而实验表明，自由振动总是逐渐衰减的，而强迫振动在共振时，振幅仍是有限的。为使振动分析能符合实际情况，一般必须考虑阻尼的影响。以下我们只讨论阻尼力与物体速度成比例即所谓粘滞阻尼的情形。因此，在式（2.1.5）中，令 $f(t)=0$，就得到具有粘滞阻尼的单自由度系统的自由振动方程：

$$\ddot{x}+2\zeta p\dot{x}+p^2x=0. \tag{2.1.18}$$

我们令解为下列形式：

$$x=e^{rt}, \tag{2.1.19}$$

这里 e 为自然对数的底，r 为待定常数。适当选择 r 的值，可使式（2.1.19）满足方程（2.1.18）。为此将式（2.1.19）代入方程（2.1.18）并整理化简可得形如

$$r^2+2\zeta pr+p^2=0 \tag{2.1.20}$$

的特征方程。只要 r 满足式（2.1.20），则式（2.1.19）就是式（2.1.18）的一个特解。求解方程（2.1.20）得

$$r=-\zeta p\pm\sqrt{\zeta^2-1}\,p.$$

我们先讨论 $\zeta<1$ 的情形，即阻尼较小的情形，这时我们得到二个复根：

$$r_1=-\zeta p+ip',\quad r_2=-\zeta p-ip', \tag{2.1.21}$$

其中

$$p'=\sqrt{1-\zeta^2}\,p. \tag{2.1.22}$$

将 r_1，r_2分别代入式(2.1.19)就得到二个特解．为了将解表为实函数的形式，可取它们的和与差并乘以适当的常数．并应用欧拉公式，得

$$x_1=\frac{1}{2}(e^{r_1t}+e^{r_2t})=e^{-\zeta pt}\cos p't,$$

$$x_2=\frac{1}{2}(e^{r_1t}-e^{r_2t})=e^{-\zeta pt}\sin p't.$$

x_1，x_2仍是方程(2.1.18)的特解．由此通解为

$$x=e^{-\zeta pt}(c_1\cos p't+c_2\sin p't), \tag{2.1.23}$$

其中 c_1，c_2为任意常数，其值可由初始条件确定．解式(2.1.23)中圆括号内的表达式表示简谐振动．其频率为 $p'=\sqrt{1-\zeta^2}\,p$，称为有阻尼固有频率．其相应周期为

$$T'=\frac{2\pi}{p'}=\frac{T}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \tag{2.1.24}$$

T 为无阻尼固有周期。由此可知有阻尼时系统固有频率将减小，而周期则将延长．当$\zeta\ll1$时，可取 $p'\approx p$，$T'\approx T$。令 $\zeta=0$、式(2.1.23)变成

$$x=c_1\cos pt+c_2\sin pt.$$

这就是前面已经得到的无阻尼自由振动的解。

为确定常数 c_1和c_2，利用初始条件

$$x(0)=x_0,\ \dot{x}(0)=\dot{x}_0.$$

在式(2.1.23)中，令 $t=0$，求得

$$c_1=x_0.$$

对式(2.1.23)两边取导数，并令 $t=0$，则有

$$\dot{x}_0=-c_1\zeta p+c_2p',$$

由此

$$c_2=\frac{\dot{x}_0+\zeta px_0}{p'}=\frac{\dot{x}_0+\zeta px_0}{\sqrt{1-\zeta^2}\,p},$$

将 c_1、c_2代入通解中，得

$$x=e^{-\zeta pt}\left(x_0\cos p't+\frac{\dot{x}_0+\zeta pt}{\sqrt{1-\zeta^2}\,p}\sin p't\right). \tag{2.1.25}$$

解(2.1.25)又可改写为

$$x=Ae^{-\zeta pt}\cos(p't-\alpha'), \tag{2.1.26}$$

其中

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{(\dot{x}_0+\zeta px_0)^2}{p'^2}}, \tag{2.1.27}$$

$$\alpha'=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\dot{x}_0+\zeta px_0}{p'x_0}\right). \tag{2.1.28}$$

按照式(2.1.26)，在图 2.1.4 上绘出了位移与时间的关系曲线。由图看出，有阻尼系统

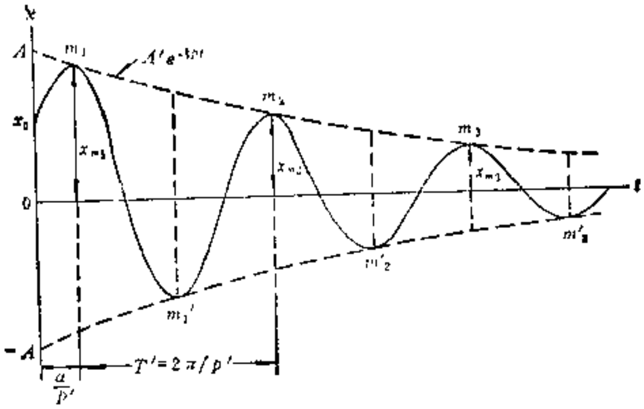


图 2.1.4

的自由振动位移的振幅处于二条包络线$\pm Ae^{-\xi pt}$之间，随着时间的增大而逐渐衰减。物体相邻二次经过平衡位置的时间间隔都是相同的，且等于系统固有周期的一半。

现在考虑$\xi>1$的情形。此时，特征方程的二根皆为负实数：

$$r_1=-\xi p+\sqrt{\xi^2-1}\,p,$$
$$r_2=-\xi p-\sqrt{\xi^2-1}\,p,$$

由此求得通解

$$x=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}.$$

这个解，既没有周期性，也不具振动形式。这是因为粘滞阻尼很大，以致当物体离开平衡位置后，不能产生振动，而是逐渐回到平衡位置。此时，该系统称为过阻尼体系。

显然，在小阻尼($\xi<1$)和过阻尼($\xi>1$)之间，必定存在着$\xi=1$的特殊情况，它是使系统运动状态失去振动特性的最小阻尼，使系统从衰减的简谐运动转变为不振动的衰减运动的临界状态。对应$\xi=1$时的阻尼系数用c_c来表示，c_c称为临界阻尼系数。由式(2.1.3)知，ξ与c之间有关系

$$\xi=\frac{c}{2\sqrt{km}} \tag{2.1.29}$$

令$\xi=1$，求得

$$c_c=2\sqrt{mk}, \tag{2.1.30}$$

由此ξ可表为

$$\xi=\frac{c}{c_c}.$$

即ξ为系统所具有的阻尼系数与临界阻尼系数之比，故称ξ为阻尼比。

五、具有粘滞阻尼的强迫振动

现在讨论具有粘滞阻尼的单自由度系统的强迫振动。先考虑广义激振力为一简谐函数情形，即当

$$f(t)=A\sin\omega t \tag{2.1.31}$$

时，运动方程为

$$\ddot{x}+2\xi p\dot{x}+p^2x=A\sin\omega t. \tag{2.1.32}$$

这是常系数线性非齐次方程。它的通解为对应的齐次方程(2.1.18)的通解式(2.1.23)与它的

任一特解之和。式(2.1.32)的特解可取为下列形式：

$$x=M_1\cos\omega t+M_2\sin\omega t. \tag{2.1.33}$$

将上式代入方程(2.1.32)，可得

$$[(p^2-\omega^2)M_2-2\xi p\omega M_1-A]\sin\omega t+$$
$$+[(p^2-\omega^2)M_1+2\xi p\omega M_2]\cos\omega t=0.$$

显然，要使上式对所有的 t 都成立，必须

$$(p^2-\omega^2)M_2-2\xi p\omega M_1=A,$$
$$(p^2-\omega^2)M_1+2\xi p\omega M_2=0$$

成立，由此可解出常数 M_1，M_2：

$$M_1=\frac{-2\xi p\omega}{(p^2-\omega^2)^2+4\xi^2p^2\omega^2}A,$$

$$M_2=\frac{(p^2-\omega^2)}{(p^2-\omega^2)^2+4\xi^2p^2\omega^2}A.$$

将 M_1, M_2 代入式 (2.1.33)，就得式 (2.1.32) 的特解。而其全解（当 $\xi<1$ 时）则为

$$x=e^{-\xi pt}(c_1\cos p't+c_2\sin p't)+M_1\cos\omega t+$$
$$+M_2\sin\omega t. \tag{2.1.34}$$

其中前一项代表自由振动。由于带有因子 $e^{-\xi pt}$，自由振动将逐渐衰减，仅留下最后二项所代表的稳态强迫振动，其周期等于激振力的周期。

为便于讨论，将稳态强迫振动改写成

$$x=A'\sin(\omega t-\alpha), \tag{2.1.35}$$

其中

$$A'=\sqrt{M_1^2+M_2^2}=\frac{A/p^2}{\sqrt{(1-\omega^2/p^2)^2+4\xi^2\omega^2/p^2}}, \tag{2.1.36}$$

$$\alpha=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{-M_1}{M_2}\right)=\mathrm{tg}^{-1}\frac{2\xi\omega/p}{1-\omega^2/p^2}. \tag{2.1.37}$$

可见，具有粘滞阻尼的稳态强迫振动乃是一种具有不变振幅 A，初相角 α 和周期 $T=2\pi/\omega$ 的简谐运动。

如式 (2.1.4) 所表示，广义激振力 $f(t)$ 代表单位质量所受外力或（当支座产生运动时）代表单位质量所受惯性力，因而 $A/p^2=\dfrac{A}{k/m}=\dfrac{mA}{k}$ 正好代表外力或支座产生的惯性力作为静力作用时“静”位移的幅值。所以强迫振动的振幅 A' 可以看成是静位移 A/p^2 与系数 β 的乘积，这里

$$\beta=\frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2/p^2)^2+(2\xi\omega/p)^2}}. \tag{2.1.38}$$

它代表动力作用的放大效应，称为放大系数。它不仅依赖于比值 ω/p，也依赖于阻尼比 ξ，它们之间的关系绘于图 2.1.5 中。由图中可以看到，当 $\omega\ll p$ 时，$\beta\approx1$，振动位移近似等于激振力静力作用的位移；当 $\omega\gg p$ 时，β 趋向于零，振动位移近似于零，即高频激振力对于固有频率很低的系统，实际上不产生振动。在这二种极端情形中，我们注意到阻尼对 β 只有次要的影响，因而即使忽略阻尼，也不致于引起过大的误差。

当 ω 与 p 比较相近时，β 对 ξ 变得很敏感。在阻尼不大的情况下(例如 $\xi<0.5$)，当 ω/p 接近于 1 时，β 迅速增大，其最大值发生于 ω/p 略小于 1 的地方。实际上，

$$\frac{\partial\beta}{\partial(\omega/p)}=-\frac{1}{2}\frac{-4(1-\omega^2/p^2)(\omega/p)+8\xi(\omega/p)}{\sqrt{(1-\omega^2/p^2)^2+4\xi^2\omega^2/p^2}},$$

令 $\dfrac{\partial\beta}{\partial(\omega/p)}=0$，我们求出当

$$\frac{\omega}{p}=\sqrt{1-2\xi^2} \tag{2.1.39}$$

时，β 取最大值。当 ξ 很小时，β 最大值发生在非常接近于共振 ($\omega/p=1$) 的地方，因此可取共振时的 β 值近似代表最大值，即

$$\beta_{max}\approx\frac{1}{2\xi}. \tag{2.1.40}$$

由以上讨论可知：在 $\omega\ll p$ 或 $\omega\gg p$ 的范围内，阻尼可以忽略，而在 $\omega\approx p$ 时，必须考虑阻尼的影响。

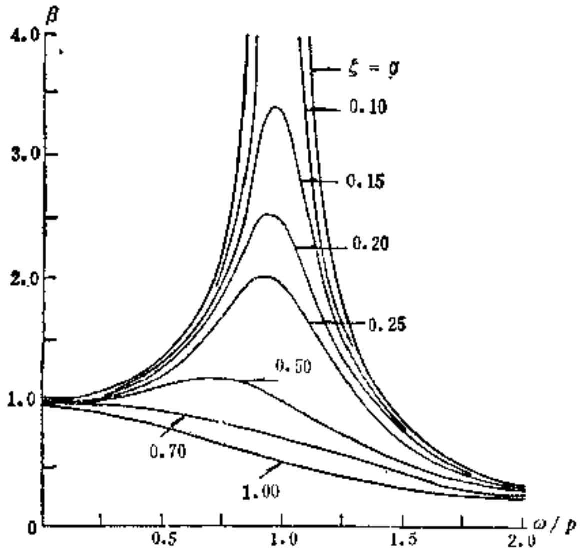


图 2.1.5

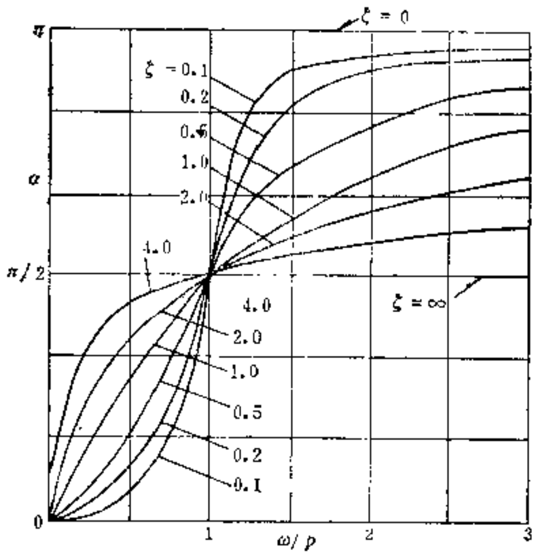


图 2.1.6

现在我们讨论稳态反应和激振函数之间的相位差与 ω/p 及 ξ 之间的关系。由式(2.1.35)可知，稳态反应按 $\sin(\omega t-\alpha)$ 变化，它与激振函数相差一相位 α，即稳态反应滞后于激振函数 α/ω 秒。从式 (2.1.37) 知道，α 值也取决于阻尼比和频率比。图 2.1.6 上绘出了不同 ξ 值时 α 与 ω/p 的关系曲线。在 $\xi=0$ 时，若 $\omega<p$，$\alpha=0$；若 $\omega>p$，$\alpha=\pi$。在有阻尼时，α 值随着比值 ω/p 增大而增大。

我们可以类似地得到广义激振力为

$$f(t)=B\cos\omega t \tag{2.1.41}$$

时的稳态强迫振动的解：

$$x=N_1\cos\omega t+N_2\sin\omega t, \tag{2.1.42}$$

其中

$$N_1=\frac{(p^2-\omega^2)B}{(p^2-\omega^2)^2+4\,\xi^2p^2\omega^2},$$
$$N_2=\frac{2\,\xi p\omega B}{(p^2-\omega^2)^2+4\,\xi p^2\omega^2}.$$

同样可改写成下列形式：

$$x=B'\cos(\omega t-\theta),\tag{2.1.43}$$

其中

$$B'=\frac{B/p^2}{\sqrt{(1-\omega^2/p^2)^2+(2\,\xi\omega/p)^2}},\tag{2.1.44}$$

$$\theta=\mathrm{tg}^{-1}\frac{2\,\xi\frac{\omega}{p}}{1-(\omega/p)^2}.\tag{2.1.45}$$

以上我们讨论了在简谐函数激振下系统的强迫振动。然而实际上经常遇到的是更为复杂的激振函数。如果激振函数是具有周期T的任意函数，我们可以利用已知的关于简谐函数的解圆满地得到问题的解。

考虑系统受到周期为T_0的周期函数$f(t)$的作用。现将$f(t)$展为三角级数：

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t),$$

其中

$$a_0=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}f(t)dt,$$
$$\left.\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{T_0}\int_0^{T_0}f(t)\cos n\omega t dt,\\ b_n&=\frac{2}{T_0}\int_0^{T_0}f(t)\sin n\omega t dt,\end{aligned}\right\}\quad(n=1,2,\cdots)$$
$$T_0=2\,\pi/\omega.$$

于是系统的运动方程可表为

$$\ddot{x}+2\,\xi p\dot{x}+p^2x=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t).\tag{2.1.46}$$

方程（2.1.46）的通解仍然由二部分组成：一部分为自由振动，另一部分为强迫振动的特解。由于阻尼的作用，自由振动将很快衰减。利用线性微分方程的迭加原理，系统的稳态强迫振动可由式（2.1.46）右端项中每一项所产生的稳态反应求和而得到。对应于级数每一项的稳态反应则可利用式（2.1.35）和（2.1.43）求得。因此式（2.1.46）的通解可写成：

$$\begin{aligned}x=&e^{-\xi pt}(c_1\cos p't+c_2\sin p't)+\\&+a_0/p^2+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n'\sin(n\omega t-\alpha_n)+B_n'\cos(n\omega t-\alpha_n)],\end{aligned}\tag{2.1.47}$$

其中

$$A_n'=\frac{a_n/p^2}{\sqrt{[1-(n\omega/p)^2]^2+4\,\xi^2(n\omega/p)^2}},\tag{2.1.48}$$

$$B_n'=\frac{b_n/p^2}{\sqrt{[1-(n\omega/p)^2]^2+4\,\xi^2(n\omega/p)^2}},\tag{2.1.49}$$

$$\alpha_n=\mathrm{tg}^{-1}\frac{2\,\xi n\omega/p}{1-(n\omega/p)^2}.\tag{2.1.50}$$

我们再进一步讨论当广义激振力 $f(t)$ 为任意非周期函数时系统的反应。此时，运动方程为

$$\ddot{x}+2\,\xi p\dot{x}+p^2x=f(t).\tag{2.1.51}$$

如前所述，广义激振力 $f(t)$ 代表单位质量所受的外力或支座运动引起的单位质量的惯性力。在图 2.1.7 上的窄条可看成是力 $f(t)$ 在时间 τ 至 $\tau+d\tau$ 的间隔内所产生的冲量 $f(\tau)d\tau$，此冲量将使物体在 $t=\tau$ 的瞬时得到一个速度增量 $d\dot{x}=f(\tau)d\tau$，此速度增量像初始速度一样，使物体在大于 τ 的任一时刻 t 产生位移 dx。此位移可根据式（2.1.25）求得：

$$dx=e^{-\xi p(t-\tau)}\frac{d\dot{x}}{\sqrt{1-\xi^2}p}\sin p'(t-\tau).\tag{2.1.52}$$

在 $\tau=0$ 和 $\tau=t$ 之间，每一个冲量的连续作用产生的总位移等于式（2.1.52）的积分：

$$x=\frac{e^{-\xi pt}}{p'}\int_0^t e^{\xi p\tau}f(\tau)\sin p'(t-\tau)d\tau.\tag{2.1.53}$$

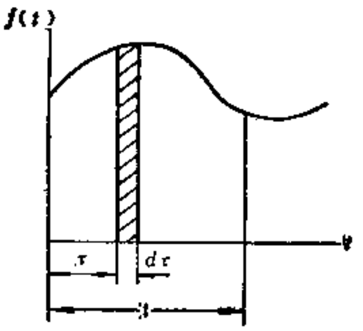


图 2.1.7

此积分一般称为杜哈曼（Duhamel）积分。

式（2.1.53）代表零初始条件下激振力在 0 至 t 间隔内所引起的总位移。如果考虑初始条件的影响，只要在式（2.1.53）上迭加自由振动的解式（2.1.25）即得全解：

$$x=e^{-\xi pt}\left[x_0\cos p't+\frac{\dot{x}_0+\xi x_0}{p'}\sin p't+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{p'}\int_0^t e^{\xi p\tau}f(\tau)\sin p'(t-\tau)d\tau\right].\tag{2.1.54}$$

如果忽略阻尼，式（2.1.53）可简化为

$$x=\frac{1}{p}\int_0^t f(\tau)\sin p(t-\tau)d\tau.\tag{2.1.55}$$

当系统受到的是外力 $F(t)$ 作用时，只要将上述公式中的 $f(t)$ 用 $F(t)/m$ 代替即可；当系统是由于支座运动引起振动时，将 $f(t)=-\ddot{x}_g(t)$ 代入上述公式，就得到系统相对于支座的相对位移解。

六、复频率反应和单位脉冲反应

下面我们简要介绍在求解单自由度系统强迫振动的稳态反应时经常使用的复变量方法。

为讨论方便起见，我们把广义激振力定义为：

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{F(t)}{m}\cdot\dfrac{1}{p^2}=\dfrac{F(t)}{k} & \text{受外力作用时；}\\[2ex] -\ddot{x}_g\cdot\dfrac{1}{p^2}=\dfrac{-m\ddot{x}_g}{k} & \text{支座运动时。}\end{cases}$$

此时广义激振力代表外力或支座惯性力作为静力作用于物体的力。因此，一般方程（2.1.5）变成

$$\ddot{x}+2\,\xi p\dot{x}+p^2x=p^2f.\tag{2.1.56}$$

只要将方程(2.1.5)的解乘以常数 p^2，就得到方程(2.1.56)的解。

（一）当系统受到的广义激振力为简谐函数

$$f_1(t)=a\cos(\omega t+\varphi) \tag{2.1.57}$$

或

$$f_2(t)=a\sin(\omega t+\varphi) \tag{2.1.58}$$

时，我们可以将它用一复变量指数函数

$$f(t)=Ae^{i\omega t} \tag{2.1.59}$$

来代替，其中复常数 $A=ae^{i\varphi}$，$i=\sqrt{-1}$。由欧拉公式知，$f(t)$ 的实部和虚部分别代表式(2.1.57)及(2.1.58)：

$$f(t)=Ae^{i\omega t}=a[\cos(\omega t+\varphi)+i\sin(\omega t+\varphi)]$$

在 $f(t)$作用下，运动方程为

$$\ddot{x}+2\zeta p\dot{x}+p^2x=p^2Ae^{i\omega t}. \tag{2.1.60}$$

此方程对应的齐次方程(2.1.18)的通解($\zeta<1$ 时)又可表示为

$$x=Be^{(-\zeta+i\sqrt{1-\zeta^2})pt}. \tag{2.1.61}$$

其中 B 是一个依赖于初始条件的复数积分常数。

我们设方程(2.1.60)的特解为

$$x=Ce^{i\omega t},$$

C 为待定常数，将其代入方程，消去 $e^{i\omega t}$，求得

$$C=\frac{A}{1-\left(\frac{\omega}{p}\right)^2+i\,2\,\zeta\frac{\omega}{p}}. \tag{2.1.62}$$

所以方程(2.1.60)的通解

$$x=Be^{(-\zeta+i\sqrt{1-\zeta^2})pt}+\frac{Ae^{i\omega t}}{1-\left(\frac{\omega}{p}\right)^2+i\,2\,\zeta\frac{\omega}{p}}. \tag{2.1.63}$$

当第一项自由振动很快消失后，就得到强迫振动的稳态反应

$$x(t)=\frac{f(t)}{1-\left(\frac{\omega}{p}\right)^2+i\,2\,\zeta\frac{\omega}{p}}. \tag{2.1.64}$$

我们称无量纲比值

$$H(\omega)=\frac{x(t)}{f(t)}=\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{p}\right)^2+i\,2\,\zeta\frac{\omega}{p}} \tag{2.1.65}$$

为复频率反应。它表征稳态反应与广义激振力之间的振幅及相位关系。

显然，当广义激振力是式(2.1.59)的实部（或虚部）时，其解即为式(2.1.64)的实部（或虚部）。

（二）当广义激振力 $f(t)$ 为任意函数时，并假定，在 $t<0$ 时位移 $x(t)=0$，而从 $t=0$ 起，系统受到如图 2.1.8 所示的 $f(t)$的作用。我们可以通过以下步骤，利用已知结果来求稳态反应解。先选取一个时间 $2T$，使它大于 $f(t)$ 的持续时间，然后制造一个周期函数

$f_T(t)$，使其在区间$-T<t<T$中与$f(t)$一致，在此区间外面，使周期$2T$重复出现。因为$f_T(t)$是周期函数，可将它展开为复变量的富氏级数，从而利用已知结果，求出$f_T(t)$的稳态反应$x_T(t)$。对$f(t)$而言，这是一个近似解。然而，当令$T\to\infty$时，就可得到精确解$x(t)$。这是因为当$T\to\infty$时，$f_T^{(t)}\to f^{(t)}$，从而有$\lim\limits_{T\to\infty} x_T(t)=x(t)$。

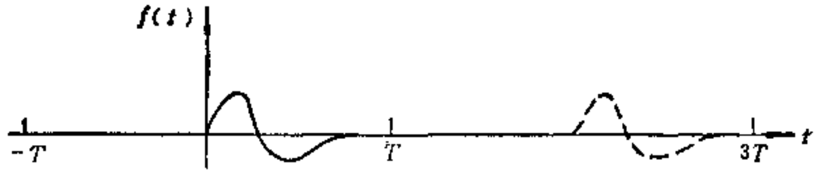


图 2.1.8

根据上面的叙述，现在将$f_T(t)$展为富氏(Fourier)级数：

$$f_T(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{im\omega_0 t}, \tag{2.1.66}$$

这里，$\omega_0=\frac{\pi}{T}$，而

$$C_m=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_T(t)e^{-im\omega_0 t}dt. \tag{2.1.67}$$

$f_T(t)$所引起的稳态反应可借助于叠加级数式(2.1.66)的每一项的稳态反应而得之。利用式(2.1.64)和(2.1.65)，可得

$$x_T(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m H_m(m\omega_0)e^{im\omega_0 t}, \tag{2.1.68}$$

其中复频率反应

$$H_m(m\omega_0)=\frac{1}{1-\left(\frac{m\omega_0}{p}\right)^2+i2\xi\frac{m\omega_0}{p}}. \tag{2.1.69}$$

令$m\omega_0=\omega_m$，$\Delta\omega=\omega_0$，则有$\Delta\omega=\frac{\pi}{T}$，所以，当$T\to\infty$时，$\Delta\omega\to 0$，$f_T(t)\to f(t)$。由式(2.1.67)可知

$$2TC_m=\int_{-T}^{T} f_T(t)e^{-i\omega_m t}dt.$$

两边取极限，并记极限为$F(\omega)$，令$\omega_m\to\omega$，则

$$F(\omega)=\lim_{T\to\infty}(2TC_m)=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} f_T(t)e^{-i\omega_m t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt. \tag{2.1.70}$$

又

$$f_T(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2TC_m e^{i\omega_m t}\cdot\frac{1}{2T}=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2TC_m e^{i\omega_m t}\Delta\omega,$$

令$T\to\infty$，则有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega. \tag{2.1.71}$$

对式(2.1.68)重复极限过程，我们得到$f(t)$的稳态解：

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)H(\omega)e^{i\omega t}d\omega. \tag{2.1.72}$$

式(2.1.70)与(2.1.71)是一对富氏积分变换。由式(2.1.70)所构造的函数 $F(\omega)$ 称为 $f(t)$ 的富氏变换，而式(2.1.71)则指出 $f(t)$ 如何通过它的变换来表示。

我们用 $X(\omega)$ 表示反应函数的富氏变换

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-i\omega t}dt, \tag{2.1.73}$$

则反应函数 $x(t)$ 可通过 $X(\omega)$ 来表示：

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{i\omega t}d\omega. \tag{2.1.74}$$

比较式(2.1.72)与(2.1.74)，显然有

$$X(\omega)=H(\omega)F(\omega). \tag{2.1.75}$$

式(2.1.75)说明：稳态反应的富氏变换等于激振量的富氏变换与频率反应的乘积。

（三）我们在上面论述中，曾用一系列脉冲代替连续函数 $f(t)$，然后叠加每一个脉冲产生的反应，而得到对应于 $f(t)$ 的反应；而单个脉冲的反应则是把单个脉冲产生的速度增量看作初始速度，利用自由振动的公式得到的。

现在我们引用符号 $h(t)$ 表示系统在 $t=0$ 时受到单位脉冲作用时产生的稳态反应，则相对于数值为 f_0T_0 的脉冲的反应可表为

$$\Delta x=f_0T_0h(t).$$

假如，不是在 $t=0$，而是在 $t=\tau$ 时刻作用了一个单位脉冲，则反应将是 $h(t-\tau)$。注意，当 $t<\tau$ 时，$h(t-\tau)=0$。如上所述，对应于 $f(t)$ 的连续作用时的反应可用积分表示，即

$$x(t)=\int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau. \tag{2.1.76}$$

比较式(2.1.72)与(2.1.76)是有意义的。前式是叠加简谐函数的稳态反应得出，后式是叠加自由振动解得出。对于确定的广义激振力 $f(t)$，它的反应的二个表达式应该是恒等的。为进行比较，最简单的方法是对一个单位脉冲函数 $\delta(t)$，应用富氏积分求解。为此，令 $f(t)=\delta(t)$，它的反应是 $h(t)$。同时，单位脉冲的富氏变换为

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-i\omega t}dt. \tag{2.1.77}$$

由 δ 函数性质，此积分值为 1，故

$$F(\omega)=1. \tag{2.1.78}$$

根据式(2.1.72)，$\delta(t)$ 的反应函数

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)H(\omega)e^{i\omega t}d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \tag{2.1.79}$$

此式表明，系统的复频率反应正好就是单位脉冲反应的富氏变换[1]。因而

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-i\omega t}dt. \tag{2.1.80}$$

故单位脉冲的反应函数与复频率反应也是一对富氏积分变换。

第二节　多自由度系统的振动

一、振动方程的矩阵表示

在前一节中我们讨论了单自由度系统的自由振动与强迫振动。对于很多简单的振动问题都可以简化为单自由度系统，但对于较复杂的结构系统，则需要二个以上的独立参数才能确定该结构的振动状态。

我们知道，单自由度系统的运动方程是一个二阶常系数线性微分方程，而 n 个自由度系统的运动方程是 n 个二阶常系数线性微分方程组。为便于运算，我们采用矩阵表示法。n 个自由度系统的振动方程的矩阵表示为

$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{F\}, \tag{2.2.1}$$

其中$\{x\}$、$\{\ddot{x}\}$、$\{F\}$为 n 维列向量

$$\{x\}=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{Bmatrix},\qquad \{\ddot{x}\}=\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\\ddot{x}_2\\\vdots\\\ddot{x}_n\end{Bmatrix},\qquad \{F\}=\begin{Bmatrix}F_1\\F_2\\\vdots\\F_n\end{Bmatrix} \tag{2.2.2}$$

x_i,$\ddot{x}_i$ 分别代表第 i 个质量的位移与加速度，且 $\ddot{x}_i=\dfrac{d^2x_i}{dt^2}$。$F_i$ 表示作用在第 i 个质量上的外力。$[M]$和$[K]$都是 $n\times n$ 阶矩阵，$[M]$称为质量矩阵，一般情形为满矩阵，在某些情形下为对角矩阵。

$$[M]=\begin{bmatrix}M_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & M_{22} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & M_{33} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & M_{nn}\end{bmatrix}$$

$[K]$称为刚度矩阵，一般形式为

$$[K]=\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdots & K_{1n}\\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \cdots & K_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ K_{n1} & K_{n2} & K_{n3} & \cdots & K_{nn}\end{bmatrix}.$$

其元素 K_{ij} 有明显的物理意义，即它代表由于第 j 个质量产生单位位移而在第 i 个质量上引起的弹性恢复力。由于我们只讨论弹性系统的微小振动，因而刚度矩阵$[K]$是对称正定矩阵，这个性质对于今后的运算将带来很大的方便。

二、无阻尼系统的固有频率和振型

在方程(2.2.1)中，令$\{F\}=\{0\}$，即得无阻尼自由振动方程

$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{0\}, \tag{2.2.3}$$

其中$\{0\}$表示 n 维以 0 为元素的列向量。令

$$\{x\}=\{\varphi\}\sin(\omega t+\alpha), \tag{2.2.4}$$

这里$\{\varphi\}$为 n 维振幅向量。将此式代入方程(2.2.3)，消去 $\sin(\omega t+\alpha)$，即得

$$([K]-\omega^2[M])\{\varphi\}=\{0\}. \tag{2.2.5}$$

由线性代数理论知，要使式(2.2.5)有非零解，必须

$$|[K]-\omega^2[M]|=0. \tag{2.2.6}$$

由式(2.2.6)可以求解出 n 个根 $\omega_i^2(i=1, 2, \cdots, n)$，这 n 个根称为特征值。对于我们所讨论的线性弹性系统，固有频率都是正实数。我们将这 n 个特征值按照由小到大的顺序排列：

$$\omega_1^2\leqslant\omega_2^2\leqslant\omega_3^2\cdots\leqslant\omega_n^2.$$

ω_i 称为系统的第 i 个固有频率。

如果固有频率已经求出，则将某个固有频率如 ω_i 代入方程 (2.2.5)，即可求得与 ω_i^2 对应的振幅向量$\{\varphi_i\}$，$\{\varphi_i\}$称为第 i 振型向量

$$\{\varphi_i\}=\begin{Bmatrix}\varphi_{1i}\\ \varphi_{2i}\\ \cdots\\ \varphi_{ni}\end{Bmatrix}. \tag{2.2.7}$$

因为方程(2.2.5)的系数矩阵的行列式为 0，所以 n 个方程中，只有 $n-1$ 个方程是独立的。因此振型分量中有一个分量可任意给定，而其余 $n-1$ 个分量可借求解 $n-1$ 个独立方程给出。这就是说，振型只给出各个位移的相对值。对应于 n 个固有频率可得到 n 个振型。

由以上推导可知，每个多自由度系统可能出现，也只能出现 n 种振动型式，每种振动型式都有相应的振动频率。这 n 个固有频率和 n 个振型由系统本身特性唯一确定，即它们是系统的固有特性。

为研究各振型之间的关系，我们考虑第 i 个和第 j 个振型，它们对应的固有频率为 ω_i、ω_j。由振型的定义知，它们都满足方程(2.2.5)：

$$[K]\{\varphi_i\}=\omega_i^2[M]\{\varphi_i\}, \tag{2.2.8}$$

$$[K]\{\varphi_j\}=\omega_j^2[M]\{\varphi_j\}. \tag{2.2.9}$$

用$\{\varphi_j\}^T$ 左乘式(2.2.8)并用$\{\varphi_i\}^T$左乘式(2.2.9)，得

$$\{\varphi_j\}^T[K]\{\varphi_i\}=\omega_i^2\{\varphi_j\}^T[M]\{\varphi_i\}, \tag{2.2.10}$$

$$\{\varphi_i\}^T[K]\{\varphi_j\}=\omega_j^2\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_j\}, \tag{2.2.11}$$

其中$\{\varphi_i\}^T$，$\{\varphi_j\}^T$ 表示向量的转置，即由列向量变为行向量。由矩阵及向量的运算法则知，

$$\{\varphi_j\}^T[K]\{\varphi_i\}=\{\varphi_i\}^T[K]\{\varphi_j\},$$

$$\{\varphi_j\}^T[M]\{\varphi_i\}=\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_j\},$$

故将式(2.2.10)与(2.2.11)相减后有

$$(\omega_i^2-\omega_j^2)\{\varphi_j\}^T[M]\{\varphi_i\}=0. \tag{2.2.12}$$

又用 ω_i^2，ω_j^2 分别除以式(2.2.10)及(2.2.11)，再相减即得

$$\left(\frac{1}{\omega_i^2}-\frac{1}{\omega_j^2}\right)\{\varphi_j\}^T[K]\{\varphi_i\}=0. \tag{2.2.13}$$

当 $i\neq j$，即 $\omega_i^2\neq\omega_j^2$ 时，必有下列关系：

$$\{\varphi_j\}^T[M]\{\varphi_i\}=\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_j\}=0, \tag{2.2.14}$$

$$\{\varphi_j\}^T[K]\{\varphi_i\}=\{\varphi_i\}^T[K]\{\varphi_j\}=0. \tag{2.2.15}$$

关系式(2.2.14)和(2.2.15)对任何二个不同的振型都是成立的。振型的这种特性称为振型的正交性，即振型对$[M]$和$[K]$都是正交的。振型具有正交性对我们今后求解多自由度系统的

振动问题有很大的意义。从下面的讨论中可以看到，利用振型的正交性，可将求解 n 个联立微分方程组的问题转化为求解 n 个彼此无关的单自由度的振动微分方程问题，从而简化了计算工作。

当 $i=j$ 时，令

$$\left.\begin{array}{l}\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_i\}=M_i,\\ \{\varphi_i\}^T[K]\{\varphi_i\}=K_i,\end{array}\right\}(i=1,\cdots,n) \tag{2.2.16}$$

M_i 及 K_i 为常数。由式(2.2.11)和(2.2.16)知

$$K_i=\omega_i^2M_i \quad (i=1,\cdots,n) \tag{2.2.17}$$

展开$\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_i\}$得

$$M_i=\sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\varphi_{li}M_{lm}\varphi_{mi}. \tag{2.2.18}$$

当$[M]$为对角矩阵时，$M_{lm}=0(l\neq m)$，所以式(2.2.18)变为

$$M_i=\sum_{m=1}^{n}M_{mm}\varphi_{mi}^2. \tag{2.2.19}$$

为运算方便起见，我们将 n 个振型向量按列排列成矩阵形式：

$$[\Phi]=[\{\varphi_1\}\{\varphi_2\}\cdots\{\varphi_n\}]=\begin{bmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \cdots & \varphi_{1n}\\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \cdots & \varphi_{2n}\\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} & \cdots & \varphi_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \varphi_{n3} & \cdots & \varphi_{nn}\end{bmatrix}. \tag{2.2.20}$$

$[\Phi]$称为模态矩阵，$[\Phi]^T$ 表示$[\Phi]$的转置矩阵：

$$[\Phi]^T=\begin{bmatrix}\{\varphi_1\}^T\\ \{\varphi_2\}^T\\ \{\varphi_3\}^T\\ \cdots\\ \{\varphi_n\}^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{21} & \varphi_{31} & \cdots & \varphi_{n1}\\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & \varphi_{32} & \cdots & \varphi_{n2}\\ \varphi_{13} & \varphi_{23} & \varphi_{33} & \cdots & \varphi_{n3}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{1n} & \varphi_{2n} & \varphi_{3n} & \cdots & \varphi_{nn}\end{bmatrix}. \tag{2.2.21}$$

利用振型的正交性，有

$$[\Phi]^T[M][\Phi]=\begin{bmatrix}M_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & M_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & M_n\end{bmatrix}.$$

令上式右边矩阵为$[M_\omega]$，则

$$[\Phi]^T[M][\Phi]=[M_\omega]. \tag{2.2.22}$$

同理可得

$$[\Phi]^T[K][\Phi]=[K_\omega], \tag{2.2.23}$$

其中

$$[K_\omega]=\begin{bmatrix} K_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_n \end{bmatrix}.$$

式(2.2.22)、(2.2.23)表明，利用模态矩阵，可使$[M]$和$[K]$对角化。$[M_\omega]$和$[K_\omega]$分别称为主质量矩阵和主刚度矩阵。我们将式(2.2.9)中的$\{\varphi_i\}$扩展为$[\Phi]$，则有

$$[K][\Phi]=[M][\Phi][\omega^2]. \tag{2.2.24}$$

其中 $[\omega^2]$是以ω_i^2为对角元素的对角矩阵，称为特征值矩阵。用$[\Phi]^T$左乘式(2.2.24)，我们得到主刚度矩阵与主质量矩阵之间的关系：

$$[K_\omega]=[M_\omega][\omega^2]. \tag{2.2.25}$$

以后我们将要用到$[\Phi]$的逆矩阵$[\Phi]^{-1}$，为避免直接求逆，我们用$[\Phi]^{-1}$右乘式(2.2.22)，再用$[M_\omega]^{-1}$左乘，即得

$$[\Phi]^{-1}=[M_\omega]^{-1}[\Phi]^T[M]. \tag{2.2.26}$$

这样，求$[\Phi]^{-1}$归结为求$[M_\omega]^{-1}$，因为$[M_\omega]$是对角矩阵，其逆很容易求得：

$$[M_\omega]^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{M_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{M_n} \end{bmatrix}. \tag{2.2.27}$$

三、无阻尼自由振动

无阻尼自由振动问题归结为求方程

$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{0\} \tag{2.2.28}$$

满足初始条件$\{x(0)\}=\{x_0\}$，$\{\dot{x}(0)\}=\{\dot{x}_0\}$的解。这里$\{x_0\}$与$\{\dot{x}_0\}$分别为各质量的初始位移与初始速度组成的列向量：

$$\{x_0\}=\begin{Bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \cdots \\ x_{0n} \end{Bmatrix}, \qquad \{\dot{x}_0\}=\begin{Bmatrix} \dot{x}_{01} \\ \dot{x}_{02} \\ \cdots \\ \dot{x}_{0n} \end{Bmatrix}. \tag{2.2.29}$$

为利用振型的正交性，我们将未知位移向量按振型展开，即令

$$\{x\}=[\Phi]\{q_\omega\}, \tag{2.2.30}$$

$\{q_\omega\}$可以看成是以振型向量为座标系的位移座标，故称$\{q_\omega\}$为广义位移向量（简称广义座标），$\{\ddot{q}_\omega\}$称为广义加速度向量。

$$\{\ddot{x}\}=[\Phi]\{\ddot{q}_\omega\}. \tag{2.2.31}$$

将式(2.2.30)、(2.2.31)代入式(2.2.28)中，得

$$[M][\Phi]\{\ddot{q}_\omega\}+[K][\Phi]\{q_\omega\}=\{0\}.$$

将上式左乘$[\Phi]^T$，利用式(2.2.22)与(2.2.23)，方程变为

$$[M_\omega]\{\ddot{q}_\omega\}+[K_\omega]\{q_\omega\}=\{0\}. \tag{2.2.32}$$

由于$[M_\omega]$，$[K_\omega]$均为对角矩阵，展开后得n个方程

$$M_i\ddot{q}_i+K_iq_i=0,\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

利用式(2.2.17)，上式变为

$$\ddot{q}_i+\omega_i^2q_i=0.\qquad (i=1,2,\cdots,n)\tag{2.2.33}$$

这样问题就归结为求解n个互相独立的二阶微分方程，每个方程都相当于一个单自由度问题，它们的解可根据上节的方法求出。我们把$\{x\}$的初始条件转化为$\{q_\omega\}$的初始条件。记$\{q_\omega(0)\}=\{q_{0\omega}\}$

$$\{q_{0\omega}\}=\begin{Bmatrix}q_{01}\\q_{02}\\\cdots\\q_{0n}\end{Bmatrix}.\tag{2.2.34}$$

在式(2.2.31)中，令$t=0$，得$\{x_0\}=[\Phi]\{q_{0\omega}\}$，所以

$$\{q_{0\omega}\}=[\Phi]^{-1}\{x_0\}=[M_p]^{-1}[\Phi]^T[M]\{x_0\},\tag{2.2.35}$$

$$\{\dot{q}_{0\omega}\}=[\Phi]^{-1}\{\dot{x}_0\}=[M_p]^{-1}[\Phi]^T[M]\{\dot{x}_0\}.\tag{2.2.36}$$

方程组(2.2.33)，在初始条件式(2.2.35)与(2.2.36)下的解即为

$$q_i=q_{0i}\cos\omega_it+\frac{\dot{q}_{0i}}{\omega_i}\sin\omega_it.\tag{2.2.37}$$

为得到原来的位移，可利用式(2.2.30)，其展开式为

$$x_j=\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ji}q_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ji}\left(q_{0i}\cos\omega_it+\frac{\dot{q}_{0i}}{\omega_i}\sin\omega_it\right).\tag{2.2.38}$$

四、无阻尼系统的强迫振动

当无阻尼多自由度系统各质点受外加激振力作用时，运动方程可表为

$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{F\}.\tag{2.2.39}$$

式中$\{F\}$代表激振力向量

$$\{F\}=\begin{Bmatrix}F_1(t)\\F_2(t)\\\cdots\\F_n(t)\end{Bmatrix}\tag{2.2.40}$$

$F_i(t)$为作用在第i个质量上的外力。假定对应的齐次方程的特征值及振型向量均已求出。同样利用式(2.2.30)，将$\{x\}$按振型展开，并代入方程

$$[M][\Phi]\{\ddot{q}_\omega\}+[K][\Phi]\{q_\omega\}=\{F\},$$

用$[\Phi]^T$左乘上式，即得

$$[M_\omega]\{\ddot{q}_\omega\}+[M_\omega][\omega^2]\{q_\omega\}=[\Phi]^T\{F\}.$$

于是

$$\{\ddot{q}_\omega\}+[\omega^2]\{q_\omega\}=[M_\omega]^{-1}[\Phi]^T\{F\}.\tag{2.2.41}$$

令

$$\{F_\omega\}=[M_\omega]^{-1}[\Phi]^T\{F\},\tag{2.2.42}$$

式(2.2.41)变成

$$\{\ddot{q}_\omega\}+[\omega^2]\{q_\omega\}=\{F_\omega\}.\tag{2.2.43}$$

这样我们将互相耦联的方程组变成 n 个独立的方程，其中第 i 个方程为

$$\ddot{q}_i+\omega_i^2q_i=F_{\omega i},\ (i=1,2,\cdots,n)\tag{2.2.44}$$

此方程与单自由度系统相同，可直接引用上一节的结果，求出$\{q_\omega\}$，进而利用式(2.2.30)求得$\{x\}$.

当$\{F(t)\}$的各分量均与正弦函数成比例变化，即

$$\{F(t)\}=\begin{Bmatrix}f_1\\f_2\\\cdots\\f_n\end{Bmatrix}\sin\omega t\tag{2.2.45}$$

其中 f_i 为常数。此时由式(2.2.42)可求得

$$F_{\omega i}=f_{\omega i}\sin\omega t,\tag{2.2.46}$$

式中

$$f_{\omega i}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\varphi_{ki}f_k}{M_{\omega i}}.\tag{2.2.47}$$

因此，由前节所得结果，可得

$$q_i=\frac{f_{\omega i}}{\omega_i^2-\omega^2}\sin\omega t\tag{2.2.48}$$

以上结果可以类似地推广到$\{F(t)\}$的各分量与一个一般的周期函数 $f(t)$成比例变化的情形,只要将 $f(t)$按富氏级数展开，然后逐项利用上述结果，最后进行叠加即可。

对于$\{F(t)\}$为任意函数向量情形，式(2.2.44)的解可由杜哈曼积分给出：

$$q_i=\frac{1}{\omega_i}\int_0^t F_{\omega i}(\tau)\sin\omega_i(t-\tau)d\tau.\tag{2.2.49}$$

$$(i=1,\ 2,\cdots,n)$$

现在我们讨论一下系统对地震作用的反应。设地震加速度为 $\ddot{x}_g(t)$。仍用$\{x\}$表示相对位移向量，则绝对加速度为

$$\{\ddot{x}_a\}=\{\ddot{x}\}+\{I\}\ddot{x}_g(t),$$

式中$\{I\}$为 n 维单位列向量。此时运动方程可表为

$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=-[M]\{I\}\ddot{x}_g(t).\tag{2.2.50}$$

比较方程(2.2.39)与(2.2.50)，可见$-[M]\{I\}\ddot{x}_g(t)$相当于外力$\{F\}$。因而利用同样步骤，可得

$$\{\ddot{q}_\omega\}+[\omega^2]\{q_\omega\}=-\{\eta_\omega\}\ddot{x}_g,\tag{2.2.51}$$

而

$$\{\eta_\omega\}=[M_\omega]^{-1}[\Phi]^T[M][I].\tag{2.2.52}$$

在上式右边的$[M]$和$[I]$之间乘以单位矩阵$[\Phi][\Phi]^{-1}$则有

$$\{\eta_\omega\}=[M_\omega]^{-1}[M_\omega][\Phi]^{-1}[I]=[\Phi]^{-1}\{I\}.$$

所以

$$\{I\}=[\Phi]\{\eta_\omega\}.$$

上式表明，$\{\eta_\omega\}$就是$\{I\}$按振型展开时的广义坐标，在地震工程中通常称为振型参与系数。

方程组（2.2.51）中各个方程之间都是互相独立的，其中第 i 个方程为

$$\ddot{q}_i+\omega_i^2 q_i=-\eta_i \ddot{x}_g, \qquad (2.2.53)$$

$$(i=1,\ 2,\cdots,n)$$

它们的解由杜哈曼积分给出：

$$\ddot{q}_i=\frac{-\eta_i}{\omega_i}\int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\sin\omega_i(t-\tau)d\tau. \qquad (2.2.54)$$

求得了$\{q_\omega\}$，则将$\{q_\omega\}$代入式（2.2.30），就可得到相对位移$\{x\}$。

五、多自由度系统的阻尼振动

现在讨论具有阻尼的多自由度系统。和单自由度系统一样，只讨论系统具有粘滞阻尼的情形。由于多自由度系统中每一个质量的速度除了对该质量引起阻尼力外，对其它质量也可能引起阻尼力。因此，在有阻尼系统的运动方程

$$[\mathrm{M}]\{\ddot{x}\}+[\mathrm{C}]\{\dot{x}\}+[\mathrm{K}]\{x\}=\{\mathrm{F}\} \qquad (2.2.55)$$

中，阻尼矩阵[C]，一般是满矩阵。[C]中的元素 C_{ij} 代表因第 j 个质量的单位速度引起的作用在第 i 个质量上的阻尼力，并有 $C_{ij}=C_{ji}$。

方程（2.2.55）也可以用振型分解的方法来求解。这就需要先求出有阻尼系统的固有振型和频率，但振型一般是复数，且振型之间存在着相位差，而使分析工作复杂化。因此，通常仍按无阻尼系统展开。可是，无阻尼振型一般说来对矩阵[C]是不正交的，因而达不到使广义位移彼此独立的目的。但是在下列两种情况下仍然是可行的。

如果[C]与[K]、[M]成线性关系，即

$$[\mathrm{C}]=\alpha[\mathrm{M}]+\beta[\mathrm{K}]. \qquad (2.2.56)$$

其中 α、β 为常数，这种形式的阻尼称为比例阻尼。在这种假定下，将式（2.2.30）代入方程(2.2.55) 并左乘$[\Phi]^T$，则得

$$[M_\omega]\{\ddot{q}_\omega\}+[C_\omega]\{\dot{q}_\omega\}+[M_\omega][\omega^2]\{q_\omega\}=[M_\omega]\{F_\omega\},$$

其中

$$[C_\omega]=[\Phi]^T[\mathrm{C}][\Phi]=\alpha[M_\omega]+\beta[K_\omega]=\alpha[M_\omega]+\beta[M_\omega][\omega^2]$$

称为主阻尼矩阵。显然，$[C_\omega]$是对角矩阵

$$[C_\omega]=\begin{bmatrix} C_1 & 0\cdots 0 \\ 0 & C_2\cdots 0 \\ \cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0\cdots C_n \end{bmatrix},$$

其对角线上的元素为

$$C_i=\alpha M_i+\beta K_i=(\alpha+\beta\omega_i^2)M_i, \qquad (2.2.57)$$

于是，方程（2.2.56）可写成

$$\{\ddot{q}_\omega\}+(\alpha[I]+\beta[\omega^2])\{\dot{q}_\omega\}+[\omega^2][q_\omega]=\{F_\omega\}, \qquad (2.2.58)$$

其中第 i 个方程为

$$\ddot{q}_i+(\alpha+\beta\omega_i^2)\dot{q}_i+\omega_i^2 q_i=F_{\omega i}. \qquad (2.2.59)$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

令

$$\xi_i = \frac{1}{2}\left(\beta\omega_i + \frac{\alpha}{\omega_i}\right),$$

则有

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = F_{\omega i}. \qquad (2.2.60)$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

另一种情形是直接假定无阻尼振型对[C]也是正交的，即假定

$$\{\phi_i\}^T[C]\{\phi_j\}=0, \quad (i\neq j)$$

同时令

$$C_i=\{\phi_i\}^T[C]\{\phi_i\}=2M_i\xi_i\omega_i,$$

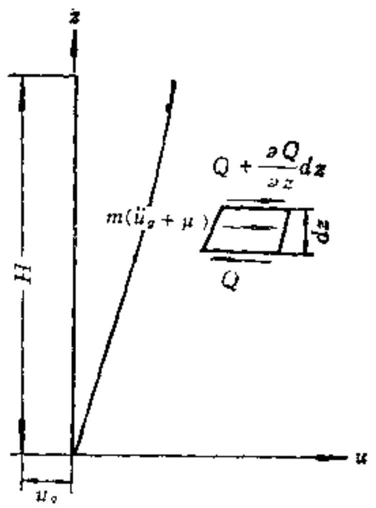
这种假定相当于认为矩阵$[C_\omega]=[\Phi]^T[C][\Phi]$中所有非对角线项与对角线元素相比很小，可以忽略不计。

这样，经过类似的推导，同样得到方程组（2.2.60），不同之处在于ξ_i的取值不同。这种假定下的阻尼称为模态阻尼。阻尼比ξ_i一般由实验确定。

如上所述，具有比例阻尼或模态阻尼的多自由度系统的振动问题，归结为求解n个彼此独立的方程（2.2.60）。因此，多自由度系统的各种阻尼振动问题，如自由振动、强迫振动等都可以按照第一节所述方法来求解。求得振型坐标$\{x_\omega\}$后，再按式（2.2.30）进行叠加，即可得到问题的最终解。

第三节　连续体系的振动

在第一和第二节中，我们较详细地介绍了聚质点体系的振动分析。但在实际的振动分析中，除了把结构简化为多质点系以外，常常还使用简单的梁式模型，最常见的就是把结构简化为悬臂梁。当采用这种模型时，常能得到问题的解析解。这样能更简便地算出结构的自振频率、振型和地震荷载。由于以下各章从计算模型来说主要将讨论悬臂梁体系，因此，有必要对悬臂剪切、弯曲梁的基本振动理论作一些介绍。



a

图 2.3.1 (a)

一、剪切悬臂梁的振动

剪切悬臂梁的振动方程为（图 2.3.1）：

$$\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - m\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u_g}{\partial t^2}\right)=0. \qquad (2.3.1)$$

式中 $\mu=\frac{GF}{k}$，$m=\frac{\rho F}{g}$；G为结构材料的剪切模量；k为剪切断面系数；F为梁的横截面；ρ为材料的容重；g为重力加速度。

由于 u 是位置 z 和时间 t 的函数，故上式是一个偏微分方程。与多质点系的情形一样，我们先来研究它的自由振动，这时式（2.3.1）可以改变为

$$\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0. \tag{2.3.2}$$

假定式（2.3.2）具有如下形式的解：

$$u=X(u)\sin\omega t, \tag{2.3.3}$$

即假定剪切梁按振形 $X(u)$ 作简谐振动，将式（2.3.3）代入式（2.3.2），并消去 $\sin\omega t$ 后，就得到方程

$$\frac{d^2X}{dz^2}+\frac{\omega^2}{a^2}X=0, \tag{2.3.4}$$

式中

$$a^2=\frac{\mu}{m}.$$

式（2.3.4)的一般解为

$$X=A\cos\frac{\omega}{a}z+B\sin\frac{\omega}{a}z. \tag{2.3.5}$$

常数 A 和 B 可以按如下边界条件确定：

$$z=0\text{时，}u=0. \tag{1}$$

$$z=H\text{时，剪力 }Q=\mu\frac{dX}{dz}=0. \tag{2}$$

由边界条件（1）可得 $A=0$，由边界条件（2）可得

$$B\cos\frac{\omega}{a}H=0.$$

为了使上式成立，并且又要满足非零解的条件，则应使

$$\cos\frac{\omega}{a}H=0.$$

这就是所要求的频率方程。不难看出，当

$$\frac{\omega}{a}H=\frac{(2j-1)}{2}\pi \quad (j=1,\ 2,\ \cdots)$$

时，频率方程得到满足。故剪切梁的频率方程为

$$\omega_j=\frac{(2j-1)\pi a}{2H}=\frac{(2j-1)\pi}{2H}\sqrt{\frac{\mu}{m}} \quad (j=1,\ 2,\ \cdots), \tag{2.3.6}$$

相应的自振周期为

$$T_j=\frac{4H}{(2j-1)}\sqrt{\frac{m}{\mu}} \quad (j=1,\ 2,\ \cdots). \tag{2.3.7}$$

顺便指出，式中 $a=\sqrt{\frac{\mu}{m}}$ 是具有明确的物理意义的，它就是剪切波的传播速度。将式(2.3.6)代入式（2.3.5），即得振型

$$X_j(z)=\sin\frac{(2j-1)\pi}{2H}z \quad (j=1,\ 2,\cdots). \tag{2.3.8}$$

不难证明，在连续体系中振型也具有正交性，只不过应将式（2.2.12）中的和改为积分形式。事实上，我们假定体系 $X_j(z)$ 和 $X_k(z)$ 作自由振动，它们分别相应于惯性荷载 $\omega_j^2 m X_j(z)$ 与 $\omega_k^2 m X_k(z)$ 作用下的变形。根据功的互等原理有

$$\omega_j^2 \int mX_j(z)X_k(z)dz = \omega_k^2 \int mX_k(z)X_j(z)dz.$$

经整理后可得

$$(\omega_j^2 - \omega_k^2)\int mX_j(z)X_k(z)dz = 0.$$

由于 $\omega_j^2 \neq \omega_k^2$，所以求得连续体系两个不同振型间的正交条件为

$$\int mX_j(z)X_k(z)dz = 0. \tag{2.3.9}$$

当质量均布时，上式也可写为

$$\int X_k X_j dz = 0. \tag{2.3.10}$$

根据正交条件，我们也可按上一节方法，把地震波的干扰沿高度的分布按振型分解为无穷级数，设

$$1 = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j X_j(z), \tag{2.3.11}$$

应用正交条件（2.3.10）式，我们不难求出振型参与系数为

$$\eta_j = \frac{\int_0^H mX_j(z)dz}{\int_0^H mX_j^2(z)dz}. \tag{2.3.12}$$

现在我们再将相对位移的地震反应 $u(z)$ 按振型分解为无穷级数

$$u = (z,t) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j(t)X_j(z). \tag{2.3.13}$$

将式(2.3.11)与(2.3.13)代入方程(2.3.1)，得到

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu q_j \ddot{X}_j - \sum_{j=1}^{\infty} m\ddot{q}_j X_j - \ddot{u}_g \sum_{j=1}^{\infty} m\eta_j X_j = 0.$$

注意到式(2.3.4)，上式可改写为

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\mu \frac{\omega_j^2}{a^2} q_j + m\ddot{q}_j + m\eta_j \ddot{u}_g\right)X_j = 0$$

将上式两边乘以 X_k 并在全高上积分，即得

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j + \eta_j \ddot{u}_g)\int_0^H m_j X_j X_k dz = 0.$$

根据正交条件式(2.3.9)，上式可简化为无穷多个独立的微分方程

$$\ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j = -\eta_j \ddot{u}_g. \tag{2.3.14}$$

这个公式和式(2.2.53)是一致的。当考虑阻尼的影响时，只需将上式改为如下形式：

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{q}_j + \omega_j^2 q_j = -\eta_j \ddot{u}_g.$$

$$(j=1,\ 2,\cdots) \tag{2.3.15}$$

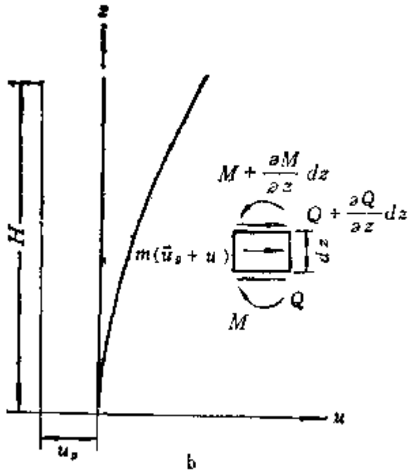


图 2.3.1(b)

这个公式和式(2.2.60)在形式上也是相同的。

由此看来，连续体系与多质点系的差别只是连续体的频率 ω_j 有无穷多个。因此，关于多质点系地震反应的一般公式，对于分布质量系也是适用的。只需要用相应的振型参与系数式(2.3.12)就可以了。

二、弯曲梁的振动

上一小节我们介绍了剪切悬臂梁结构的自由振动和地震反应分析。事实上，在工程实践中经常还会遇到以弯曲变形为主的所谓弯曲梁体系（图 2.3.1(b)）。对于刚度和质量均匀分布的弯曲梁，其振动微分方程为

$$EI\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}+m\frac{\partial^2(u+u_g)}{\partial t^2}=0. \tag{2.3.16}$$

式中 EI 是弯曲刚度，$m=\frac{\rho E}{g}$ 为单位长度的质量密度。

式(2.3.16)就是等截面弯曲梁在地震作用下的运动方程。上面，我们详细讨论了如何从求解结构自由振动入手，来求出结构的地震反应。事实上，自由振动一经解决，则地震反应将迎刃而解，因此，解题的中心任务是自振特性的求解。这是振型分解法的最大特点。据上述原因，在这小节里，我们只准备介绍弯曲梁自振问题的求解(所采用坐标系同前)，而地震反应的求解可仿剪切梁方法处理。

令式(2.3.16)中的 $\ddot{u}_g(t)=0$，我们就得到自由振动方程为

$$EI\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}+m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0. \tag{2.3.17}$$

下面，我们来求出它的自振频率和振型。设体系按自振频率 ω 而振动，则有

$$u=X(z)\sin\omega t. \tag{2.3.18}$$

式中 $X(z)$ 是座标 z 的函数，也就是通常所说的振型函数。将式(2.3.18)代入式(2.3.17)，消去时间因子 $\sin\omega t$ 后得到

$$\frac{d^4X}{dz^4}-\frac{\omega^2}{b^4}X=0. \tag{2.3.19}$$

式中 $b^4=\frac{EI}{m}$. 不难证明，式(2.3.19)的一般解可以写为如下形式：

$$X(z)=A_1\cos\frac{\sqrt{\omega}}{b}z+A_2\sin\frac{\sqrt{\omega}}{b}z+A_3\cosh\frac{\sqrt{\omega}}{b}z+A_4\sinh\frac{\sqrt{\omega}}{b}z. \tag{2.3.20}$$

其中常数 A_1，A_2，A_3 与 A_4 可由梁的端部条件确定。对于上端自由下端固定的悬臂梁，其边界条件为：

1) 当 $z=0$ 时，

2) 当 $z=H$ 时，

$$\left.\begin{aligned}&X(0)-\frac{dX(0)}{dz}=0;\\&\frac{d^2X(H)}{dz^2}=\frac{d^3X(H)}{dz^3}=0.\end{aligned}\right\}\tag{2.3.21}$$

将式(2.3.20)代入边界条件 1) 后，我们得到 $A_3=-A_1$，$A_4=-A_2$。这样，式(2.3.20)可以简化为

$$X(z)=A_1\left(\cos\frac{\sqrt{\omega}}{b}z-\cosh\frac{\sqrt{\omega}}{b}z\right)+A_2\left(\sin\frac{\sqrt{\omega}}{b}H+\sinh\frac{\sqrt{\omega}}{b}H\right).\tag{2.3.22}$$

再利用边界条件 2)，我们可得

$$\left.\begin{aligned}&\left(\cos\frac{\sqrt{\omega}}{b}H+\cosh\frac{\sqrt{\omega}}{b}H\right)A_1+\left(\sin\frac{\sqrt{\omega}}{b}H+\sinh\frac{\sqrt{\omega}}{b}H\right)A_2=0,\\&\left(\sin\frac{\sqrt{\omega}}{b}H-\sinh\frac{\sqrt{\omega}}{b}H\right)A_1-\left(\cos\frac{\sqrt{\omega}}{b}H+\cosh\frac{\sqrt{\omega}}{b}H\right)A_2=0.\end{aligned}\right\}\tag{2.3.23}$$

为了得到非零解，则式(2.3.23)的系数行列式必须等于零，即

$$\left(\cos\frac{\sqrt{\omega}}{b}+\cosh\frac{\sqrt{\omega}}{b}H\right)^2+\sin\frac{\sqrt{\omega}}{b}H-\sinh\frac{\sqrt{\omega}}{b}H=0.$$

化简后，即得出频率方程为

$$1+\cosh\frac{\sqrt{\omega}}{b}H\cos\frac{\sqrt{\omega}}{b}H=0.\tag{2.3.24}$$

这是一个超越方程，若令 $\frac{\sqrt{\omega}}{b}=K$，则前三个 K_nH 值为 1.8751，4.6940，7.8547。故

$$\omega=K_n^2\sqrt{\frac{EI}{m}}.\tag{2.3.25}$$

A_1 和 A_2 的比值可以从式(2.3.23)中任一个解出。例如从后一式中我们得到

$$A_1=\frac{\cos KH+\cosh KH}{\sin KH-\sinh KH}A_2,$$

把它代入式(2.3.21)后，我们得到一端固定，一端自由的弯曲梁的振型为

$$X(z)=A_2\left[\sin Kz-\sinh Kz+\frac{\cos KH+\cosh KH}{\sin KH-\sinh KH}(\cos Kz-\cosh Kz)\right].\tag{2.3.26}$$

将自振频率 ω_1，ω_2，$\cdots$ 代入后，就可以求得相应的振型 $X_1(z)$，$X_2(z)$，$\cdots$。振型一经求得，地震反应的求解已十分简便，其振型参与系数和式(2.3.12)类同。

第四节　地震力计算的基础知识

在前面的几节中，我们已经介绍了振动理论的基本概念。并且对于地震力的计算理论也已作了扼要的陈述。但是，必须指出，在实际的地震力计算中并没有完全按上述理论计算。

一方面这是由于实际强震记录资料的缺乏；另一方面，也考虑到目前要能正确地预报某时某地会发生某种类型的地震还是相当难的事。所以单纯从理论途径来推求地震反应往往不易为人们所信服。从保证结构物的安全性来说也并不一定可靠。因此，传统设计中的地震力计算，往往还要作进一步的归纳和简化，要应用设计反应谱的概念。下面，我们将对此作简要介绍。

一、地震反应的一般解答

在第一节里我们已经介绍了杜哈曼积分式(2.1.53)。这个公式不仅对于单质点系，实际上也是为多质点系和连续体系的地震反应计算奠定了基础。现在我们再把它作适当的处理。因单质点系的位移反应为

$$x(t)=-\frac{1}{\omega'}\int_0^t \ddot{x}_g(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega'(t-\tau)d\tau. \tag{2.4.1}$$

式中 $\omega'=\sqrt{1-\xi^2}\omega$，为有阻尼自振频率；$x(t)$ 为质点在 t 时刻的振动位移；τ 为在 0 — 时间里的任一时刻。

单质点系地震反应的一般解答包括自由振动和强迫振动两部分，不过由于阻尼作用，自由振动很快就会衰减而可以忽略，故式(2.4.1)仅是强迫振动的解答。现在我们对式(2.4.1)再就时间 t 取一次导数，就得到单质点系相对速度地震反应 $\dot{x}(t)$，若忽略 ξ 的高次项，相对速度地震反应的表达式为

$$\dot{x}(t)=\xi\int_0^t e^{-\xi\omega(t-\tau)}\ddot{x}_g(\tau)\sin\omega'(t-\tau)\,d\tau-\int_0^t e^{-\xi\omega(t-\tau)}\ddot{x}_g(\tau)\cos\omega'(t-\tau)d\tau. \tag{2.4.2}$$

同理，式(2.4.1)对时间 t 取二次导数，就得到单质点系相对加速度地震反应。但从我们今后实际需要的量出发，可不必单独地去求出 $\ddot{x}(t)$，因为由式(2.1.5)把 p 换成 ω，把 f 换成 $\ddot{x}_g$ 后提供了如下的关系：

$$\ddot{x}_g+\ddot{x}(t)=-\omega^2x(t)-2\xi\omega\dot{x}(t), \tag{2.4.3}$$

而$[\ddot{x}_g(t)+\ddot{x}(t)]$正是计算各种地震反应所需要的量，可称为绝对加速度反应。由于一般不采用相对加速度反应 $\ddot{x}(t)$，今后简称为加速度反应。因此，这样简称也不致会发生混淆。

加速度反应的表达式可以将式(2.4.1)、(2.4.2) 代入式(2.4.3)得出。但为简化起见，一般均略去式(2.4.3)中的第二项，因为 ξ 值很小，第二项相对于第一项来说是个可以略去的微量，虽然引进了些微误差，但却给今后的运算和公式的简化带来了极大的方便。这样，就有

$$\begin{aligned}\ddot{x}_g(t)+\ddot{x}(x)&\approx-\omega^2x(t)\\&=\frac{\omega^2}{\omega'}\int_0^t\ddot{x}_g(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega'(t-\tau)d\tau.\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

当 ξ 很小时，$\omega'\approx\omega$，故式(2.4.4)又可表为

$$\ddot{x}_g(t)+\ddot{x}(t)=\omega\int_0^t\ddot{x}_g(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega(t-\tau)d\tau. \tag{2.4.5}$$

式(2.4.5)是目前计算加速度反应用的表达式[3]。

二、地震反应谱

如所周知，在上述各表达式中，地面加速度运动 $\ddot{x}_g(t)$ 随时间的变化规律是很难用简单的定函数形式来表达的。因此包含有它的积分式也无法以解析式表达出来。各种反应在每一

时刻的具体数值，只能采用把 $\ddot{x}_g(t)$ 数值化或者逐步递推（例如线性加速度法）的办法，然后一步步地算出来。最后用曲线来表示它们的反应，一般称为反应曲线。

从式（2.4.1）、(2.4.2)和(2.4.3)可知，给定一组 ζ 和 ω 值（它相应于一个结构体系），便可以计算出一条反应曲线[4]，即采用不同的 ζ 和 ω 值可算得不同的反应曲线。在抗震设计中人们最关心是其最大反应，即只需要知道每条曲线中的最大值，如 x_{max}，$\dot{x}_{max}$ 和 $(\ddot{x}+\ddot{x}_g)_{max}$。因此，从实际需要量出发，可把每种反应的最大值看作是自振周期 T 的函数。这样，对于每一个地震加速度记录，在给定阻尼比 ζ 的情况下，每一种反应都可以算出一条最大反应与 T 的关系曲线。这种曲线通常称为"反应谱"。相应于各反应的名称分别称为位移反应谱 $[x_{max}(T)]$，速度反应谱 $[\dot{x}_{max}(T)]$ 和加速度反应谱 $[(\ddot{x}_g+\ddot{x})_{max}(T)]$。到此为止，我们已可以就某个特定的地震记录，求出需要的加速度反应谱。由于预报未来强震的时间、强度以及运动全过程的实际困难，虽然当今世界各国已有不少研究者正致力于这方面的研究，但是要将这些还很不成熟的成果应用于设计实践，还有很大的距离。还需要进行深入的研究，而至为重要的还要使理论能为尔后的实际检验所证实，这样才能为工程设计人员所接受。因此，至今大多数人们仍然广泛采用了标准反应谱曲线的设计概念。

三、标准加速度反应谱(β 谱)和动力系数的概念

一般说来，地震时地面最大加速度随地震烈度增高而增大。因此，加速度反应谱将随地震烈度和地震特性（频率组成）的不同而具有不同的形状。但是这对统计和提供设计用反应谱是不方便的。为此，通常以重力加速度 g 作为绝对加速度单位，并把它分离为如下两个部分：

$$\frac{|[\ddot{x}_g(t)+\ddot{x}(t)]_{max}|}{g}=\frac{|\ddot{x}_g(t)_{max}|}{g}\cdot\frac{|[\ddot{x}_g(t)+\ddot{x}(t)]_{max}|}{|\ddot{x}_g(t)_{max}|}$$

$$=k\cdot\beta. \tag{2.4.6}$$

式中 $k=\frac{|\ddot{x}_{g\max}|}{g}$ 是地面最大加速度与重力加速度的比值，称为地震系数。目前常以地震系数作烈度的定量标志，由于它和烈度的大小有关，因而可以根据相同或不同烈度下的地面加速度记录统计出它的数值。

$\beta=\frac{|[\ddot{x}_g(t)+\ddot{x}(t)]_{max}|}{|\ddot{x}_g(t)_{max}|}$，是质点最大的绝对加速度与地面最大加速度的比值。这个比值取决于地面加速度的特性和结构动力特性（主要是周期或频率特性）。当地震记录一定时，则它仅与结构动力特性有关。从物理意义来看，它表示由于结构的弹性作用，质点（或结构）的最大绝对加速度比地面加速度放大了多少倍，一般称为动力系数或放大倍数。由于它与地震烈度的大小无关，所以可利用所有不同烈度的地震记录进行统计和计算。

β 和 T 的关系曲线称为 $\beta(T)$ 谱，它和加速度谱成比例，可看作是以地面最大加速度为单位的加速度反应谱。

我国抗震设计规范在编制标准反应谱时，采用了上述分离方法，利用强震记录分别统计出计算地震力所需的两个参数 k 和 β，然后再将它们合并为一个参数 α（称为地震影响系数），即

$$\alpha=k\cdot\beta \tag{2.4.7}$$

此时地震力的计算公式为

$$F=m\left|\ddot{x}_g+\ddot{x}\right|_{max}=mg\left(\frac{\ddot{x}_{gmax}}{g}\right)\left(\frac{\left|\ddot{x}_g+\ddot{x}\right|_{max}}{\ddot{x}_{gmax}}\right), \tag{2.4.8}$$

故

$$F=k\cdot\beta\cdot W=\alpha\cdot W. \tag{2.4.9}$$

式中 $W=mg$ 为质点的重量。

如果我们把式（2.4.9）中的 $k\cdot W$ 看成是不考虑结构动力特性时的地震荷载（已经过时的静力理论），那么再乘上系数 β 便是考虑结构动力特性后的地震荷载。显而易见，现行地震力计算理论在确定地震荷载时又采用了一个步骤，即利用动力系数再次把动力问题转化为和静力计算相同的方法来解决。虽然方法类同静力法，但是已经在客观上赋予了动力的含义。这是把现行的方法称为“动静法”的又一原因。

四、设计用标准反应谱——$\alpha(T)$谱

根据前述可知，由于地面运动的特性，受到许多因素特别是土质条件的影响，因而根据现有记录算得的 $\beta(T)$谱是各不相同的。此外，由于地震过程的随机特性，目前尚难准确预估每一地区在将来所可能遭遇的地震中的地面加速度图形及其反应谱。因此，作为一种近似的处理方法，只能根据现有的 $\beta(T)$谱，利用概率的方法统计出一个平均反应谱，作为设计依据，即采用标准反应谱。我国工业与民用建筑抗震设计规范给出的 $\alpha(T)$谱就是这样得出的。

（一）地震系数 k 的确定

目前采用的地震系数 k 是根据 7 度地区的 23 条强地震记录和 8 度地区的 7 条强地震记录，利用概率的方法统计得出的，其结果为：7 度地区时 $k=0.106$；8 度地区时 $k=0.197$。

（二）结构动力系数 β 的确定

如前所述，场地土质条件对 $\beta(T)$的形状有比较大的影响。同时，根据现实情况也有可能加以考虑。表 2.1 列出了相应于不同场地条件时的 β 和 T 的统计值。从表中可以看出不同场地条件时的 β_{max} 值是很相接近的。将三类的 β_{max} 值作进一步的综合后，最后得出$\beta_{max}=2.25$。根据表 2.1 可得：

7 度　　$\alpha_{max}=k\cdot\beta_{max}=0.106\times2.25\approx0.23$

8 度　　$\alpha_{max}=k\cdot\beta_{max}=0.197\times2.25\approx0.45$

对于 9 度的 α_{max} 值，由于没有记录，目前只能从地面最大加速度随烈度大致按几何级数增长，而估计为 0.9。

表 2.1　　β 和 T 统计值

地基类别	Ⅰ			Ⅱ			Ⅲ		
地震记录来源	国内	国外	混合	国内	国外	混合	国内	国外	混合
记录数量	8	25	33	51	61	112	9	29	38
β_{max}	2.16	2.25	2.26	2.30	2.32	1.83	2.08	2.46	1.72
T_m(秒)	0.13	0.18	0.18	0.17	0.33	0.29	0.23	0.75	0.73

从表中可以看出，按国内和国外的记录算得的主要峰点周期 T_m 值有很大差异。鉴于国外记录数量较多而且有较大的地震记录，因而现行规范按国外记录采用 T_m 的数值为：Ⅰ类场地 0.2 秒；Ⅱ类场地 0.3 秒；Ⅲ类场地 0.7 秒。而当加速度曲线过了主峰后，大致按双曲

线规律变化。根据实测资料，当 $T>T_m$ 时，β 值与自振周期成反比，$\alpha=\alpha_{max}\frac{T_m}{T}$。对于标准反应谱在短周期和长周期部分的极限值，按下述考虑确定。

目前使用的强震加速度仪，在短周期部分(如 $T<0.2$ 秒)存在有失真问题，因此对短周期部分的 β 值到底是多大，尚难明确。此外，β 曲线在 $0\sim T_m$ 这一段很陡，而实际结构自振周期难以十分准确地确定，在 $T<T_m$ 时，若 T 值稍有误差，从反应谱中得出的动力系数 β 值的误差就会很大，这样，也会导致 α 值的误差。为了安全，同时，使某些短周期结构地震荷载的计算得到简化（免去自振周期的计算），所以对于 $T<T_M$，一段的 α 值采用水平线。

在 β 谱曲线的长周期部分，β 值随 T 的递减逐渐缓慢。为保证长周期结构具有最低限度的抗震能力，有必要对 α 值取一个下限。根据这一考虑，在绘制标准反应谱 α 曲线时，当 $T\geqslant 5\,T_m$ 时，取 $0.2\,\alpha_{max}$ 作为 α 的下限。这样可得到一个上下截止的双曲线(图 2.4.1)，便是设计用标准反应谱。

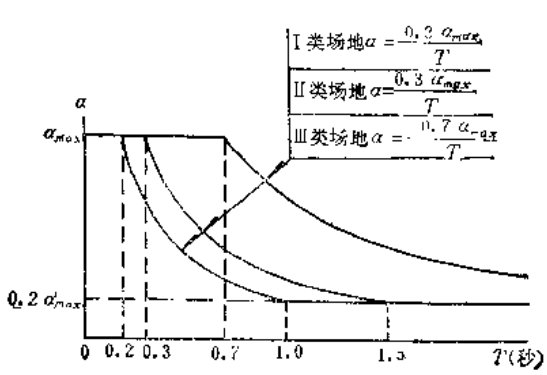


图 2.4.1

参 考 文 献

[1] S. H. Crandall, Random Vibration, John Wiley & Sons, Inc. 1958。
[2] 铁摩辛柯等著，胡人礼译，工程振动问题，人民铁道出版社，1978 年。
[3] 刘恢先，论地震力，土木工程学报，第 2 期，1958。
[4] Robert L. Wiegl, Earthquake Engineering, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. 1970.

第三章　贮液构筑物的抗震分析

贮液构筑物包括贮油罐(槽)、净水池等。这种类型结构分地上式、地下式以及半地下式三种形式。实践证明，设计上没有考虑抗震或构造不合理的贮液构筑物，在强烈地震作用下，可能会发生破坏，致使流体外流，有的甚至可能引起火灾。例如，1923 年 9 月 1 日日本关东大地震(7.9 级)时，东京的淀桥净水池池底混凝土和隔墙均产生许多裂缝，横滨市的野毛山净水池遭受严重破坏，以致不能修复。1968 年 5 月 16 日日本十胜近海地震(7.9 级)时，位于青森市中心的横内净水厂的沉淀池、过滤池、配水池多处发生损坏。1964 年 6 月 16 日日本新潟地震(7.5 级)旧信浓川排水槽由于地基下沉而引起破坏。我国 1975 年 2 月 4 日海城地震中发现，各类贮液罐体本身一般都没有受破坏，但有些罐的底部锚固件发生破坏。这些震害实例表明，贮液构筑物的地震破坏以池底、侧壁、隔墙等为主。特别是当地基比较软弱，地震使其严重丧失承载力时，会使构筑物的底部(池底或罐底)产生破坏。近年来，随着城市建设和工业建设，特别是石油化学工业的发展，大型贮液构筑物日益增多，因而，这类结构的抗震性能愈来愈受到人们的重视。

众所周知，盛于容器中的液体将在垂直于容器壁的方向上产生压力。因而，贮液构筑物在地震作用下，除了受到结构本身的惯性力和液体的静压力外，其底部和侧壁上还将遭受贮存在容器中的液体所产生的液动压力。此外，对于地下式或半地下式结构，还将遭受土压力(静压力和动压力)的作用。本章主要讨论液动压力问题。

第一节　刚性贮液构筑物的液动压力

将贮液构筑物假定为绝对刚性体，显然与实际情形不符合。但当容器体积较小，或用钢筋混凝土材料修建时，由于容器具有大的空间刚度，作这样的处理是允许的。这样一来，将使数学运算得到极大的简化。这一问题很久以来一直为人们所注意，在理论分析、实验研究和实际地震观测方面均进行了大量的工作[1-7]。

在关于部分充满液体的容器运动的著作中，所研究的几乎都是小振幅运动。作了这样的简化后，可以认为所有的运动参量是如此之小，以致于其乘积及平方项可以忽略，从而避免求解非线性问题所产生的数学上的困难。本书中也将采用这一简化假定，并认为容器中的液体是无粘滞性的、无旋的理想液体。由于同时要考虑表面重力波条件和液体可压缩性影响的困难，所以在有关贮液容器的分析中，我们仅对重力波条件作必要的论述和考虑，而不考虑液体可压缩性的影响。而且，在本章和第四章中，我们仅研究容器的水平运动。

一、圆柱形贮液构筑物

(一) 一般性讨论

考虑容器在 x 轴方向上的水平运动，其速度为 $\dot{x}_0(t)$(图 3.1.1)。用 $\Phi(r,\theta,y,t)$表示流体运动的速度势，它应满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\Phi=0, \tag{3.1.1}$$

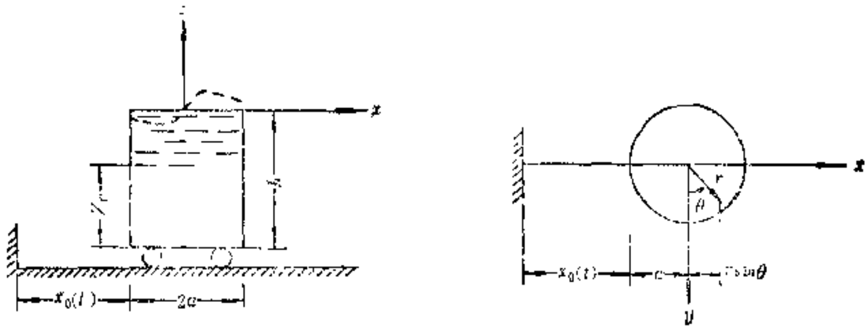


图 3.1.1

和下列边界条件及初始条件：

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right|_{\theta=\pm\frac{\pi}{2}}=0, \tag{3.1.2a}$$

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right|_{r=a}=\dot{x}_0(t)\sin\theta, \tag{3.1.2b}$$

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial Z}\right|_{Z=-h}=0, \tag{3.1.2c}$$

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{z=0}+gf=0, \tag{3.1.2d}$$

$$\Phi|_{t=0}=\Phi_0,\ \dot{\Phi}|_{t=0}=\dot{\Phi}_0, \tag{3.1.2e}$$

其中，$f(r, \theta, t)$是液体自由表面的方程。

显然，条件式(3.1.2a)相应于容器壁在$\theta=\pm\frac{\pi}{2}$处之环向速度等于零；条件式(3.1.2b)相应于容器壁处液体在径向上的速度分量与容器运动速度相一致；条件式(3.1.2c)相应于容器底上液体运动速度之垂直分量等于零，条件式（3.1.2d）相应于液体表面在重力场影响下的平衡条件；而条件式(3.1.2e)表示速度势在初始时刻所取之值。

我们把势Φ表示为两个势之和的形式：

$$\Phi(r,\theta,z,t)=\varphi_1(r,\theta,z,t)+\varphi_2(r,\theta,z,t), \tag{3.1.3}$$

势φ_1和φ_2应分别满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\varphi_1=0,\ \Delta^2\varphi_2=0, \tag{3.1.4}$$

和下列边界条件及初始条件：

$$\left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta}\right|_{\theta=\pm\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta}\right|_{\theta=\pm\frac{\pi}{2}}=0, \tag{3.1.5a}$$

$$\left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}\right|_{r=a}=\dot{x}_0(t)\sin\theta, \tag{3.1.5b}$$

$$\left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial r}\right|_{r=a}=0, \tag{3.1.5c}$$

$$\left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right|_{z=-h}=\left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right|_{z=-h}=0, \tag{3.1.5d}$$

$$\left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}\right|_{z=0}+gf_2=-\left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\right|_{z=0}-gf_1, \tag{3.1.5e}$$

$$[\varphi_1+\varphi_2]_{t=0}=\Phi_0,\ [\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2]_{t=0}=\dot{\Phi}_0, \tag{3.1.5f}$$

这里，

$$\left.\begin{aligned} f_1&=\int_0^t \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\bigg|_{z=0} dt, \\ f_2&=\int_0^t \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\bigg|_{z=0} dt. \end{aligned}\right\} \tag{3.1.5g}$$

容易看出，方程(3.1.3)—(3.1.5)等价于方程(3.1.1)—(3.1.2)。

作为势 φ_1，可以采用如下形式：

$$\varphi_1(r,\theta,z,t)=\dot{x}_0(t)r\sin\theta. \tag{3.1.6}$$

显然，φ_1 满足拉普拉斯方程和边界条件式 (3.1.5a)。由此可见，在上述条件下，φ_1 是流体的刚体运动势。势 φ_2 代表不动容器中由于在势 φ_1 作用的情况下压力不平衡所产生的液动压力。

将 φ_2 进行变量分离，令

$$\varphi_2=\dot{q}^*(t)Z(z)\Theta(\theta)R(r), \tag{3.1.7}$$

并代入式(3.1.4)的第二个方程，得

$$Z\Theta\frac{d^2R}{dr^2}+ZR\frac{d^2\Theta}{r^2d\theta^2}+\Theta R\frac{d^2Z}{dz^2}+Z\Theta\frac{dR}{rdr}=0,$$

或

$$\frac{d^2Z}{Zdz^2}=-\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2}-\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{r^2d\theta^2}-\frac{1}{R}\frac{dR}{rdr}.$$

上式左边仅依赖于自变量 z，而右边依赖于自变量 r、θ，因而它只能等于一个常数，令它等于某一正实数 λ^2，于是有

$$\frac{d^2Z}{dz^2}-\lambda^2Z=0, \tag{3.1.8a}$$

$$\frac{d^2\Theta}{\Theta d\theta^2}=-\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}-\frac{r}{R}\frac{dR}{dr}-\lambda^2r^2.$$

再令上式两端均等于某一负实数 $-s^2$，得

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+s^2\Theta=0, \tag{3.1.8b}$$

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{dR}{rdr}+\left(\lambda^2-\frac{s^2}{r^2}\right)R=0. \tag{3.1.8c}$$

方程(3.1.8b)之解为

$$\Theta=A_1\sin(s\theta)+B_1\cos(s\theta).$$

由于 φ_1 正比于 $\sin\theta$ 以及式(3.1.5c)、(3.1.5f)，可以取 $s=1$，再由条件式 (3.1.5a)，可得

$$\Theta=A_1\sin\theta. \tag{3.1.9a}$$

方程(3.1.8a)和(3.1.8c)之解分别为

$$\left.\begin{aligned} &Z=A_2\sinh[\lambda(z+h)]+B_2\cosh[\lambda(z+h)], \\ &R=FJ_1(\lambda r). \end{aligned}\right\} \tag{3.1.8'}$$

由条件式(3.1.5c)，从上面第二个方程得到

$$J_1'(\lambda a)=0.$$

此方程有无限多个根，设其为 $\lambda_n a$，$n=1,2,\cdots$，再令

$$\sigma_n = \lambda_n a,$$

从而有

$$J_1'(\sigma_n)=0. \tag{3.1.10}$$

方程（3.1.10）前六个根之值为：1.84，5.33，8.53，11.71，14.86，18.00。再由条件式(3.1.5a)，从(3.1.8′)之第一个方程得到

$$Z=B_2\cosh\left(\sigma_n\frac{z+h}{a}\right), \tag{3.1.9b}$$

而(3.1.8′)之第二个方程可以写为

$$R=FJ_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right). \tag{3.1.9c}$$

由于方程(3.1.8)相应于一个 σ_n 有一个解，且这些解彼此独立，故可将之进行叠加，得到

$$\varphi_2(r,\theta,z,t)=\sin\theta\sum_{n=1}^{\infty}\dot{q}_n^*(t)\cosh\left(\sigma_n\frac{z+h}{a}\right)J_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right).$$

取

$$\dot{q}_n^*(t)=\frac{\dot{f}_n^*(t)}{\cosh\left(\sigma_n\frac{h}{a}\right)},$$

将上式重新写为

$$\varphi_2(r,\theta,z,t)=\sin\theta\sum_{n=1}^{\infty}\dot{f}_n^*(t)\frac{\cosh\left(\sigma_n\frac{z+h}{a}\right)}{\cosh\left(\sigma_n\frac{h}{a}\right)}J_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right). \tag{3.1.11}$$

为了决定 $f_n^*(t)$，我们可利用表面波条件式(3.1.5 e)。这时，因为

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}=0,\ f_1=0,$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}=\ddot{x}_0(t)r\sin\theta,$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right|_{z=0}=\sin\theta\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{f}_n^*(t)J_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right),$$

$$f_2=\int_0^t\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right|_{z=0}dt=\int_0^t\frac{\sin\theta}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n\dot{f}_n^*(t)\tanh\left(\sigma_n\frac{h}{a}\right)J_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)dt=$$

$$=\frac{\sin\theta}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n f_n^*(t)\tanh\left(\sigma_n\frac{h}{a}\right)J_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right),$$

将之代入条件式(3.1.5 e)，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{f}_n^*(t)J_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)+g\sum_{n=1}^{\infty}f_n^*(t)\frac{\sigma_n}{a}\tanh\left(\sigma_n\frac{h}{a}\right)J_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)=$$

$$=-r\ddot{x}_0(t). \tag{3.1.12}$$

对于 r 利用狄尼(Dini)展开式[8]，展为贝塞尔函数 $J_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)$的级数

$$r=a\sum_{n=1}^{\infty} b_n J_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right), \tag{3.1.13}$$

其中系数 b_n 由下式决定：

$$\begin{aligned} b_n&=\frac{2\sigma_n^2}{(\sigma_n^2-1)J_1^2(\sigma_n)}\int_0^1 t^2J_1(\sigma_n t)dt \\ &=\frac{2\sigma_n J_2(\sigma_n)}{(\sigma_n^2-1)J_1^2(\sigma_n)}=\frac{2}{(\sigma_n^2-1)J_1(\sigma_n)}, \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

令

$$f_n^*(t)=q_n(t)ab_n, \tag{3.1.15}$$

将式(3.1.13)和(3.1.15)代入式(3.1.12)，即得到决定函数 $q_n(t)$的如下方程：

$$\ddot{q}_n(t)+\tilde{\omega}_n^2 q_n(t)=-\ddot{x}_0(t). \tag{3.1.16}$$

对于具有粘性阻尼的液体，可以得到决定 $q_n(t)$的如下近似方程：

$$\ddot{q}_n(t)+\nu\dot{q}_n(t)+\tilde{\omega}_n^2 q_n(t)=-\ddot{x}_0(t), \tag{3.1.16'}$$

其中

$$\tilde{\omega}_n^2=\frac{g}{a}\sigma_n\tanh\left(\sigma_n\frac{h}{a}\right). \tag{3.1.17}$$

从方程(3.1.16)可见，它与单自由度无阻尼质点的强迫振动方程具有相同的形式（见第二章）.因此，和单自由度系统一样，$\tilde{\omega}_n$ 可以视为容器中液体的自振频率．从式（3.1.17)可见，其值随 h 值，即随容器中贮液深度的增加而增加，并随容器直径增加而减小．此外，既然式(3.1.16)与单自由度系统的强迫振动方程具有相同形式，因而有理由把$q(t)$称为液体振动的广义坐标，其值由式(3.1.16)和初始条件式(3.1.5 f)决定。

求出 φ_1 和 φ_2 之后，则可以得出总速度势 Φ 如下：

$$\Phi=\varphi_1+\varphi_2=a\sin\theta\left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n\dot{q}_n(t)\frac{\cosh\left(\sigma_n\frac{z+h}{a}\right)}{\cosh\left(\sigma_n\frac{h}{a}\right)}J_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)+\frac{r\dot{x}_0(t)}{a}\right]. \tag{3.1.18}$$

容易验证，势$\Phi(r, \theta, z, t)$满足从式(3.1.2 a)—(3.1.2 d)的全部边界条件，从而正是所求问题之解。

有了速度势Φ，可求得容器中液体运动的速度如下：

垂向速度

$$v_z=\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\sin\theta\left[\sum_{n=1}^{\infty}\dot{q}_n(t)\frac{\sigma_n b_n\sinh\left(\sigma_n\frac{z+h}{a}\right)}{\cosh\left(\sigma_n\frac{h}{a}\right)}J_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)+r\dot{x}_0(t)\right]; \tag{3.1.19 a}$$

径向速度

$$v_r=\frac{\partial\Phi}{\partial r}=-\sin\theta\left[\sum_{n=1}^{\infty}\dot{q}_n(t)\frac{\sigma_n b_n\cosh\left(\sigma_n\frac{z+h}{a}\right)}{\cosh\left(\sigma_n\frac{h}{a}\right)}J_1'\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)+\dot{x}_0(t)\right];\tag{3.1.19 b}$$

环向速度

$$v_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}=a\cos\theta\left[\sum_{n=1}^{\infty}\dot{q}_n(t)\frac{b_n\cosh\left(\sigma_n\frac{z+h}{a}\right)}{\cosh\left(\sigma_n\frac{h}{a}\right)}\frac{J_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)}{r}+\frac{\dot{x}_0(t)}{a}\right].\tag{3.1.19 c}$$

现在，我们来考查表面波的形状。从式(3.1.2 d) 得知，在重力场中，容器内液体自由面的振荡形状(表面波)为

$$f=-\frac{1}{g}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\bigg|_{z=0},$$

将式(3.1.18)代入，得到

$$f=-\frac{a\sin\theta}{g}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{q}_n(t)b_nJ_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)+\frac{r\ddot{x}_0(t)}{a}\right].\tag{3.1.20}$$

如果将 r 展开为贝塞尔函数 $J_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)$的狄尼级数式(3.1.13)，则上式可以写为

$$f=-\frac{a\ddot{x}_0(t)\sin\theta}{g}\sum_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{\ddot{q}_n(t)}{\ddot{x}_0(t)}\right]b_nJ_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right).\tag{3.1.20'}$$

从式(3.1.20)或式(3.1.20′)看出，当 $\theta=0$ 时，$f=0$。因而，可以得出如下结论：在水平运动的情况下，容器中液体表面上发生的重力波为具有一条节点直径而无节点圆的表面波，且具有关于 xz 平面的对称性（这可以从下面事实看出：正弦函数 $\sin\theta$ 在 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 的范围内关于 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 处的平面成对称，而在 $\pi\leqslant\theta\leqslant2\pi$ 范围内关于 $\theta=\frac{3}{2}\pi$ 处的平面成对称，xz 平面正是 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 或 $\theta=\frac{3}{2}\pi$ 处的平面)。图 3.1.2 上示出了 $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ 断面上表面重力波之前三个振型形状。从图上可以看出，在水平运动之下，各振型均为反对称的，与结构的振型有类似的特点。

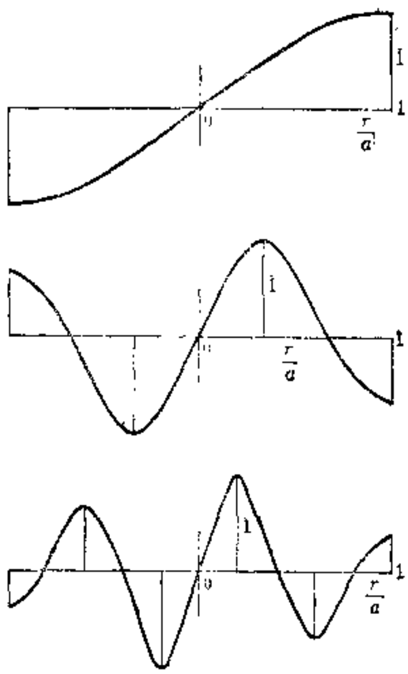


图 3.1.2

利用表面波的位移公式(3.1.20)，可以决定地震时容器中液体表面之最大波高。

最后，我们转入最感兴趣的问题：寻求容器中液体作用于容器壁和底上的液动压力。为

此，液体中任意点处之全压力由式

$$p(r,\ \theta,\ z,\ t)=-\rho\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+gz\right) \tag{3.1.21}$$

决定。其中，Φ 由式(3.1.18)给出。从此公式看出，液体的全压力 $p(r,\ \theta,\ z,\ t)$ 为如下两部份之和：

a）液动压力

$$p(r,\ \theta,\ z,\ t)=-\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}; \tag{3.1.22}$$

b）液体静压力

$$p(r,\ \theta,\ z,\ )=-\rho gz. \tag{3.1.23}$$

液体静压力的计算极其方便。所以今后我们将仅研究液动压力的值，因为它在贮液构筑物的抗震计算中具有十分重要的意义

由式(3.1.18)和式(3.1.22)，我们得到液体中任何一点处的液动压力为

$$p(r,\ \theta,\ z,\ t)=-\rho a\sin\theta\left[\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{q}_n(t)\frac{b_n\cosh\left(\sigma_n\frac{z+h}{a}\right)}{\cosh\left(\sigma_n\frac{h}{a}\right)}J_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)+\frac{r\ddot{x}_0(t)}{a}\right], \tag{3.1.24}$$

从而，得到作用于容器壁上的液动压力为

$$p^w(a,\ \theta,\ z,\ t)=-\rho a\sin\theta\left[\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{q}_n(t)\frac{d_n\cosh\left(\sigma_n\frac{z+h}{a}\right)}{\cosh\left(\sigma_n\frac{h}{a}\right)}+\ddot{x}_0(t)\right], \tag{3.1.25}$$

其中

$$d_n=\frac{2}{\sigma_n^2-1}=b_nJ_1(\sigma_n)$$

(后一等式可从式(3.1.14)看出)。同样，由式(3.1.24)得到作用于容器底板上的液动压力：

$$p^b(r,\ \theta,\ -h,\ t)=-\rho a\sin\theta\left[\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{q}_n(t)\frac{d_n}{\cosh\left(\sigma_n\frac{h}{a}\right)}\frac{J_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)}{J_1(\sigma_n)}+\frac{r\ddot{x}_0(t)}{a}\right]. \tag{3.1.26}$$

在进行贮液容器或构架式贮液容器的抗地震分析时，往往需要液动压力的合力值以及由作用于侧壁和底板上之液动压力的力矩所产生的倾覆力矩。将式(3.1.25)沿整个容器侧壁面积积分，得到作用在侧壁上之液动压力在 x 方向上的合力（作用于贮液构筑物上的基底剪力）：

$$\begin{aligned}S&=\int_{-h}^{0}\int_{0}^{2\pi}p^w(a,\theta,z,t)a\sin\theta d\theta dz\\&=-\rho\pi a^3h_0\left[\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{q}_n(t)\ \ \frac{c_n\tanh(\sigma_nh_0)}{h_0}+\ddot{x}_0(t)\right].\end{aligned} \tag{3.1.27}$$

此力作用点到容器底板的距离 z_c,可如求重心坐标那样，按如下公式决定：

$$Z_c=\frac{\int_{-h}^{0}\int_{0}^{2\pi}p^w(a,\theta,z,t)(z+h)a\sin\theta d\theta dz}{\int_{-h}^{0}\int_{0}^{2\pi}p^w(a,\theta,z,t)a\sin\theta d\theta dz}$$

$$=h\frac{\dfrac{\ddot{x}_0(t)}{2}+\dfrac{1}{h_0}\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{q}_n(t)c_n\left[\tanh(\sigma_n h_0)+\dfrac{1}{\sigma_n h_0}\left(\dfrac{1}{\cosh(\sigma_n h_0)}-1\right)\right]}{\ddot{x}_0(t)+\dfrac{1}{h_0}\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{q}_n(t)c_n\tanh(\sigma_n h_0)} \tag{3.1.28}$$

其中

$$h_0=\frac{h}{a},\qquad c_n=\frac{d_n}{\sigma_n}. \tag{3.1.29}$$

同样，可以得到沿容器侧壁和底板作用之液动压力所产生的倾覆力矩如下：

由侧壁上液动压力所产生的倾覆力矩：

$$M^w=\int_{-h}^{0}\int_{0}^{2\pi}p^w(a,\theta,z,t)(z+h)a\sin\theta d\theta dz$$
$$=-\rho\pi h_0^2a^4\left[\frac{\ddot{x}_0(t)}{2}+\frac{1}{h_0}\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{q}_n(t)c_n\left(\tanh(\sigma_n h_0)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{\sigma_n h_0}\left(\frac{1}{\cosh(\sigma_n h_0)}-1\right)\right)\right], \tag{3.1.30}$$

由底板上之液动压力所产生的倾覆力矩：

$$M^b=\int\int_{0}^{2\pi}p^b(r,\theta,z,t)r^2\sin\theta d\theta dr$$
$$=-\rho a^4\pi\left[\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{q}_n(t)\frac{c_n}{\sigma_n\cosh(\sigma_n h_0)}+\frac{\ddot{x}_0(t)}{4}\right]. \tag{3.1.31}$$

到此为止，我们导出了刚性圆柱形贮液容器在水平地面运动情形下，其内部贮液的运动情形、作用于容器侧壁和底板上的液动压力及倾覆力矩的一般解。下面，我们将对地面运动的一些具体情况进行讨论。

（二）周期性地面运动的情形

在容器沿着 x 轴以频率 ω 作周期性运动时，设其位移为

$$x_0(t)=e^{i\omega t},$$

于是有

$$\ddot{x}_0(t)=-\omega^2e^{i\omega t}.$$

这时，方程(3.1.16)之解同样是周期性的，设此解为

$$q_n(t)=Ae^{i\omega t}, \tag{3.1.32}$$

将之代入方程(3.1.16)，得到

$$-\omega^2Ae^{i\omega t}+A\tilde{\omega}_n^2e^{i\omega t}=\omega^2e^{i\omega t}.$$

由此，

$$A=\frac{\omega^2}{\tilde{\omega}_n^2-\omega^2},$$

$$q_n=\frac{\omega^2}{\tilde{\omega}_n^2-\omega^2}e^{i\omega t}. \tag{3.1.32'}$$

这时，计及式(3.1.17)，我们得到

$$\frac{\ddot{q}_n(t)}{\ddot{x}_0(t)}=\frac{\dfrac{a\omega^2}{g}}{\sigma_n\tanh(\sigma_n h_0)-\dfrac{a\omega^2}{g}}. \tag{3.1.33}$$

从而，由式(3.1.20)得到周期性地面运动情况下，容器中液体的表面重力波方程

$$f=e^{i\omega t}\sin\theta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_n^2c_n\delta}{\sigma_n-\delta\coth(\sigma_n h_0)}\frac{J_1\left(\sigma_n\dfrac{r}{a}\right)}{J_1(\sigma_n)}, \tag{3.1.34}$$

式中

$$\delta=\frac{a\omega^2}{g}. \tag{3.1.35}$$

从式(3.1.34)可见，当

$$\delta=\sigma_n\tanh(\sigma_n h_0),$$

$$\omega=\tilde{\omega}_n=\sqrt{\sigma_n\frac{g}{a}\tanh(\sigma_n h_0)},$$

即当地面运动频率和容器中液体的自振频率相一致时，液体将产生共振，其垂直振幅将趋于无限大。当然，由于液体粘性阻尼的作用，振幅不可能为无限大；不过，如弹性系统那样，对于液体，如果作出其振幅-频率曲线，在其共振频率处，亦会出现共振峰，不过其形状与弹性系统不会相同。

现在，我们来考虑液动压力。液体中任何一点的液动压力为

$$p(r,\ \theta,\ z,\ t)=\rho a\omega^2e^{i\omega t}\sin\theta\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta d_n}{\sigma_n\tanh(\sigma_n h_0)-\delta}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\cosh\left(\sigma_n\dfrac{z+h}{a}\right)}{\cosh\left(\sigma_n\dfrac{h}{a}\right)}\frac{J_1\left(\sigma_n\dfrac{r}{a}\right)}{J_1(\sigma_n)}+\frac{r}{a}\right];$$

作用在容器壁上之液动压力为

$$p^w(a,\ \theta,\ z,\ t)=\rho a\omega^2e^{i\omega t}\sin\theta\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta d_n}{\sigma_n\tanh(\sigma_n h_0)-\delta}\times\frac{\cosh\left(\sigma_n\dfrac{z+h}{a}\right)}{\cosh\left(\sigma_n\dfrac{h}{a}\right)}+1\right]; \tag{3.1.36}$$

其合力(基底剪力)为

$$S=M_l\omega^2e^{i\omega t}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{h_0}\frac{\delta c_n}{\sigma_n-\delta\coth(\sigma_n h_0)}+1\Big], \tag{3.1.37}$$

其中

$$M_l = \rho\pi a^2 h$$

为容器中液体的总质量，合力作用点距容器底板的距离为

$$Z_c = h\frac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{h_0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\delta c_n}{\sigma_n\tanh(\sigma_n h_0)-\delta}\left[\tanh(\sigma_n h_0)+\dfrac{1}{\sigma_n h_0}\left(\dfrac{1}{\cosh(\sigma_n h_0)}-1\right)\right]}{1-\dfrac{\delta}{h_0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{c_n}{\sigma_n-\delta\coth(\sigma_n h_0)}}, \tag{3.1.38}$$

作用在容器底板上的液动压力为

$$p^b(r,\ \theta,\ -h,\ t) = \rho a\omega^2 e^{i\omega t}\sin\theta\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta d_n}{\sigma_n\tanh(\sigma_n h_0)-\delta}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{\cosh(\sigma_n h_0)}\frac{J_1\left(\sigma_n\dfrac{r}{a}\right)}{J_1(\sigma_n)}+\frac{r}{a}\right]; \tag{3.1.39}$$

由侧壁上液动压力所产生的倾覆力矩为：

$$M^w = M_l h\omega^2 e^{i\omega t}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{h_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta c_n}{\sigma_n\tanh(\sigma_n h_0)-\delta}\left(\tanh(\sigma_n h_0)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\sigma_n h_0}\left(\frac{1}{\cosh(\sigma_n h_0)}-1\right)\right)\right]; \tag{3.1.40}$$

由底板上液动压力所产生的倾覆力矩为：

$$M^b = \rho\pi a^4\omega^2 e^{i\omega t}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta c_n}{\sigma_n(\sigma_n\tanh(\sigma_n h_0)-\delta)}\frac{1}{\cosh(\sigma_n h_0)}+\frac{1}{4}\right]. \tag{3.1.41}$$

在上面的各个公式中，d_n 和 c_n 相应于 σ_n 之前六个值列于表 3.1.1 中。

表 3.1.1

n	σ_n	d_n	c_n
1	1.84	0.8380	0.455
2	5.33	0.0730	0.0137
3	8.53	0.0279	0.00[illegible]9
4	11.71	0.0147	0.00118
5	14.86	0.00948	0.000672
6	18.00	0.0062	0.000205

下面，我们对作用在容器壁上的液动压力作一些比较详细的讨论.

在式(3.1.37)中，如果我们令

$$\xi = 1+\frac{1}{h_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta c_n}{\sigma_n-\delta\coth(\sigma_n h_0)}, \tag{3.1.42}$$

则有

$$S = -M_l \xi \omega^2 e^{i\omega t}. \tag{3.1.43}$$

此式中，M_l 为容器中液体的总质量，$\omega^2 e^{i\omega t}$ 是地面加速度(由于容器是刚性的，因而亦是容器壁的加速度)。质点运动时所产生的惯性力等于该质点质量与加速度的乘积。若液体在容器中随地面运动而运动，那么其中的 $M_l\xi$ 这部份质量在容器壁上产生的液动压力正好等于总液动压力 S，所以将 $M_l\xi$ 叫做等效质量，并记作

$$M_{pr}(\omega) = M_l \xi. \tag{3.1.44}$$

同时，把 ξ 叫做折算系数，它是液体的总等效质量与总质量之比。以后，我们将会看到，在讨论液动压力的问题时，引入等效质量的概念将是十分有用的。

ξ 随容器高度 h_0 的变化见图 3.1.3。由图可见，ξ 随着 h_0 的增加而增加，逐渐地趋近于1。这可以作如下的解释：M_{pr} 和 M_l 的不同，是由于在水平地面运动情况下，液体将不全然由容器所带动，而将稍许落后。因而，在运动方向上器壁的前部，流体水位将下降，而在器壁的后部，水位将上升，如图 3.1.4 所示。在高度 h_0 较小的情况下，侧壁对流体运动的

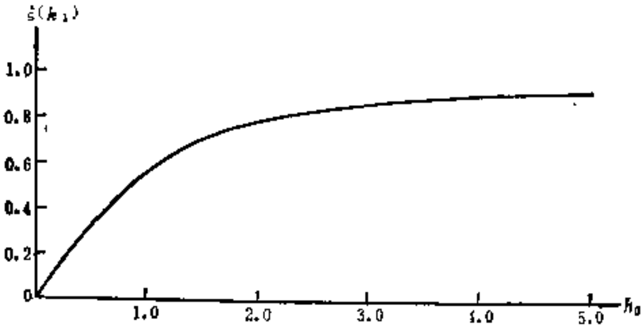


图 3.1.3



图 3.1.4

限制很小，因而落后很显著，等效质量将远小于流体真实质量；反之，在流体深度 h_0 相当大的情况下，侧壁强烈地限制着流体的运动。在容器移动的情况下，流体将几乎整个被带动，因而等效质量将趋于液体的真实质量。顺便指出，接近于自由表面处液体的落后，在较深的液体层中只产生相对于容器来说是很小的位移，因此，如第一章中已经论证了的那样，波的振幅随深度很快地下降。

图 3.1.5 中给出了 $h_0=2$ 时折算系数 ξ 随参数 δ 变化的情形。由图形可见，在 $\delta=0$ 的情况下，$\xi=1$，即在强迫振动频率大大小于固有频率的情况下，液体与容器一起作为一个整体而运动，因而等效质量等于液体的真实质量。在强迫振动频率 ω 趋于液体固有振动频率

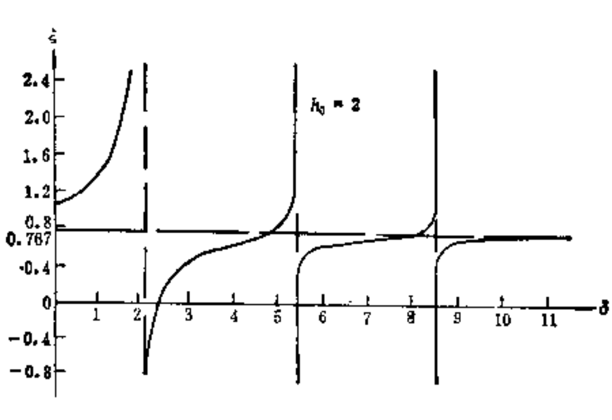


图 3.1.5

$\tilde{\omega}_n$的情况下，随着δ的增加，系数ξ无限增加；在共振之后，ξ变为负值，以后经过零并再次变为正值。当然，在共振时，由于液体的粘滞阻尼，使折算系数ξ(同样，等效质量M_{pr})不会变为无限大，不过此时折算系数ξ将出现峰值。从式(3.1.43)可见，在共振时，由于等效质量M_{pr}变为最大，因而，此时液动压力亦将达到最大值。

从式(3.1.43)可见，等效质量与所研究的容器壁上的液动压力的合力或作用于容器上的外力成正比，此外力是为了使得容器依给定频率而振动所必须加于容器上的，它与液动压力的合力量值相等符号相反。等效质量等于零，意味着在给定的频率情况下，容器可以不加水平方向的外力而振动。我们把这些频率记为ω_n'，它们是在式(3.1.42)中令$\xi=0$而得到的方程的根。容器在水平地面运动之下作用于其上的水平外力(惯性力)等于零意味着容器的质量为零，所以频率ω_n'是无质量容器中液体在水平运动情况下的自由振动频率。在文献[4]中证明了，频率ω_n'和$\tilde{\omega}_n$之间存在着不等式：

$$\omega_n' > \tilde{\omega}_n,$$

且当$n\to\infty$时，$\omega_n'\to\tilde{\omega}_n$。

从图3.1.5可见，随着δ的变化，ξ有时为正，有时为负，从而等效质量M_{pr}亦出现有时为正，有时为负。这意味着，为了维持具有给定频率的振动，需要对液体作用以与加速度相同方向或相反方向的力，即作用以与加速度同相位或反相位的力。

(三) 地面脉冲运动的情形

众所周知，脉冲运动，相当于强迫振动频率趋于无限大时的情形。因此，据式(3.1.33)，有

$$\lim_{\delta\to\infty}\frac{\ddot{q}_n(t)}{\ddot{x}_0(t)}=\lim_{\delta\to\infty}\frac{\delta}{\sigma_n\tanh(\sigma_n h_0)-\delta}=-1. \tag{3.1.45 a}$$

从式(1.1.16)可知，在不计重力场影响的情况下，流体自由表面平衡条件变为

$$p_0=-\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}\Big|_{z=0}=0,$$

从而，边界条件式(3.1.5 e)变为

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\Big|_{z=0}=-\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\Big|_{z=0}=-r\ddot{x}_0(t)\sin\theta.$$

将式(3.1.11)所给出的φ_2值代入此条件，得到

$$\ddot{q}_n(t)=-\ddot{x}_0(t), \tag{3.1.45b}$$

再由式(3.1.20)得到液体自由表面的位移f等于零。由此可以得出如下重要结论：液体侧向受冲击作用，其结果与忽略液体表面重力波的影响是等效的。因此，今后提到所谓液体的冲击压力时，就应当想到是忽略了表面重力波影响时的液动压力。

此时，从式(3.1.17)得知，液体的自振频率$\tilde{\omega}_n$等于零。即在侧向冲击作用(或忽略表面重力波的影响)的情况下，容器中的液体等效于刚体参与容器的运动。这是考虑表面波影响和忽略表面波影响之间的一大差别。

在侧向冲击运动作用下，容器侧壁上产生的液动压力为

$$p^w(a,\theta,z,t)=-\rho a\sin\theta\left[1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n\cosh\left(\sigma_n\frac{z+h}{a}\right)}{\cosh(\sigma_n h_0)}\right]\ddot{x}_0(t). \tag{3.1.46}$$

和前面一样，显然可以把

$$\rho a \sin\theta\left[1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n \cosh\left(\sigma_n \frac{z+h}{a}\right)}{\cosh(\sigma_n h_0)}\right]$$

作为随深度变化的等效分布质量。

作用于底板上的液动压力为

$$p^b(r,\theta,-h,t)=-\rho a \sin\theta\left(\frac{r}{a}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{\cosh(\sigma_n h_0)}\frac{J_1\left(\sigma_n \frac{r}{a}\right)}{J_1(\sigma_n)}\right)\ddot{x}_0(t); \quad (3.1.46')$$

合液动压力(基底剪力)为

$$S=-\rho\pi a^2 h_0\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{h_0}\tanh(\sigma_n h_0)\right)\ddot{x}_0(t)$$
$$=-M_l k_1 \ddot{x}_0(t), \quad (3.1.47)$$

其中

$$k_1=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{h_0}\tanh(\sigma_n h_0). \quad (3.1.48)$$

可以看出，k_1 是折算系数 ξ(见式 3.1.42)，当强迫振动频率 ω(亦即 δ)趋于无限大时的极限值。其随液体高度 h_0 变化的曲线见图 3.1.3。此时，总等效质量的中心或侧壁上液动压力作用点的坐标 Z_c 为

$$Z_c=h\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{h_0}\sum_{n=1}^{\infty}c_n\left[\tanh(\sigma_n h_0)+\frac{1}{\sigma_n h_0}\left(\frac{1}{\cosh(\sigma_n h_0)}-1\right)\right]}{1-\frac{1}{h_0}\sum_{n=1}^{\infty}c_n\tanh(\sigma_n h_0)}$$
$$=hk_2, \quad (3.1.49)$$

其中

$$k_2=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{h_0}\sum_{n=1}^{\infty}c_n\left[\tanh(\sigma_n h_0)+\frac{1}{\sigma_n h_0}\left(\frac{1}{\cosh(\sigma_n h_0)}-1\right)\right]}{k_1}. \quad (3.1.50)$$

k_2 随着 h_0 增加而变化的曲线示于图 3.1.6。由图可见，k_2 随着 h_0 的增加而增加，从而侧壁

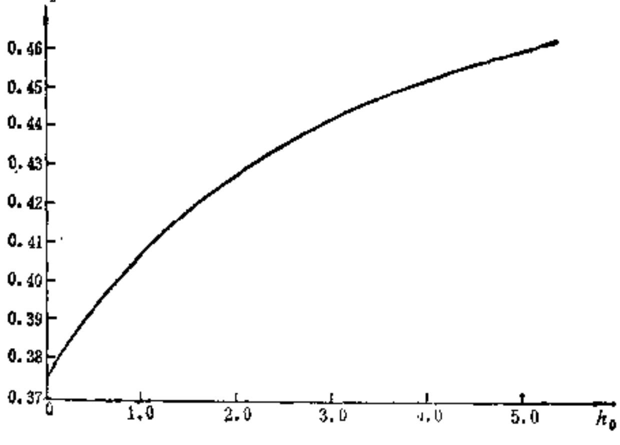


图 3.1.6

上合液动压力作用点亦随 h_0的增加而按此规律变化。当 h_0 趋于无限大时，k_2 趋于$\frac{1}{2}$，即当液体深度充分大时，可以认为合力作用点在其深度一半的位置处，即在液体中心 $Z_c=\frac{1}{2}h$ 处。这种近似对于高宽比相当大的贮液容器之抗震计算来说，可以获得很大的简化。

现在，我们来考虑液动压力所产生的力矩。由侧壁上液动压力所产生的倾覆力矩为

$$M^w=-M_l h\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{h_0}\sum_{n=1}^{\infty}c_n\left(\tanh(\sigma_n h_0)+\frac{1}{\sigma_n h_0}\left(\frac{1}{\cosh(\sigma_n h_0)}-1\right)\right]\ddot{x}_0(t)$$

$$=-M_l h k_3\ddot{x}_0(t), \tag{3.1.51}$$

其中

$$k_3=\frac{1}{2}-\frac{1}{h_0}\sum_{n=1}^{\infty}c_n\left[\tanh(\sigma_n h_0)+\frac{1}{\sigma_n h_0}\left(\frac{1}{\cosh(\sigma_n h_0)}-1\right)\right]. \tag{3.1.52}$$

k_3 随液体深度的变化示于图 3.1.7。由图可见，系数 k_3 随容器内贮液深度 h_0 增加而增加，从而在任意时刻 $t=t_0$，力矩 M^w 之绝对值亦按此规律变化。当 $h_0\to\infty$时，$k_3\to\frac{1}{2}$，不过当 $h_0=3.0$ 以后，k_3 增加得已很缓慢。

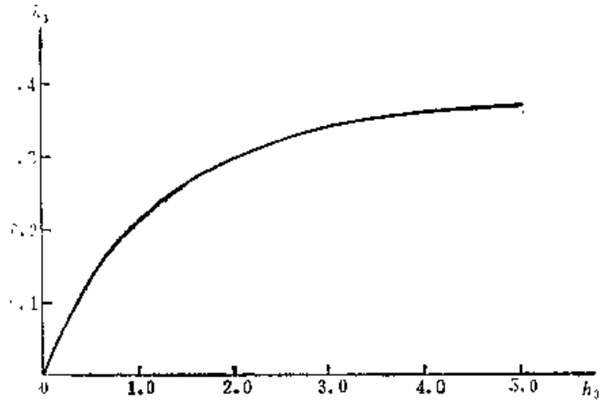


图 3.1.7

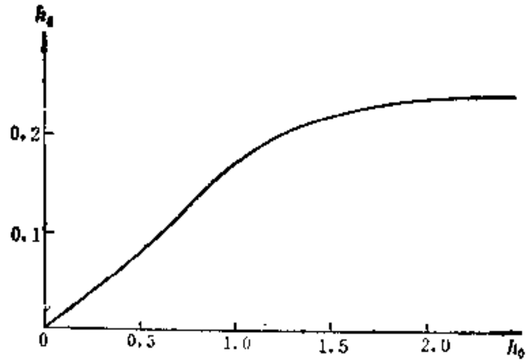


图 3.1.8

对于由作用在容器底板上之液动压力所产生的倾覆力矩，这时有

$$M^b=-\rho a^4\pi\left(\frac{1}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\sigma_n}\frac{1}{\cosh(\sigma_n h_0)}\right)$$

$$=-\rho a^4\pi\ k_4, \tag{3.1.53}$$

其中

$$k_4=\frac{1}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\sigma_n}\frac{1}{\cosh(\sigma_n h_0)}, \tag{3.1.54}$$

其随着贮液深度 h_0 之变化示于图 3.1.8，由图可见，k_4亦随着 h_0 之增大而增大，当 h_0 趋于无限大时，其极限值为$\frac{1}{4}$。

二、圆环形贮液构筑物

在本小节中，我们来考虑具有一个同心圆柱体之圆环形容器中液体运动问题的解。类似

情形在地上和地下容器以及具有构架的容器的实际设计中经常都会遇到。

当容器沿 x 轴方向水平运动时，圆环形容器内理想不可压缩液体运动的速度势应满足拉普拉斯方程和下列边界条件：

$$\left.\begin{aligned}&\left.\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right|_{\theta=\pm\frac{\pi}{2}}=0,\\&\left.\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_{r=a}=\left.\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_{r=k'a}=\dot{x}_0(t)\sin\theta,\\&\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=-h}=0,\ \left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{z=0}=-gf,\\&[\Phi]_{t=0}=\Phi_0,\ [\dot{\Phi}]_{t=0}=\dot{\Phi}_0.\end{aligned}\right\}\tag{3.1.2'}$$

这里，$1>k'>0$，$k'a$是内圆柱的半径，几何形状见图 3.1.9。

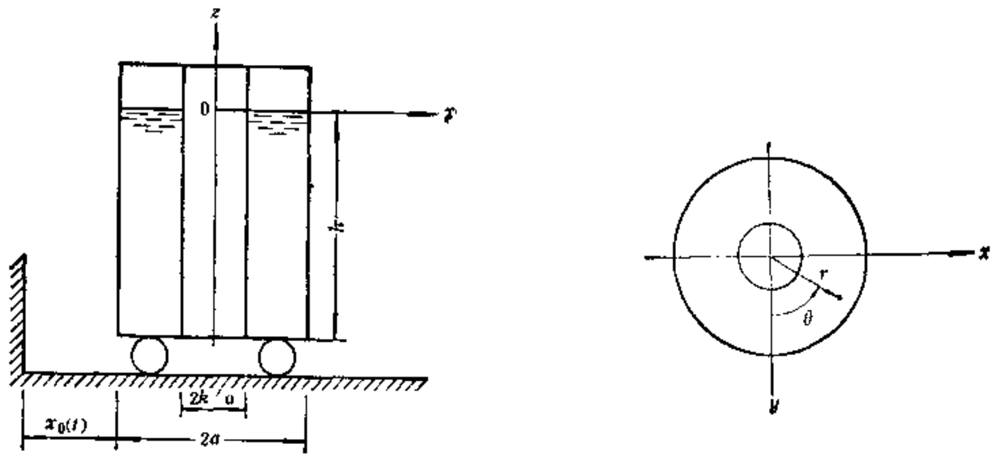


图 3.1.9

将条件式（3.1.2'）与（3.1.2）相比较，可以看出，除第二个条件与式（3.1.26）不同而外，其余条件均相同。于是，若将 Φ 写成

$$\Phi(r,\theta,z,t)=\varphi_1(r,\theta,z,t)+\varphi_2(r,\theta,z,t),$$

则除了式（3.1.5 b）和（3.1.5 c）外，φ_1 和 φ_2 将满足式（3.1.5）的所有条件，而条件式（3.1.5 c）变为

$$\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right|_{r=a}=\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right|_{r=k'a}=\dot{x}_0(t)\sin\theta,\tag{3.1.5b'}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right|_{r=a}=\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right|_{r=k'a}=0.\tag{3.1.5c'}$$

显然，对于这种情形，φ_1仍然可以取为

$$\varphi_1(r,\theta,z,t)=\dot{x}_0(t)r\sin\theta,$$

而 φ_2 应取为

$$\varphi_2(r,\theta,z,t)=\sin\theta\sum_{n=1}^{\infty}\dot{q}_n^*(t)\frac{\cosh\left(\sigma_n\dfrac{z+h}{a}\right)}{\cosh\left(\sigma_n\dfrac{h}{a}\right)}R_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right),\tag{3.1.55}$$

其中

$$R_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)=J_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)+\gamma_nY_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right).\tag{3.1.56}$$

$J_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)$和$Y_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)$分别是第一类和第二类一阶贝塞尔函数，$\sigma_n$ 和γ_n 为待定常数。

由直接代入容易验证，$\varphi_1(r,\theta,z,t)$和 $\varphi_2(r,\theta,z,t)$满足条件式(3.1.5 a) 和(3.1.5 d)，且 $\varphi_1(r,\theta,z,t)$还满足条件式(3.1.5 b′)。现在，将 $\varphi_2(r,\theta,z,t)$代入条件式(3.1.5 c′)，得

$$\gamma_n=-\frac{J_1'(\sigma_n)}{Y_1'(\sigma_n)}=-\frac{J_1'(k'\sigma_n)}{Y_1'(k'\sigma_n)}.\tag{3.1.57}$$

从而，σ_n 是方程

$$J_1'(\sigma_n)Y_1'(k'\sigma_n)-J_1''(k'\sigma_n)Y_1'(\sigma_n)=0\tag{3.1.58}$$

的根。

现在，将式$\varphi_1(r,\theta,z,t)$和 $\varphi_2(r,\theta,z,t)$代入条件式 (3.1.5 e)，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{q}_n(t)R_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)+g\sum_{n=1}^{\infty}q_n^*(t)\frac{\sigma_n}{a}\tanh\left(\sigma_n\frac{h}{a}\right)R_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)=-r\ddot{x}_0(t).\tag{3.1.59}$$

将 r 按 $R_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)$在区间$[k'a,a]$内展开为富利叶—贝塞尔级数：

$$\frac{r}{a}=\sum_{n=1}^{\infty}A_nR_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right).\tag{3.1.60}$$

用 $rR_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)$乘上式两端，从 k' 到 1 积分，并考虑到下面等式[8]：

$$\int_{k'}^1 zc_1(\alpha z)C_1(\beta z)dz=z(\beta^2-\alpha^2)^{-1}\Big[\beta C_2(\beta z)c_1(\alpha z)-$$
$$-\alpha C_1(\beta z)c_2(\alpha z)\Big]_{k'}^1,$$
$$\int_{k'}^1 zc_1(\alpha z)C_1(\alpha z)dz=\frac{1}{4}z^2\Big[2\,c_1(\alpha z)C_1(\alpha z)-c_2(\alpha z)C_0(\alpha z)-$$
$$-c_0(\alpha z)C_2(\alpha z)\Big]_{k'}^1,$$
$$\int_{k'}^1 z^2c_1(\alpha z)dz=-\frac{z}{\alpha}\Big[zc_0(\alpha z)-\frac{2}{\alpha}c_1(\alpha z)\Big]_{k'}^1,$$
$$C_0(z)=\frac{C_1(z)}{z}+C_1'(z),\ C_2(z)=\frac{C_1(z)}{z}-C_1'(z),$$
$$c_0(z)=\frac{c_1(z)}{z}+c_1'(z),\ c_2(z)=\frac{c_1(z)}{z}-c_1'(z),$$

其中 $c_i(z)$ $(i=0,1,2)$和 $C_i(z)(i=0,1,2)$是函数 $J_i(z)$ 或 $Y_i(z)$ $(i=0,1,2)$，这时可以得到

$$A_n=\frac{2[R_1(\sigma_n)-k'R_1(k'\sigma_n)]}{(\sigma_n^2-1)R_1^2(\sigma_n)-(k_n'^2\sigma_n^2-1)R_1^2(k'\sigma_n)}.$$

将 A_n 和 γ_n 代入式(3.1.59)，得

$$r=a\sum_{n=1}^{\infty}d_n'R_1^n\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right),\tag{3.1.60′}$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
\alpha_n&=\frac{1}{R_1(\sigma_n)}=\frac{1}{J_1(\sigma_n)+\gamma_n Y_1(\sigma_n)},\quad \beta_n=\gamma_n\alpha_n,\\
d_n'&=\frac{2(1-k'R_1^n(k'\sigma_n))}{(\sigma_n^2-1)-(k'^2\sigma_n^2-1)R_1^{n2}(k'\sigma_n)},
\end{aligned}\right\}\tag{3.1.61}
$$

$$
R_1^n\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)=\alpha_n J_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)+\beta_n Y_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right).\tag{3.1.62}
$$

在表 3.1.2 中列出了 $k'=0.1$，0.2，0.3；$n=1$，2，3，4 时系数 γ_n，α_n，β_n 和 d_n' 之值。而图 3.1.10 表示 $k'=0.1$，0.2 和 0.3 时函数 $R_1^n\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)(n=1,2,3)$ 图形的变化。注

表 3.1.2

	n	σ_n	γ_n	α_n	β_n	d_n'
$k'=0.1$	1	1.80360	−0.02562	1.70300	−0.04362	0.82520
	2	5.13700	−0.19020	−2.78600	0.52980	0.08502
	3	8.19900	−0.34600	3.38900	−1.17250	0.02234
	4	11.36000	−0.35810	−3.97600	1.42390	0.02048
$k'=0.2$	1	1.70530	−0.09038	1.65700	−0.14980	0.79900
	2	4.96300	−0.37280	−2.61100	0.97340	0.11674
	3	8.43300	−0.10230	3.61700	−0.37000	0.01832
	4	12.16000	0.48440	−3.93200	−1.90480	0.02368
$k'=0.3$	1	1.58200	−0.16650	1.59300	−0.26520	0.77980
	2	5.13800	−0.18930	−2.78600	−0.52730	0.14540
	3	9.30700	0.95440	2.76500	2.63870	0.01436
	4	13.69000	−0.35000	1.81500	−4.26500	0.02320

意，这些图形是已经将 $R_1^n\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)$ 规范化了的，即在 $r=a$ 时 $R_1^n\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)$ 取值为 1。显然，为了得到函数 $R_1^n\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)$ 的真实值，需要从图形得到的值乘以

$$
R_1^n(\sigma_n)=\alpha_n J_1(\sigma_n)+\beta_n Y_1(\sigma_n).
$$

现在，把式(3.1.60′)代入式(3.1.59)，并令

$$
q_n^*(t)=ad_n'q_n(t),
$$

即得到决定 $q_n(t)$ 的方程

$$
\ddot{q}_n(t)+\tilde{\omega}^2q_n(t)=-\ddot{x}_0(t);\tag{3.1.63}
$$

对于具有粘性阻尼的液体，可以近似地得到

$$
\ddot{q}_n(t)+\nu\dot{q}_n(t)+\tilde{\omega}_n^2q_n(t)=-\ddot{x}_0(t).
$$

与式(3.1.16)和(3.1.16′)相比较，它们在形式上完全是一样的，且这时容器中液体的固有频率亦由式(3.1.17)决定。

现在，由 $\varphi_1(r,\theta,z,t)$ 和 $\varphi_2(r,\theta,z,t)$ 即可以得到速度势

$$
\Phi(r,\theta,z,t)=a\sin\theta\left[\sum_{n=1}^{\infty}\dot{q}_n(t)\frac{d_n'\cosh\left(\sigma_n\frac{z+h}{a}\right)}{\cosh\left(\sigma_n\frac{h}{a}\right)}R_1^n\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)-\frac{r\dot{x}_0(t)}{a}\right].\tag{3.1.64}
$$

将式(3.1.18)和(3.1.64)相比较可以发现，在圆柱形容器和圆环形容器的情况下，速度势的形式是相同的。因而，可以预计，圆环形容器中，液体微团之速度、表面重力波位移、容器壁和底板上的液动压力等的计算公式与对于圆柱形容器情形之相应公式具有相同的形式，只

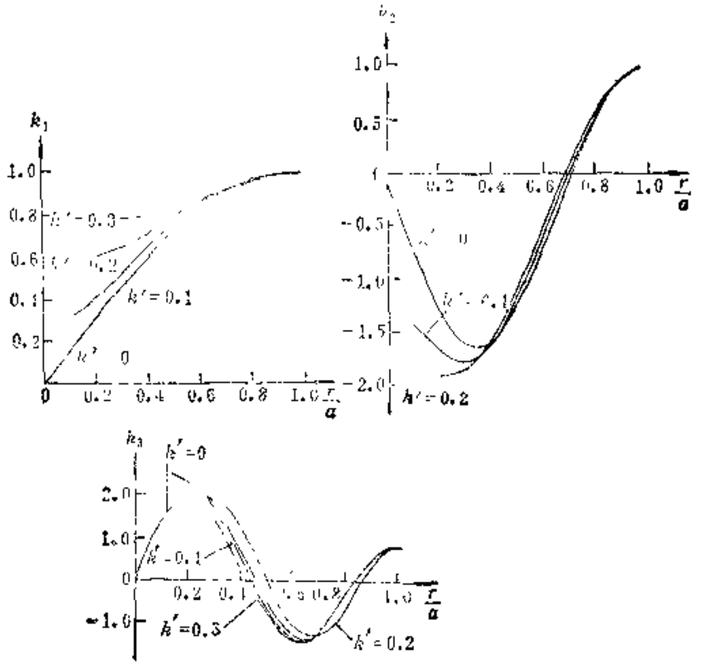


图 3.1.10

不过此时应将圆柱形容器情形里的 $J_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)\Big/J_1(\sigma_n)$和 d_n 分别换成 $R_1^n\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)$和$d_n'$，而且，当 $k'\to 0$ 时，$R_1^n\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)$和 d_n' 分别趋于 $J_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)\Big/J_1(\sigma_n)$ 和 d_n，即圆环形容器趋于圆柱形容器。

这样，可以直接写出作用于容器外壁的液动压力为

$$p^w(a,\theta,z,t)=-\rho a\sin\theta\left[\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{q}_n(t)\frac{d_n'\cosh\left(\sigma_n\frac{z+h}{a}\right)}{\cosh\left(\sigma_n\frac{h}{a}\right)}+\ddot{x}_0(t)\right]; \qquad (3.1.65)$$

作用于容器底板上的液动压力为

$$p^b(r,\theta,-h,t)=-\rho a\sin\theta\left[\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{q}_n(t)\frac{d_n'R_1^n\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)}{\cosh\left(\sigma_n\frac{h}{a}\right)}+\frac{r\ddot{x}_0(t)}{a}\right]; \qquad (3.1.66)$$

外壁上的合液动压力为

$$S=-M_l\left[\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{q}_n(t)\frac{c_n'\tanh(\sigma_n h_0)}{h_0}+\ddot{x}_0(t)\right]. \qquad (3.1.67)$$

此力之作用点至容器底板的距离 Z，则按如下公式计算：

$$Z_e = h\frac{\dfrac{\ddot{x}_0(t)}{2}+\dfrac{1}{h_0}\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{q}_n(t)c_n'\left[\tanh(\sigma_n h_0)+\dfrac{1}{\sigma_n h_0}\left(\dfrac{1}{\cosh(\sigma_n h_0)}-1\right)\right]}{\ddot{x}_0(t)+\dfrac{1}{h_0}\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{q}_n(t)c_n'\tanh(\sigma_n h_0)}. \quad (3.1.68)$$

同样，可以得到由作用于外侧壁上液动压力所产生的倾覆力矩为

$$M^w = -M_l h\left\{\frac{\ddot{x}_0(t)}{2}+\frac{1}{h_0}\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{q}_n(t)c_n'\left[\tanh(\sigma_n h_0)+\frac{1}{\sigma_n h_0}\left(\frac{1}{\cosh(\sigma_n h_0)}-1\right)\right]\right\}; \quad (3.1.69)$$

由作用于底板上之液动压力所产生的倾覆力矩为

$$M^b = -\rho a^4\pi\left[\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{q}_n(t)\frac{c_n'}{\sigma_n}\frac{[1-k'^2R_1(k'\sigma_n)]}{\cosh(\sigma_n h_0)}+\frac{(1-k'^4)\ddot{x}_0(t)}{4}\right]. \quad (3.1.70)$$

其中

$$c_n' = \frac{d_n'}{\sigma_n}.$$

对作用于内圆柱上的液动压力，可以得到类似的公式。

下面，我们仍然对周期性地面运动和脉冲运动两种情形加以讨论。

（一）周期性地面运动的情形

此时，比值 $\ddot{q}_n(t)/\ddot{x}_0(t)$ 仍然具有式(3.1.33)的形式。于是，和前面一样，可以仿效圆柱形容器情形，直接写出作用于容器侧壁上之液动压力为

$$p^w(a,\theta,z,t) = \rho a\omega^2 e^{i\omega t}\sin\theta\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta d_n'}{\sigma_n\tanh(\sigma_n h_0)-\delta}\frac{\cosh\left(\sigma_n\dfrac{z+h}{a}\right)}{\cosh\left(\sigma_n\dfrac{h}{a}\right)}+1\right]; \quad (3.1.71)$$

作用于容器底板上的液动压力为

$$p^b(r,\theta,-h,t) = \rho a\omega^2 e^{i\omega t}\sin\theta\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta d_n'}{\sigma_n\tanh(\sigma_n h_0)-\delta}\frac{R_1^n\left(\sigma_n\dfrac{r}{a}\right)}{\cosh(\sigma_n h_0)}+\frac{r}{a}\right]; \quad (3.1.72)$$

液动压力的合力为

$$S = M_l\omega^2 e^{i\omega t}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{h_0}\frac{\delta c_n'}{\sigma_n-\delta\coth(\sigma_n h_0)}+1\right]; \quad (3.1.73)$$

其作用点至容器底板的距离为

$$Z_e = h\frac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{h_0}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\delta c_n'}{\sigma_n\tanh(\sigma_n h_0)-\delta}\left[\tanh(\sigma_n h_0)+\dfrac{1}{\sigma_n h_0}\left(\dfrac{1}{\cosh(\sigma_n h_0)}-1\right)\right]}{1+\dfrac{\delta}{h_0}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{c_n'}{\sigma_n-\delta\coth(\sigma_n h_0)}}. \quad (3.1.74)$$

由作用于容器侧壁上之液动压力所产生的倾覆力矩为

$$M^w = M_l h\omega^2 e^{i\omega t}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{h_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta c_n'}{\sigma_n\tanh(\sigma_n h_0)-\delta}\left[\tanh(\sigma_n h_0)+\right.\right.$$

$$\frac{1}{\sigma_n h_0}\left(\frac{1}{\cosh(\sigma_n h_0)}-1\right)\Big]\Big\}; \tag{3.1.75}$$

由底板上液动压力所产生的倾覆力矩为

$$M^b=\rho\pi a^4\omega^2 e^{i\omega t}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta c_n'}{\sigma_n[\sigma_n\tanh(\sigma_n h_0)-\delta]}\frac{[1-k'^2R_1^n(k'\sigma_n)]}{\cosh(\sigma_n h_0)}+$$

$$+\frac{(1-k'^4)}{4}\Big]. \tag{3.1.76}$$

（二）地面脉冲运动的情形

这时，与圆柱形容器一样，有

$$\lim_{\delta\to\infty}\frac{\ddot{q}_n(t)}{\ddot{x}_0(t)}=\lim_{\delta\to\infty}\frac{\delta}{\sigma_n\tanh(\sigma_n h_0)-\delta}=-1,$$

从而，得到作用于侧壁上的液动压力为

$$p^w(a,\theta,z,t)=-\rho a\sin\theta\left[1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n'\cosh\left(\sigma_n\frac{z+h}{a}\right)}{\cosh\left(\sigma_n\frac{h_0}{a}\right)}\right]\ddot{x}_0(t); \tag{3.1.77}$$

作用在底板上之液动压力为

$$p^b(r,\theta,-h,t)=-\rho a\sin\theta\left[\frac{r}{a}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n'R_1^n\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)}{\cosh(\sigma_n h_0)}\right]\ddot{x}_0(t); \tag{3.1.77'}$$

其合液动压力为

$$S=-M_lk_1'\ddot{x}_0(t), \tag{3.1.78}$$

其中

$$k_1'=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n'}{h_0}\tanh(\sigma_n h_0). \tag{3.1.79}$$

图3.1.11中示出了 $k'=0.1$ 和 0.3 时 k_1' 随容器中贮液高度 h_0 变化的曲线。

合液动压力作用点距容器底板的距离为

$$Z_c=hk_2', \tag{3.1.80}$$

其中

$$k_2'=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{h_0}\sum_{n=1}^{\infty}c_n'\left[\tanh(\sigma_n h_0)+\frac{1}{\sigma_n h_0}\left(\frac{1}{\cosh(\sigma_n h_0)}-1\right)\right]}{1-\frac{1}{h_0}\sum_{n=1}^{\infty}c_n'\tanh(\sigma_n h_0)}. \tag{3.1.81}$$

图 3.1.12 上示出了 $k'=0.1$ 和 0.3 时 k_2' 随容器中贮液深度 h_0 变化的曲线。

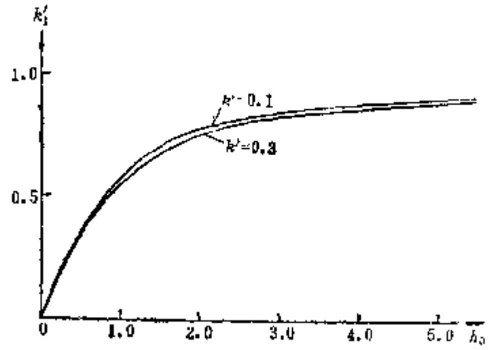


图 3.1.11

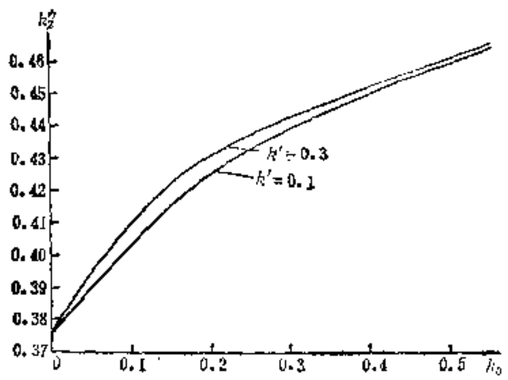


图 3.1.12

由侧壁上之液动压力所产生的倾覆力矩为

$$M^w = -M_l h k_3' \ddot{x}_0(t), \tag{3.1.82}$$

其中

$$k_3' = \frac{1}{2} - \frac{1}{h_0}\sum_{n=1}^{\infty} c_n'\left[\tanh(\sigma_n h_0) + \frac{1}{\sigma_n h_0}\left(\frac{1}{\cosh(\sigma_n h_0)} - 1\right)\right]. \tag{3.1.83}$$

图 3.1.13 中示出了$k'=0.1$ 和 0.3 时 k_3' 随 h_0 变化的曲线。

由底板上液动压力所产生的倾覆力矩为

$$M^b = -\rho a^4 \pi k_4', \tag{3.1.84}$$

其中

$$k_4' = \frac{(1-k'^4)}{4} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n'}{\sigma_n}\frac{(1-k'^2 R_1^n(k'\sigma_n))}{\cosh(\sigma_n h_0)}. \tag{3.1.85}$$

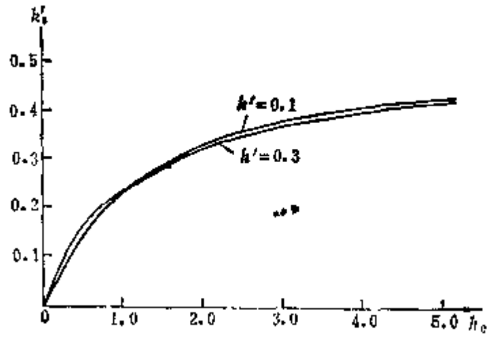


图 3.1.13

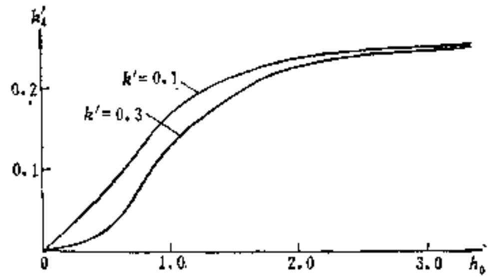


图 3.1.14

图 3.1.14 中示出了$k'=0.1$ 和 0.3 时 k_4' 随 h_0 变化的曲线。

三、矩形贮液构筑物

在工程实践中，除了圆柱形、圆环形贮液构筑物外，还经常遇到另一类贮液构筑物，其水平切面为一矩形。在文献[9]中，沃纳和森德奎斯特(Werner 和 Sundquist)证明了，对于这种三维液动问题，其速度势的确定归结为在实际计算中极不方便的包含二重级数的复杂表示式。然而，在研究地上式或地下式贮液构筑物时，与其它结构物的抗震计算相似，显然只需考虑沿容器纵向或横向运动的情形；此外，在计算支承矩形容器的构架时，大多数情形均是矩形容器的轴与构架的纵轴和横轴相重合，而我们最终需要知道的也正是由于构架纵向和横向运动所产生的液动压力值。由此可见，无论对于哪种情形，均可以将矩形贮液构筑物的液动压力问题简化为平面问题而近似地求解。

如前面两种容器一种，我们将仅考虑容器按规律 $x_0(t)$沿 x 轴作水平运动。容器和坐标轴示于图 3.1.15 。

与圆柱形容器情形一样，液体运动的速度势$\Phi(x,z,t)$可以表示为两个速度势之和：

$$\Phi(x,z,t) = \varphi_1(x,z,t) + \varphi_2(x,z,t). \tag{3.1.86}$$

φ_1 和 φ_2 应满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\varphi_1 = 0,\ \nabla^2\varphi_2 = 0, \tag{3.1.87}$$

和下列边界条件及初始条件：

$$\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right|_{x=0,a} = \dot{x}_0(t), \tag{3.1.88 a}$$

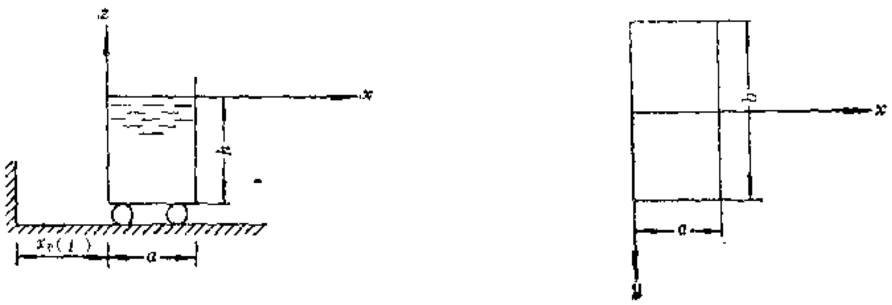


图 3.1.15

$$\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right|_{x=0,a}=0, \tag{3.1.88 b}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right|_{z=-h}=\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right|_{z=-h}=0, \tag{3.1.88 c}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right|_{z=0}+gf_2=-\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right|_{z=0}-gf_1, \tag{3.1.88 d}$$

$$(\varphi_1+\varphi_2)_{t=0}=\Phi_0,\ (\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2)_{t=0}=\dot{\varphi}_0. \tag{3.1.88e}$$

量 f_1 和 f_2 按如下公式确定：

$$\left.\begin{aligned} f_1&=\int_0^t\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right|_{z=0}dt,\\ f_2&=\int_0^t\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right|_{z=0}dt. \end{aligned}\right\} \tag{3.1.88 f}$$

我们把势 φ_1 取为形式

$$\varphi_1(x,z,t)=x\dot{x}_0(t), \tag{3.1.89}$$

而把势 φ_2 取为形式

$$\varphi_2(x,z,t)=\dot{f}^*(t)X(x)Z(z). \tag{3.1.90}$$

显然可以看出，$\varphi_1(x,z,t)$满足拉普拉斯方程及边界条件式(3.1.88 a)和(3.1.88 c)。现在，将 $\varphi_2(x,z,t)$代入方程(3.1.87)，并分离变量，我们得到如下方程：

$$X''(x)+k^2X(x)=0,$$

$$Z''(z)-k^2Z(z)=0.$$

考虑到 φ_2 需满足的边界条件，这些方程可取如下形式之解：

$$X(x)=\cos(kx),$$

$$Z(z)=\cosh k(z+h).$$

从而，$\varphi_2(x,z,t)$为

$$\varphi_2(x,z,t)=\dot{f}^*(t)\cosh k(z+h)\cos(kx).$$

$\varphi_2(x,z,t)$显然满足边界条件式(3.1.88 c)。若将 φ_2 代入条件式(3.1.88 b)，我们得到

$$k=\frac{n\pi}{a},\quad n=0,1,2,\cdots.$$

将各线性无关解按 n 取和，给出

$$\varphi_2(x,z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\dot{f}_n^*(t)\cosh\frac{n\pi(z+h)}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}.$$

由于 $f_n^*(t)$ 是未定的，我们可以用 $\cosh\frac{n\pi h}{a}$ 来乘，即设 $f_n^*(t)$ 为

$$f_n(t)=f_n^*(t)\cosh\frac{n\pi h}{a},$$

于是 φ_2 可以重新写为

$$\varphi_2(x,z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(t)\frac{\cosh\left(\frac{n\pi(z+h)}{a}\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi h}{a}\right)}\cos\frac{n\pi x}{a}. \tag{3.1.91}$$

现在，将 φ_1 和 φ_2 代入式(3.1.88 f)，算得

$$f_1=0,$$

$$f_2=\sum_{n=0}^{\infty}f_n^*(t)\frac{n\pi}{a}\tanh\frac{n\pi h}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}.$$

从而，由条件式(3.1.88 d)得到确定 $f_n(t)$ 的方程：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\ddot{f}_n(t)\cos\frac{n\pi x}{a}+g\sum_{n=0}^{\infty}f_n(t)\frac{n\pi}{a}\tanh\frac{n\pi h}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}$$
$$=-x\ddot{x}_0(t). \tag{3.1.92}$$

将 x 在区间 $[0,a]$ 内展开为 x 的余弦级数：

$$x=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{a},$$

将等式两端同时乘以 $\cos\frac{m\pi x}{a}(m=0,1,2,\cdots)$，并过区间 $[0,a]$ 积分，考虑到关系式

$$\int_0^a\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \frac{a}{2}, & m=n,\end{cases}$$

于是可得

$$a_0=\frac{2}{a}\int_0^a xdx=a,$$

$$a_n=\frac{2}{a}\int_0^a x\cos\frac{n\pi x}{a}dx=\begin{cases}0, & n=2,4,6,\cdots,\\ -\frac{4a}{n^2\pi^2}, & n=1,3,5,\cdots.\end{cases}$$

从而有

$$x=\frac{a}{2}-\frac{4a}{\pi^2}\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi x}{a}}{n^2}. \tag{3.1.93}$$

将式(3.1.93)代入式(3.1.92)，在零初始条件之下，我们得到确定 $f_n(t)$ 的如下方程组：

$$
\left.\begin{aligned}
&\ddot{f}_n(t)+\frac{gn\pi}{a}\tanh\frac{n\pi h}{a}f_n(t)=\frac{4a}{n^2\pi^2}\ddot{x}_0(t),\quad n=1,3,5,\cdots\\
&\ddot{f}_0(t)=-\frac{1}{2}a\ddot{x}_0(t),\\
&f_n(t)=0,\ n=2,4,6,\cdots.
\end{aligned}\right\}\tag{3.1.94}
$$

对于具有粘性阻尼的液体，类似地可以近似得到确定 $f_n(t)$ 的如下方程：

$$
\left.\begin{aligned}
&\ddot{f}_n(t)+\nu\dot{f}_n(t)+\frac{gn\pi}{a}\tanh\frac{n\pi h}{a}f_n(t)\\
&=\frac{4a}{n^2\pi^2}\ddot{x}_0(t),\quad n=1,3,5,\cdots,\\
&\ddot{f}_0(t)=-\frac{1}{2}a\ddot{x}_0(t),\\
&f_n(t)=0,\quad n=2,4,6,\cdots.
\end{aligned}\right\}\tag{3.1.94'}
$$

如果记

$$
\left.\begin{aligned}
&\tilde{\omega}_n^2=\frac{gn\pi}{a}\tanh\frac{n\pi h}{a},\quad b_n=\frac{4a}{n^2\pi^2}\\
&f_n(t)=-\frac{4a}{n^2\pi^2}q_n(t),\quad n=1,3,5,\cdots,
\end{aligned}\right\}\tag{3.1.95}
$$

则对于无阻尼液体，有

$$
\ddot{q}_n(t)+\tilde{\omega}_n^2q_n(t)=-\ddot{x}_0(t),\quad n=1,3,5,\cdots,\tag{3.1.96}
$$

对于阻尼液体，有

$$
\ddot{q}_n(t)+\nu\dot{q}_n(t)+\tilde{\omega}_n^2q_n(t)=-\ddot{x}_0(t),\quad n=1,3,5,\cdots.\tag{3.1.96'}
$$

这里，$\tilde{\omega}_n$ 是容器中液体的固有振动频率。

最终，液体运动之总速度势等于：

$$
\Phi(x,z,t)=\varphi_1(x,z,t)+\varphi_2(x,z,t)=
$$

$$
=-\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}b_n\dot{q}_n(t)\frac{\cosh\dfrac{n\pi(z+h)}{a}}{\cosh\dfrac{n\pi h}{a}}\cos\frac{n\pi x}{a}-\left(\frac{a}{2}-x\right)\dot{x}_0(t).\tag{3.1.97}
$$

得到了速度势 Φ，就可以对容器中液体的运动学和动力学性态作进一步讨论。首先，考虑流体微团的速度。这时，由式(1.1.8)得 x 方向上的速度

$$
\begin{aligned}
u&=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\\
&=\dot{x}_0(t)+\frac{\pi}{a}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{b_n\dot{q}_n(t)\cosh\dfrac{n\pi(z+h)}{a}}{\cosh\dfrac{n\pi h}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}
\end{aligned}\tag{3.1.98}
$$

和 z 方向上的速度

$$
\begin{aligned}
w&=\frac{\partial\Phi}{\partial z}\\
&=-\frac{\pi}{a}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}nb_n\dot{q}_n(t)\frac{\sinh\dfrac{n\pi(z+h)}{a}}{\cosh\dfrac{n\pi h}{a}}\cos\frac{n\pi x}{a}.
\end{aligned}\tag{3.1.99}
$$

再由式(1.1.16)，得到当重力波表面上压力为零时其波面的方程：

$$f=-\frac{1}{g}\left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{z=0}$$

$$=-\frac{1}{g}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}b_n\ddot{q}_n(t)\cos\frac{n\pi x}{a}-\left(\frac{a}{2}-x\right)\ddot{x}_0(t). \qquad (3.1.100)$$

若将 x 的展开式(3.1.93)代入，得

$$f=-\frac{1}{g}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}b_n\left(1+\frac{\ddot{q}_n(t)}{\ddot{x}_0(t)}\right)\ddot{x}_0(t)\cos\frac{n\pi x}{a}. \qquad (3.1.100')$$

现在，转而考虑作用于容器壁上的液动压力。这时，由式(1.1.18)得容器中液体内部任意一点处之液动压力

$$p=-\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

$$=\rho\left(\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}b_n\ddot{q}_n(t)\frac{\cosh\frac{n\pi(z+h)}{a}}{\cosh\frac{n\pi h}{a}}\cos\frac{n\pi x}{a}+\left(\frac{a}{2}-x\right)\ddot{x}_0(t)\right).$$

(3.1.101)

(在式 1.1.18 中，$-\rho gz$ 只产生静液压力，因而在求液动压力时应把它去掉)从而，得到液体在右壁上之液动压力为

$$p^w_{右}=-\rho\left(\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}b_n\ddot{q}_n(t)\frac{\cosh\frac{n\pi(z+h)}{a}}{\cosh\frac{n\pi h}{a}}+\frac{a\ddot{x}_0(t)}{2}\right), \qquad (3.1.102)$$

液体在左壁上之液动压力为

$$p^w_{左}=\rho\left(\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}b_n\ddot{q}_n(t)\frac{\cosh\frac{n\pi(z+h)}{a}}{\cosh\frac{n\pi h}{a}}+\frac{a\ddot{x}_0(t)}{2}\right), \qquad (3.1.103)$$

而作用于容器底板上之液动压力为

$$p^b=\rho\left(\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}b_n\ddot{q}_n(t)\frac{\cos\frac{n\pi x}{a}}{\cosh\frac{n\pi h}{a}}+\left(\frac{a}{2}-x\right)\ddot{x}_0(t)\right) \qquad (3.1.104)$$

或

$$p^b=\rho\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\left(1+\frac{\ddot{q}_n(t)}{\ddot{x}(t)}\frac{1}{\cosh\frac{n\pi h}{a}}\right)\ddot{x}_0(t)\cos\frac{n\pi x}{a}. \qquad (3.1.104')$$

由式(3.1.102)和(3.1.103)即可得到作用于容器壁上单位宽度的合液动压力之值：

$$S=S_{左}+S_{右},$$

其中 $S_{左}=-\int_{-h}^{0}p^w_{左}dz=$

$$=-\rho\left(\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty} b_n\ddot{q}_n(t)\ \frac{a}{n\pi}\tanh\frac{n\pi h}{a}+\frac{ah}{2}\ \ddot{x}_0(t)\right),$$

$$S_{右}=\int_{-h}^{0} p_{右}^{w} dz$$
$$=S_{左}\ .$$

于是得到

$$S=-2\rho\left(\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\ddot{q}_n(t)\frac{b_n a}{n\pi}\tanh\frac{n\pi h}{a}+\frac{ah}{2}\ddot{x}_0(t)\right). \tag{3.1.105}$$

其作用点到底板之距离 Z_c(即液体质心的坐标)由下式确定：

$$Z_c=\frac{\int_{-h}^{0} p_{右}^{w}(a,\ z,\ t)(z+h)dz}{\int_{-h}^{0} p_{右}^{w}(a,\ z,\ t)dz}$$

$$=h\frac{\dfrac{\ddot{x}_0(t)}{2}+\dfrac{2a}{\pi^2h^2}\displaystyle\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{b_n\ddot{q}_n(t)}{n^2}\left(\frac{n\pi h}{a}\tanh\frac{n\pi h}{a}+\frac{1}{\cosh\frac{n\pi h}{a}}-1\right)}{\ddot{x}_0(t)+\dfrac{2}{\pi h}\displaystyle\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{b_n\ddot{q}_n(t)}{n}\tanh\frac{n\pi h}{a}}. \tag{3.1.106}$$

同样，可以得到由液动压力所产生的倾覆力矩如下：

由侧壁上液动压力所产生的单位宽度的倾覆力矩

$$M^w=-SZ_c$$
$$=-\rho ah^2\left[\frac{\ddot{x}_0(t)}{2}+\frac{2a}{\pi^2h^2}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{b_n\ddot{q}_n(t)}{n^2}\left(\frac{n\pi h}{a}\tanh\frac{n\pi h}{a}+\frac{1}{\cosh\frac{n\pi h}{a}}-1\right)\right]. \tag{3.1.107}$$

由底板上液动压力所产生的单位宽度的倾覆力矩：

$$M^b=\int_0^a p^b(x,-h,t)x\,dx$$
$$=-\rho a^3\left(\frac{\ddot{x}_0(t)}{12}+\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{2b_n\ddot{q}_n(t)}{n^2\pi^2a}\ \frac{1}{\cosh\frac{n\pi h}{a}}\right). \tag{3.1.108}$$

下面，我们仍然分别对周期性地面运动和脉冲运动的情形进行讨论。

（一）周期性地面运动的情形

和前面对于圆柱形及圆环形贮液容器的情形一样，若地面(或容器)按照规律 $x_0(t)=e^{i\omega t}$ 作简谐运动，进行类似于第一、二小节所作的计算，我们得到方程(3.1.96)之解为

$$q_n(t)=\frac{\omega^2}{\bar{\omega}_n^2-\omega^2}e^{i\omega t},$$

从而有

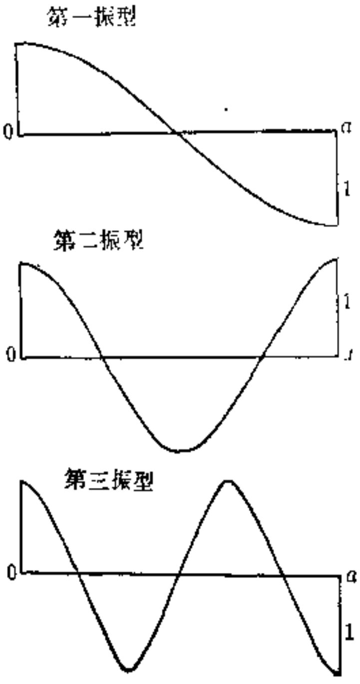


图 3.1.16

$$\frac{\ddot{q}_n(t)}{\ddot{x}_0(t)}=\frac{\omega^2}{\tilde{\omega}_n^2-\omega^2}=\frac{\delta}{n\pi\tanh(n\pi h_0)-\delta}, \tag{3.1.109}$$

式中

$$\delta=\frac{a\omega^2}{g},\quad h_0=\frac{h}{a}.$$

于是，由式(3.1.100′)得到表面重力波形状的方程

$$f=-e^{i\omega t}\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty}\frac{n\pi\delta d_n}{n\pi-\delta\coth(n\pi h_0)}\cos\frac{n\pi x}{a}, \tag{3.1.110}$$

其中

$$d_n=\frac{4}{n^2\pi^2}.$$

由此可见，当地面运动频率和容器中液体的固有振动频率相同，即当

$$\omega=\sqrt{n\pi\frac{g}{a}\tanh(n\pi h_0)}=\tilde{\omega}_n$$

时，液体将产生共振。图 3.1.16 上示出了矩形容器中液体的表面重力波之前三阶振型的形状。与圆柱形容器情形相比较(见图 3.1.2)，对于矩形容器，将同时出现反对称振型(例如第一振型和第三振型)和对称振型(例如第二振型)，而对于圆柱形容器，则将只出现反对称振型。这是矩形容器和圆柱形容器的一大不同。

对于液体作用于容器壁上的液动压力，由式(3.1.102)和(3.1.103)得：

$$p_{左}^{\omega}(a,z,t)=-a\rho\omega^2e^{i\omega t}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty}\frac{d_n\delta}{n\pi\tanh(n\pi h_0)-\delta}\,\frac{\cosh\frac{n\pi(z+h)}{a}}{\cosh\frac{n\pi h}{a}}\right). \tag{3.1.111}$$

$$p_{右}^{\omega}(a,z,t)=a\rho\omega^2e^{i\omega t}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty}\frac{d_n\delta}{n\pi\tanh(n\pi h_0)-\delta}\,\frac{\cosh\frac{n\pi(z+h)}{a}}{\cosh\frac{n\pi h}{a}}\right). \tag{3.1.112}$$

由式(3.1.104′)，得到作用于容器底板上的液动压力为

$$p^b(x,-h,t)=\frac{4a\rho\omega^2e^{i\omega t}}{\pi^2}\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(1+\frac{\delta}{n\pi\tanh(n\pi h_0)-\delta}\times\frac{1}{\cosh(n\pi h_0)}\right)\cos\frac{n\pi x}{a}. \tag{3.1.113}$$

由式(3.1.105)得出单位宽度的合液动压力为

$$S=\rho ah\omega^2e^{i\omega t}\left(1+\frac{1}{\pi h_0}\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty}\frac{2\delta d_n}{n[n\pi-\delta\coth(n\pi b_0)]}\right)=M_1\xi''\omega^2e^{i\omega t}, \tag{3.1.114}$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
&M_l=\rho a h,\\
&\xi''=1+\frac{8}{h_0\pi^3}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{\delta}{n^3(n\pi-\delta\coth(n\pi h_0))}.
\end{aligned}\right\}\qquad(3.1.115)
$$

M_l为矩形容器中单位宽度的液体质量；如同圆柱形容器那样，可把ξ''称为折算系数。量值$M_l\xi''$为液体在容器中运动时附加于容器的等效质量。比较系数ξ''和ξ(式3.1.115和3.1.42)，明显看出，系数ξ''与ξ恰好有相同的特征(图3.1.17示出了当$h_0=2$时系数ξ''随δ变化的曲线)，即随δ变化，ξ''有时为正，有时为负，而在强迫频率ω趋于液体固有振动频率$\tilde{\omega}_n$的情况下，ξ''趋于无限大，从而在共振时，有效质量和液动压力在这时取得最大值。

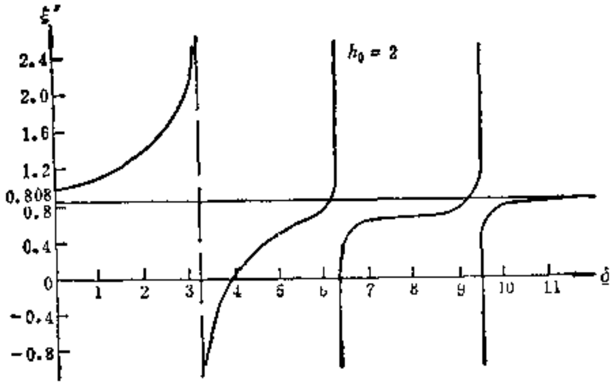


图 3.1.17

单位宽度合液动压力作用点到底板之距离(液体质心的坐标)为

$$
Z_c=h\frac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{8}{\pi^4h_0^2}\displaystyle\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{\delta}{n^2(n\pi\tanh(n\pi h_0)-\delta)}\left(n\pi h_0\tanh(n\pi h_0)+\frac{1}{\cosh(n\pi h_0)}-1\right)}{1+\dfrac{8}{\pi^3h_0}\displaystyle\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{\delta}{n^3[n\pi-\delta\coth(n\pi h_0)]}}.
$$

(3.1.116)

由式(3.1.107)，得到侧壁上液动压力所产生的单位宽度倾覆力矩为

$$
\begin{aligned}
M^w=M_l h\omega^2e^{i\omega t}\Big[\frac{1}{2}+\frac{8}{\pi^4h_0^2}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{\delta}{n^2(n\pi\tanh(n\pi h_0)-\delta)}\times\\
\times\left(n\pi h_0\tanh(n\pi h_0)+\frac{1}{\cosh(n\pi h_0)}-1\right).
\end{aligned}\qquad(3.1.117)
$$

而作用于底板上的液动压力所产生的单位宽度倾覆力矩为

$$
M^b=\rho a^3\omega^2e^{i\omega t}\left(\frac{1}{12}+\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{4\delta}{n^4\pi^4(n\pi\tanh(n\pi h_0)-\delta)}\frac{1}{\cosh(n\pi h_0)}\right).\qquad(3.1.118)
$$

(二) 地面脉冲运动的情形

和圆柱形容器情形一样，在式(3.1.109)中，若令强迫振动频率ω(从而δ)趋于无限大(即相应于容器侧壁按脉冲规律运动的情形)，则有

$$\lim_{\delta\to\infty}\frac{\ddot{q}_n(t)}{\ddot{x}_0(t)}=\lim_{\delta\to\infty}\frac{\delta}{n\pi\tanh(n\pi h_0)-\delta}=-1. \tag{3.1.119}$$

将此条件代入式(3.1.100′)可见，对于地面脉冲运动，有 $f=0$。即是说，和圆柱形容器一样，地面脉冲运动的作用和忽略液体表面重力波的影响是等效的。

将式(3.1.119)代入式(3.1.102)和(3.1.103)，得到作用于侧壁上的液动压力为

$$p_{左}^{w}=-p_{右}^{w}$$

$$=\frac{\rho a}{2}\left(1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{\cosh\dfrac{n\pi(z+h)}{a}}{n^2\cosh(n\pi h_0)}\right)\ddot{x}_0(t). \tag{3.1.120}$$

同样，得到作用于容器底板上之液动压力为

$$p^b=\frac{4\rho a}{\pi^2}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{1}{\cosh(n\pi h_0)}\right)\cos\frac{n\pi x}{a}\ddot{x}_0(t). \tag{3.1.121}$$

在冲击作用下，容器侧壁单位宽度之合液动压力为

$$S=\rho a h\left(1-\frac{8}{h_0}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^3\pi^3}\tanh(n\pi h_0)\right)\ddot{x}_0(t)$$

$$=M_l k_1''\ddot{x}_0(t), \tag{3.1.122}$$

式中

$$k_1''=1-\frac{8}{h_0}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^3\pi^3}\tanh(n\pi h_0). \tag{3.1.123}$$

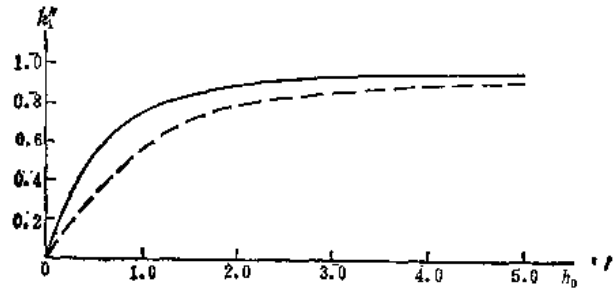


图 3.1.18

图 3.1.18 上示出了系数 k_1'' 随 h_0 变化的曲线。为了比较起见，在同一图上用虚线示出了对于圆柱形容器之系数 k_1。如从图形看出的那样，在 $h_0=2$ 以前两个系数有着明显的差别。

从式 (3.1.106) 算得作用于侧壁上之合液动压力的作用点至底板的距离为

$$Z_c=hk_2'', \tag{3.1.124}$$

式中

$$k_2''=\frac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{8}{h_0^2}\displaystyle\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^4\pi^4}\left(n\pi h_0\tanh(n\pi h_0)+\frac{1}{\cosh(n\pi h_0)}-1\right)}{1-\dfrac{8}{h_0}\displaystyle\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^3\pi^3}\tanh(n\pi h_0)}. \tag{3.1.125}$$

k_2''随 h_0 的变化曲线见图 3.1.19。为了便于比较，在同一图上亦绘出了对于圆柱形容器情形的 k_2 曲线(虚线)。

在冲击作用下，侧壁上液动压力所产生的单位宽度的倾覆力矩用下式计算：

$$M^w = -M_i k_3'' \, h \ddot{x}_0(t), \tag{3.1.126}$$

其中

$$k_3'' = \frac{1}{2} - \frac{8}{h_0^2} \sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2}\left(n\pi h_0 \tanh(n\pi h_0) + \frac{1}{\cosh(n\pi h_0)} - 1\right), \tag{3.1.127}$$

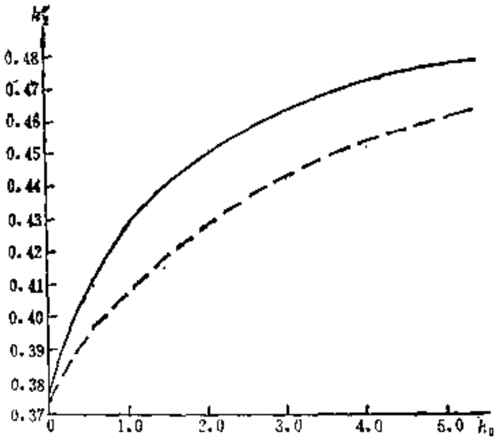


图 3.1.19

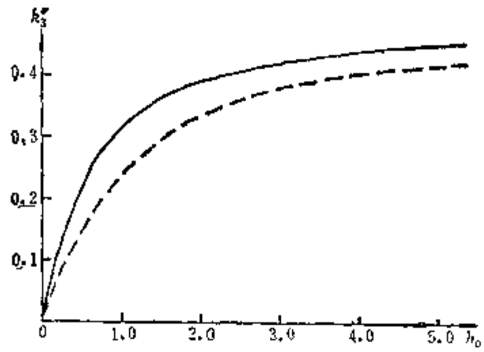


图 3.1.20

而底板上液动压力所产生的单位宽度的倾覆力矩由下式计算：

$$M^b = -\rho a^3 k_4'' \, \ddot{x}_0(t), \tag{3.1.128}$$

式中

$$k_4'' = \frac{1}{12} - \sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty} \frac{8}{n^4\pi^4} \frac{1}{\cosh(n\pi h_0)}. \tag{3.1.129}$$

图 3.1.20 中用实线示出了系数 k''_3 随 h_0 变化的曲线，用虚线示出了 k_3 的图形；而在图3.1.21 中则示出了 k''_4 随 h_0 变化的曲线。将图 3.1.21 和图 3.1.8 相比较，可见 k_4 和 k''_4 相差是很大的，k_4 约为 k''_4 的三倍，而且曲线形状亦有所不同。

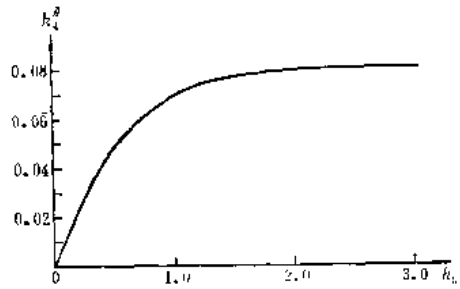


图 3.1.21

四、算例

假设在 9 度地震区有一圆柱形贮液容器，其半径 $a=10$ 米，内存重油，其单位体积重量为 $\gamma=0.8$ 吨/米^3，液面距容器底深度为 $h=13$ 米。假设容器为刚性体且其中之重油处于满液状态。试求贮液之自振周期、最大脉冲液动压力之合力及倾覆力矩。

首先，按式（3.1.17）得到计算容器中贮液自振周期的如下公式：

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{a}\sigma_i \tanh(\sigma_i h_0)}}.$$

由此，算得贮液的前两个自振周期为

$$T_1=\frac{6.28}{\sqrt{0.981\times1.84\times\tanh(1.84\times1.3)}}=4.69\text{ 秒},$$

$$T_2=\frac{6.28}{\sqrt{0.981\times5.33\times\tanh(5.33\times1.3)}}=2.75\text{ 秒}.$$

在公式 (3.1.46)、(3.1.46′)和 (3.1.47) 中，取地面运动加速度 $\ddot{x}_0(t)$ 的最大值 $|\ddot{x}_0(t)|_{max}$，并记

$$k=\frac{|\ddot{x}_0(t)|_{max}}{g},$$

它称为地震系数。另外，考虑到结构在遭受地震作用产生塑性变形时，有吸收地震能量的能力，这一能力一般用结构系数 c 来表示。于是可得到作用于容器上之液动压力的最大值。作用于侧壁上的液动压力为

$$p^{w}_{max}(a,\theta,z,t)=c\gamma a\,k\sin\theta\left[1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n\cosh\left(\frac{\sigma_n(z+h)}{a}\right)}{\cosh(\sigma_n h_0)}\right].$$

作用于底板上的液动压力为

$$p^{b}_{max}(r,\theta,-h,t)=c\gamma ak\sin\theta\left[\frac{r}{a}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_r}{\cosh(\sigma_n h_0)}\frac{J_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)}{J_1(\sigma_n)}\right];$$

合液动压力(基底剪力)为

$$S_{max}=M_l g k_1 kc.$$

同样，由公式(3.1.51)和(3.1.53)得到作用于容器侧壁上之液动压力所产生的倾覆力矩和由作用于底板上之液动压力所产生的倾覆力矩分别为

$$M^{w}_{max}=M_l g h k_3 kc,$$

和

$$M^{b}_{max}=\gamma a^4\pi k_4 kc.$$

根据我国工业与民用建筑抗震设计规范修订报告中的资料，当地震烈度为9度时，k 值取 0.4，再将 γ、a、h 之值代入以上各式，并由图 3.1.3、3.1.7 和 3.1.8，根据 $h_0=1.3$ 查得相应的 k_1、k_3、k_4 之值，取结构系数为 $c=0.4$，最后得到：

$$\begin{aligned}S_{max}&=0.8\times3.14\times10^2\times13\times0.65\times0.4\times0.4\\&=339.60\text{ 吨},\\M^{w}_{max}&=0.8\times3.14\times10^2\times13\times13\times0.25\times0.4\times0.4\\&=1698.10\text{ 吨·米},\\M^{b}_{max}&=0.8\times10^4\times3.14\times0.208\times0.4\times0.4\\&=836.00\text{ 吨·米}.\end{aligned}$$

在 $\theta=\frac{\pi}{2}$处作用于侧壁上的液动压力沿高度的分布以及作用于底板上的液动压力沿径向的分布示于图 3.1.22 和图 3.1.23 中。

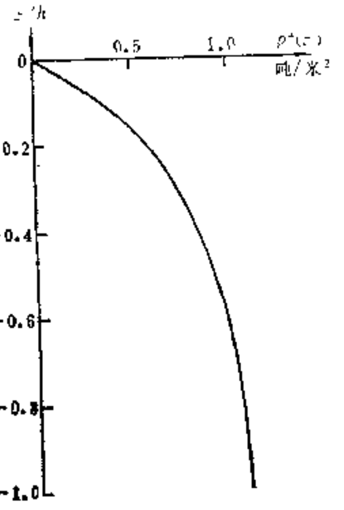


图 3.1.22

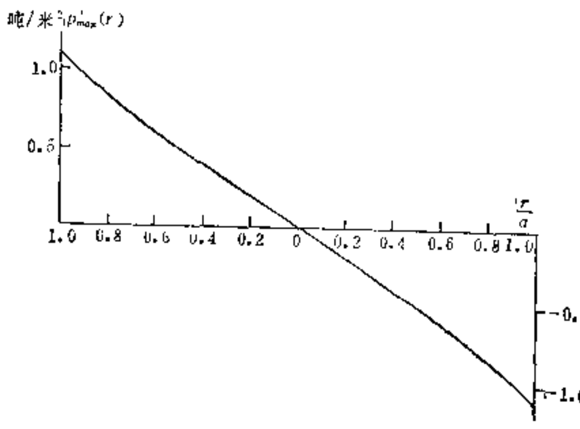


图 3.1.23

第二节　弹性贮液构筑物的动力性质

在上节中，我们对刚性贮液容器中液体在水平地面运动情况下的振动性能，以及作用于容器上的液动压力进行了讨论。证明了冲击作用与忽略表面重力波的影响是等效的。但是，任何真实的贮液容器均是弹性体，当考虑容器的弹性变形后，将使问题的求解变得更为复杂。诚然，当容器较小或刚度足够大时，将其作为刚体计算是允许的，但当遇到诸如贮油容器那样的薄壳结构时，则就应当考虑弹性变形的影响。

关于容器的弹性变形，有两种分析方法：将容器用梁来代替的简化方法和把它作为弹性薄壳的精确分析法。前一种方法比较简单，但却实用，已经有不少人作过工作[10,11]；后一种分析法当然更接近于真实情况，但比较复杂。本书中，我们仅考虑将容器简化为梁式结构的情形。

一、弹性贮液容器的液动压力

在一般的贮液容器中，液体的自振周期比较长，如在文献[12]中，报道了日本静冈县某化工厂的一个大型液化天然气贮液罐中液体的实测固有周期为 4.5 秒左右．上节第四段算例中容器内的贮液，其固有周期亦为 4 秒多些。而对于天然地震，其卓越周期大多在 1 秒以下，与贮液的基本固有周期相比，小了很多。因此，可以近似地认为地面运动为脉冲形式，从而可以忽略表面重力波的影响；不过，应当指出，当地震波谱中长周期成分占了很大的优势时(例如新潟地震的卓越周期就超过了 4 秒)，如果遇到这种情况，则不能再忽略表面波的影响，否则将引起较大的误差。

（一）圆环形容器的情形

前面已指出，在忽略表面重力波影响的情况下，圆环形容器(图 3.1.9)中贮液运动的速度势 φ 应满足如下的拉普拉斯方程和边界条件：

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0, \tag{3.2.1}$$

$$\frac{\partial\varphi(k'a,\theta,z,t)}{\partial r}=[\dot{x}_0(t)+\dot{u}_{k'a}(z,t)]\sin\theta, \tag{3.2.2a}$$

$$\frac{\partial\varphi(a,\theta,z,t)}{\partial r}=[\dot{x}(t)+\dot{u}_a(z,t)]\sin\theta, \tag{3.2.2b}$$

$$\frac{\partial\varphi(r,\theta,-h,t)}{\partial z}=0, \tag{3.2.2c}$$

$$\frac{\partial\varphi(r,\theta,0,t)}{\partial t}=0, \tag{3.2.2d}$$

$$\frac{\partial\varphi(r,\frac{\pi}{2},t)}{\partial\theta}=\frac{\partial\varphi(r,-\frac{\pi}{2},t)}{\partial\theta}=0. \tag{3.2.2e}$$

式中 $\dot{x}_0(t)$和 $\dot{u}(z,t)$分别为地面运动速度和弹性变形速度。

为考虑侧壁变形情况下速度势的表示式，我们把结构物的弹性变形按振型展为如下级数：

$$\left.\begin{aligned}u_a(z,t)&=\sum_{i=1}^{\infty}q_i(t)X_i^a(z),\\ u_{k'a}(z,t)&=\sum_{i=1}^{\infty}q_i(t)x_i^{k'a}(z).\end{aligned}\right\} \tag{3.2.3}$$

由于我们把贮液容器作为梁式结构处理，因此，在侧向力作用下，只能激发梁型的振型，而不会出现截面变形的环向振型。按第一节方法，把速度势φ表示为

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2,$$

其中φ_1是由于刚体运动所产生的速度势，φ_2是侧壁变形所产生的速度势。把φ_2表示为

$$\varphi_2=\sum_{i=1}^{\infty}\dot{q}_i(t)R(r)\Theta(\theta)Z(z),$$

其中 $u_a(z,t)$和 $u_{k'a}(z,t)$分别为外柱壁和内柱壁的变形，$X_i^a(Z)$、$X_i^{k'a}(z)$ 分别为外柱和内柱的振型函数，$q_i(t)$为广义座标，将φ_2代入式(3.2.1)并分离变量，得

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\Theta=0,\qquad \frac{d^2Z}{dz^2}+s^2Z=0,$$

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}-\left(s^2+\frac{1}{r^2}\right)R=0.$$

考虑到边界条件式(3.2.2a)和(3.2.2d)，上述方程之解可以取为

$$\Theta(\theta)=\sin\theta,\ Z(z)=\cos s(z+h),$$

$$R(r)=AI_1(sr)+BK_1(sr),$$

式中 $I_1(sr)$和 $K_1(sr)$分别为第一类和第二类修正贝塞尔函数。显然，由这样的 R、Θ、Z 三者乘积所形成的φ_2，满足边界条件式(3.2.2d)和(3.2.2e)。由条件式(3.2.2c)得到

$$s=\frac{n\pi}{2h},\ n=1,3,5,\cdots$$

于是，将相应于每个 n值的解进行组合，得到如下的解：

$$\varphi_2(r,\theta,z,t)=\sum_{i=1}^{\infty}q_i(t)\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\sin\theta\Big[A_{in2}I_1\left(\frac{n\pi}{2h}r\right)+B_{in2}K_1\times$$

$$\times\left(\frac{n\pi}{2h}r\right)\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}. \tag{3.2.4}$$

为了确定待定常数 A_{jn2} 和 B_{jn2}，我们利用条件式(3.2.2a)和(3.2.2b)，得到

$$\sum_{j=1}^{\infty}\dot{q}_j(t)\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{n\pi}{2h}\sin\theta\left[A_{jn2}I'_1\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)+B_{jn2}K'_1\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)\right]\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}=\sum_{j=1}^{\infty}\sin\theta\,\dot{q}_jX_j^a(z),$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\dot{q}_j(t)\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{n\pi}{2h}\sin\theta\left[A_{jn2}I'_1\left(\frac{n\pi}{2h}k'a\right)+B_{jn2}K'_1\left(\frac{n\pi}{2h}k'a\right)\right]\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}=\sum_{j=1}^{\infty}\sin\theta\,\dot{q}_j(t)X_j^{k'a}(z),$$

将以上二式两端同乘以 $\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}$，并从 $-h$ 到 0 积分，得到

$$\frac{n\pi}{4}\left[A_{jn2}I'_1\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)+B_{jn2}K'_1\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)\right]=\int_{-h}^{0}X_j^a(z)\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz$$

$$\frac{n\pi}{4}\left[A_{jn2}I'_1\left(\frac{n\pi}{2h}k'a\right)+B_{jn2}K'_1\left(\frac{n\pi}{2h}k'a\right)\right]=\int_{-h}^{0}X_j^{k'a}(z)\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz$$

对 A_{jn2} 和 B_{jn2} 求解得到

$$\left.\begin{aligned}A_{jn2}&=\frac{4\int_{-h}^{0}\left[K'_1\left(\frac{n\pi}{2h}k'a\right)X_j^a(z)-K'_1\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)X_j^{k'a}(z)\right]\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz}{n\pi\left[I'_1\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)K'_1\left(\frac{n\pi}{2h}k'a\right)-I'_1\left(\frac{n\pi k'a}{2h}\right)K'_1\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)\right]},\\B_{jn2}&=\frac{4\int_{-h}^{0}\left[I'_1\left(\frac{n\pi}{2h}k'a\right)X_j^a(z)-I'_1\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)X_j^{k'a}(z)\right]\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz}{n\pi\left[I'_1\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)K'_1\left(\frac{n\pi}{2h}k'a\right)-I'_1\left(\frac{n\pi}{2h}k'a\right)K'_1\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)\right]}.\end{aligned}\right\} \tag{3.2.5}$$

将它们代回式(3.2.4)，得到

$$\begin{aligned}\varphi_2(r,\theta,z,t)=&\sum_{j=1}^{\infty}\dot{q}_j(t)\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{4c_n}{n\pi}\left[I_1\left(\frac{n\pi}{2h}r\right)\int_{-h}^{0}\left[K'_1\left(\frac{n\pi}{2h}k'a\right)X_j^a(z)-\right.\right.\\&-K'_1\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)X_j^{k'a}(z)\Big]\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz-K_1\left(\frac{n\pi}{2h}r\right)\int_{-h}^{0}\Big[I'_1\left(\frac{n\pi}{2h}k'a\right)X_j^a(z)-\\&\left.\left.-I'_1\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)X_j^{k'a}(z)\right]\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz\right]\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h},\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

其中

$$c_n=\frac{1}{I'_1\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)K'_1\left(\frac{n\pi}{2h}k'a\right)-I'_1\left(\frac{n\pi}{2h}k'a\right)K'_1\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)}. \tag{3.2.7}$$

而 $I'_1(\alpha a)$ 和 $K'_1(\alpha a)$ 为

$$I_1'(\alpha a)=I_0(\alpha a)-\frac{1}{\alpha a}I_1(\alpha a),$$

$$K_1'(\alpha a)=-\left[K_0(\alpha a)+\frac{1}{\alpha a}K_1(\alpha a)\right].$$

现在，我们来讨论由于刚体运动 $\dot{x}_0(t)$所产生的速度势 φ_1。并将其表示为

$$\varphi_1(r,\theta,z,t)=\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\dot{x}_0(t)\sin\theta\left[A_{n1}I_1\left(\frac{n\pi}{2h}r\right)+B_{n1}K_1\left(\frac{n\pi}{2h}r\right)\right]\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}.$$

将它代入边界条件式(3.2.2 a)和(3.2.2 b)得到

$$\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{n\pi}{2h}\left[A_{n1}I_1'\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)+B_{n1}K_1'\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)\right]\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}=1,$$

$$\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{n\pi}{2h}\left[A_{n1}I_1'\left(\frac{n\pi}{2h}k'a\right)+B_{n1}K_1'\left(\frac{n\pi}{2h}k'a\right)\right]\cos\frac{n\pi}{2h}(z+h)=1.$$

将上二式两端同乘以 $\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}$，并从 $-h$ 到 0 积分，得到

$$\frac{n\pi}{4}\left[A_{n1}I_1'\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)+B_{n1}K_1'\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)\right]=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{2h}{n\pi},$$

$$\frac{n\pi}{4}\left[A_{n1}I_1'\left(\frac{n\pi}{2h}k'a\right)+B_{n1}K_1'\left(\frac{n\pi}{2h}k'a\right)\right]=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{2h}{n\pi}.$$

于是，得出

$$A_{n1}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{8h}{n^2\pi^2}c_n\left[K_1'\left(\frac{n\pi}{2h}k'a\right)-K_1'\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)\right],$$

$$B_{n1}=-(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{8h}{n^2\pi^2}c_n\left[I_1'\left(\frac{n\pi}{2h}k'a\right)-I_1'\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)\right].$$

从而得到

$$\varphi_1(r,\theta,z,t)=\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{8hc_n}{n^2\pi^2}\left\{I_1\left(\frac{n\pi}{2h}r\right)\left[K_1'\left(\frac{n\pi}{2h}k'a\right)-K_1'\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)\right]-\right.$$
$$\left.-K_1\left(\frac{n\pi}{2h}r\right)\left[I_1'\left(\frac{n\pi}{2h}k'a\right)-I_1'\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)\right]\right\}\dot{x}_0(t)\sin\theta\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}. \qquad (3.2.8)$$

最后，由式(3.2.6)和(3.2.7)得到总速度势为

$$\varphi(r,\theta,z,t)=\varphi_1(r,\theta,z,t)+\varphi_2(r,\theta,z,t)=$$
$$=\sin\theta\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{4c_n}{n\pi}\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}\left[\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}2h}{n\pi}\dot{x}_0(t)\left\{I_1\left(\frac{n\pi}{2h}r\right)\left[\right.\right.\right.$$
$$\left.K_1'\left(\frac{n\pi}{2h}k'a\right)-K_1'\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)\right]-K_1\left(\frac{n\pi}{2h}r\right)\left[I_1'\left(\frac{n\pi}{2h}k'a\right)-I_1'\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)\right]\right\}+$$
$$+\sum_{s=1}^{\infty}\dot{q}_s(t)\left\{I_1\left(\frac{n\pi}{2h}r\right)\int_{-h}^{0}\left[K_1'\left(\frac{n\pi}{2h}k'a\right)X_s^a(z)-K_1'\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)X_s^{k'a}(t)\right]\cdot\right.$$
$$\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz-K_1\left(\frac{n\pi}{2h}r\right)\int_{-h}^{0}\left[I_1'\left(\frac{n\pi}{2h}k'a\right)X_s^a(z)-\right.$$
$$\left.\left.\left.-I_1'\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)X_s^{k'a}(z)\right]\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz\right\}\right]. \qquad (3.2.9)$$

得出了容器贮液的速度势，即可由

$$p=-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

求得作用于容器外壁上的液动压力为

$$p_a^w(a,\theta,z,t)=-\rho\sin\theta\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{4c_n}{n\pi}Q_n(a,t)\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}, \tag{3.2.10}$$

式中

$$\begin{aligned}Q_n(x,t)=&(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{2h}{n\pi}\ddot{x}_0(t)\Big\{I_1\Big(\frac{n\pi}{2h}x\Big)\Big[K_1'\Big(\frac{n\pi}{2h}k'a\Big)-K_1'\Big(\frac{n\pi}{2h}a\Big)\Big]-\\&-K_1\Big(\frac{n\pi}{2h}x\Big)\Big[I_1'\Big(\frac{n\pi}{2h}k'a\Big)-I_1'\Big(\frac{n\pi}{2h}a\Big)\Big]\Big\}+\sum_{j=1}^{\infty}\ddot{q}_j(t)\Big\{I_1\Big(\frac{n\pi}{2h}x\Big)\\&\int_{-h}^{0}\Big[K_1'\Big(\frac{n\pi}{2h}k'a\Big)X_j^a(z)-K_1'\Big(\frac{n\pi}{2h}a\Big)X_j^{k'a}(z)\Big]\cos\frac{n\pi(z-h)}{2h}dz-\\&-K_1\Big(\frac{n\pi}{2h}x\Big)\int_{-h}^{0}\Big[I_1'\Big(\frac{n\pi}{2h}k'a\Big)X_j^a(z)-I_1'\Big(\frac{n\pi}{2h}a\Big)X_j^{k'a}(z)\Big]\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz\Big\}.\end{aligned}$$

作用在单位高度上的合液动压力为

$$\begin{aligned}S_a^0=&\int_0^{2\pi}p_a^w(a,\theta,z,t)a\sin\theta d\theta\\=&-\rho a\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{4c_n}{n}Q_n(a,t)\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h},\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

总合液动压力为

$$S_a=\int_{-h}^{0}S_a^0dz=-\frac{8\rho a h}{\pi}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{c_n}{n^2}Q_n(a,t). \tag{3.2.12}$$

作用于容器内壁（内柱）上的液动压力为

$$p_{k'a}^w(k'a,\theta,z,t)=-\rho\sin\theta\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{4c_n}{n\pi}Q_n(k'a,t)\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}, \tag{3.2.13}$$

单位高度上的合液动压力为

$$S_{k'a}^0=-\rho k'a\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{4c_n}{n}Q_n(k'a,t)\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}, \tag{3.2.14}$$

总合液动压力为

$${}_{k'a}=-\frac{8\rho k'ah}{\pi}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{c_n}{n^2}Q_n(k'a,t), \tag{3.2.15}$$

从而求得总液动压力为

$$S=S_a+S_{k'a}.$$

同样，可由式(3.2.9)求得作用于容器底板上的液动压力

$$p^b(r,\theta,-h,t)=-\rho\sin\theta\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{4c_n}{n\pi}Q_n(r,t), \tag{3.2.16}$$

现在我们来求作用于容器壁上的倾覆力矩。作用于外侧壁液动压力所产生的倾覆力矩为

$$M_a^w=\int_{-h}^{0} S_a^0(z+h)dz=-\frac{16\,a\rho h^2}{\pi^2}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{c_n}{n^3}\left[(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n\pi}{2}-1\right]Q_n(a,t),\tag{3.2.17}$$

而由作用于内侧壁上液动压力所产生的倾覆力矩为

$$M_{k'a}^w=-\frac{16\,\rho k'ah^2}{\pi^2}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{c_n}{n^3}\left[(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n\pi}{2}-1\right]Q_n(k'a,t),\tag{3.2.18}$$

作用于容器底板上液动压力所产生的倾覆力矩为

$$\begin{aligned}M^b&=\int_{k'a}^{a}\int_0^{2\pi}p^b(r,\theta,-h,t)r^2\sin\theta d\theta dr\\&=-\frac{8\,\rho a^2h}{\pi}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{c_n}{n^2}\left[(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{2h}{n\pi}\ddot{x}_0(t)\left\{\left[I_2\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)-\right.\right.\right.\\&\left.-k'^2I_2\left(\frac{n\pi}{2h}k'a\right)\right]\cdot\left[K_1'\left(\frac{n\pi}{2h}k'a\right)-K_1'\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)\right]+\left[K_2\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)-\right.\\&\left.-k'^2K_2\left(\frac{n\pi}{2h}k'a\right)\right]\left[I_1'\left(\frac{n\pi}{2h}k'a\right)-I_1'\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)\right]\Big\}+\sum_{j=1}^{\infty}\ddot{q}(t)\Big\{\left[I_2\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)-\right.\\&\left.-k'^2I_2\left(\frac{n\pi}{2h}k'^2a\right)\right]\int_{-h}^{0}\left[K_1'\left(\frac{n\pi}{2h}k'a\right)X_j^a(z)-K_1'\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)X^{k'a}(z)\right]\times\\&\times\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz+\left[K_2\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)-k'^2K_2\left(\frac{n\pi}{2h}k'a\right)\right]\int_{-h}^{0}\left[I_1'\times\right.\\&\left.\times\left(\frac{n\pi}{2h}k'a\right)X_j^a(z)-I_1'\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)X_j^{k'a}(z)\right)\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz\Big\}\Big].\end{aligned}\tag{3.2.19}$$

（二）圆柱形容器的情形

圆柱形容器是圆形环容器当内柱直径等于零时的特殊情况，因而，对于圆柱形容器内的液动压力、倾覆力矩等可以由圆环形容器的相应公式令内径，即令 k' 趋于零求得。对于圆柱体结构，内外均有液体时的分析，我们还将在第六章中详细讨论，这里推导从简。若将弹性位移 $u(z,t)$ 按振型 $X_j(z)$ 展开，即

$$u(z,t)=\sum_{j=1}^{\infty}q_j(t)X_j(z),\tag{3.2.20}$$

并经过一系列相同的运算，可求得作用于侧壁的液动压力为

$$p^w(a,\theta,z,t)=-\rho\sin\theta\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{4}{n\pi}W_n(a,t)\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h},\tag{3.2.21}$$

式中

$$\begin{aligned}W_n(x,t)=\frac{I_1\left(\frac{n\pi}{2h}x\right)}{I_1'\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)}\Big[&(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{2h}{n\pi}\ddot{x}_0(t)+\\&+\sum_{j=1}^{\infty}\ddot{q}_j(t)\int_{-h}^{0}X_j(z)\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz\Big].\end{aligned}$$

作用于单位长度上的合液动压力为

$$S^0(z,t)=\int_0^{2\pi} p^w(a,\theta,z,t)a\sin\theta d\theta$$

$$=-\rho a\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{4}{n}W_n(a,t)\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}, \tag{3.2.22}$$

总合力为

$$S=\int_{-h}^{0}S^0(z,t)dz=-\frac{8\rho a h}{\pi}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{n^2}W_n(a,t). \tag{3.2.23}$$

作用于容器底板上的液动压力为

$$p^b(r,\theta,-h,t)=-\rho\sin\theta\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{4}{n\pi}W_n(r,t). \tag{3.2.24}$$

作用于侧壁上液动压力所产生的倾覆力矩为

$$M^w=\int_{-h}^{0}S^0(z,t)dz=-\frac{16\rho a h^2}{\pi^2}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left[(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n\pi}{2}-1\right]W_n(a,t). \tag{3.2.25}$$

作用于底板上液动压力所产生的倾覆力矩为

$$M^b=\int_0^{2\pi}\int_0^{a}p^b(r,\theta,-h,t)r^2\sin\theta d\theta dr=$$

$$=-\frac{8\rho a^2 h}{\pi}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{I_2\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)}{I_1'\left(\frac{n\pi}{2h}a\right)}\left[(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{2h}{n\pi}\ddot{x}_0(t)+\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{\infty}\ddot{q}_s(t)\int_{-h}^{0}X_s(z)\cos\frac{n\pi(z-h)}{2h}dz\right]. \tag{3.2.26}$$

（三）矩形容器的情况

在矩形容器的情况下，贮液运动的速度势满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \tag{3.2.27}$$

和下列边界条件(见图 3.1.15)：

$$\frac{\partial\varphi(0,z,t)}{\partial x}=\frac{\partial\varphi(a,z,t)}{\partial x}=\dot{x}_0+\dot{u}(z,t), \tag{3.2.28 a}$$

$$\frac{\partial\varphi(x,-h,t)}{\partial z}=0, \tag{3.2.28 b}$$

$$\frac{\partial\varphi(x,0,t)}{\partial t}=0. \tag{3.2.28 c}$$

首先，考虑侧壁变形情况下的速度势φ_s。和前面一样，把容器的弹性变形按振型函数展开为

$$u(z,t)=\sum_{s=1}^{\infty}q_s(t)X_s(z), \tag{3.2.29}$$

并把速度势表示为

$$\varphi_2(x,z,t)=\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j(t)H(x)Z(z). \tag{3.2.30}$$

将 φ_2 代入式(3.2.28)中，得到

$$H''(x)-s^2H(x)=0,$$
$$Z''(z)+s^2Z(z)=0.$$

其解为

$$H(x)=A\sinh(sx)+B\cosh(sx),$$
$$Z(z)=\cos[s(z+h)].$$

可见，边界条件式(3.2.28b) 可满足。而由边界条件式(3.2.28c)得到

$$s=\frac{n\pi}{2h},\ (n=1,3,5,\cdots).$$

根据解的线性组合，得到速度势

$$\varphi_2(x,z,t)=\sum_{j=1}^{\infty}\dot{q}_j(t)\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\left[A_{jn}\sinh\left(\frac{n\pi x}{2h}\right)+B_{jn}\cosh\left(\frac{n\pi x}{2h}\right)\right]\times\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h},$$

其中待定常数 A_{jn} 和 B_{jn} 由条件式 (3.2.28a) 确定，由该条件可得下面方程组：

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{n\pi}{2h}A_{jn}\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}=X_j(z),\\&\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{n\pi}{2h}\left[A_{jn}\cosh\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)+B_{jn}\sinh\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\right]\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}=X_j(z).\end{aligned}\right\} \tag{3.2.31}$$

将上式两端同乘以 $\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}$ 并以 $-h$ 到 0 进行积分，经过相应运算后，得到

$$A_{jn}=\frac{4}{n\pi}\int_{-h}^{0}X_j(z)\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz,$$

$$B_{jn}=\frac{4}{n\pi}\left[\operatorname{csch}\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)-\coth\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\right]\int_{-h}^{0}X_j(z)\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz.$$

从而得到速度势的表达式为

$$\begin{aligned}\varphi_2(x,z,t)=&\sum_{j=1}^{\infty}\dot{q}_j(t)\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{4}{n\pi}\left\{\sinh\left(\frac{n\pi x}{2h}\right)+\left[\operatorname{csch}\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)-\coth\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\right]\cdot\right.\\&\left.\cdot\cosh\left(\frac{n\pi x}{2h}\right)\right\}\cdot\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}\int_{-h}^{0}X_j(z)\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz.\end{aligned} \tag{3.2.32}$$

对于由刚体运动 $\dot{x}_0(t)$所产生的速度φ_1，可以得到

$$\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{n\pi}{2h}A_{jn}\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}=1,$$

$$\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{n\pi}{2h}\left[A_{jn}\cosh\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)+B_{jn}\sinh\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\right]\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}=1.$$

将上式两端同乘以 $\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}$ 并从 $-h$ 到 0 进行积分，进行相应运算后得到

$$A_{jn}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{8h}{n^2\pi^2},$$

$$B_{1n}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{8h}{n^2\pi^2}\left[\operatorname{csch}\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)-\coth\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\right].$$

从而得到

$$\varphi_1(x,z,t)=\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\dot{x}_0(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{8h}{n^2\pi^2}\left\{\sinh\left(\frac{n\pi x}{2h}\right)+\left[\operatorname{csch}\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\coth\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\right]\cosh\left(\frac{n\pi x}{2h}\right)\right\}\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}. \tag{3.2.33}$$

这样，得到总速度势为

$$\varphi(x,z,t)=\varphi_1(x,z,t)+\varphi_2(x,z,t)$$
$$=\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{4}{n\pi}\left\{\sinh\left(\frac{n\pi x}{2h}\right)+\left[\operatorname{csch}\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)-\coth\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\right]\right.$$
$$\left.\cosh\left(\frac{n\pi x}{2h}\right)\right\}\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}\cdot\left[(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{2h}{n\pi}\dot{x}_0(t)+\sum_{j=1}^{\infty}\dot{q}_j(t)\right.$$
$$\left.\int_{-h}^{0}X_j(z)\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz\right]. \tag{3.2.34}$$

得到了速度势，就可以求得作用于容器左侧壁的液动压力为

$$p_0^w(0,z,t)=-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_{x=0}=-\rho\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{4}{n\pi}\left[\operatorname{csch}\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)-\right.$$
$$\left.\coth\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\right]A_n(t)\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}, \tag{3.2.35}$$

式中

$$A_n(t)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{2h}{n\pi}\ddot{x}_0(t)+\sum_{j=1}^{\infty}\ddot{q}_j(t)\int_{-h}^{0}X_j(z)\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz,$$

作用于右侧壁的液动压力为

$$p_a^w(a,z,t)=-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_{x=a}=-p_0^w(0,z,t)$$
$$=\rho\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{4}{n\pi}\left[\operatorname{csch}\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)-\coth\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\right]A_n(t)\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}.$$

(3.2.35)

这样，得到容器侧壁上单位高度上的总液动压力为

$$S^0(z,t)=b[p_a^w(a,z,t)-p_0^w(0,z,t)]$$
$$=-2\rho b\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{4}{n\pi}\left[-\operatorname{csch}\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)+\coth\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\right]A_n(t)\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}. \tag{3.2.36}$$

式中 b 为矩形容器的宽度(见图 3.1.15)作用于侧壁上的总液动压力为

$$S=\int_{-h}^{0}S^0(z,t)dt$$

$$\frac{16\rho bh}{\pi^2}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{n^2}\left[-\operatorname{csch}\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)+\coth\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\right]A_n(t). \quad (3.2.37)$$

同样，可以得出作用于容器底板上的液动压力为

$$p^b(x,-h,t)=\rho\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{4}{n\pi}\left[\sinh\left(\frac{n\pi x}{2h}\right)+\left[\operatorname{csch}\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)-\coth\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\cosh\left(\frac{n\pi x}{2h}\right)\right]A_n(t). \quad (3.2.38)$$

最后，我们求出作用于容器侧壁上的倾覆力矩为

$$M^w=\int_{-h}^{0}S^0(z,t)(z+h)dz$$

$$=-\frac{32\rho bh^2}{\pi^3}\sum_{n=1,3,}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left((-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n\pi}{2}-1\right)\left[-\operatorname{csch}\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)+\coth\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\right]A_n(t)$$

$$(3.2.29)$$

同样，作用于底板上液动压力所产生的倾覆力矩为

$$M^b=\int_0^a p^b(x,-h,t)x\,dx$$

$$=-\frac{8\rho bh}{\pi^2}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left\{a+\frac{4h}{n\pi}\left[\operatorname{csch}\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)-\coth\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\right]\right\}A_n(t). \quad (3.2.40)$$

从上述结果可见，这些待求量均和自振特性有关，因此，在下节中我们将对贮液容器的自振特性进行研讨。

二、贮液容器的自振特性

本书仅讨论地上式容器。对于地下埋藏式容器，除了在容器的内表面上作用有液动压力外，其外表面上还作用有由于地震所产生的土动压力。这两种类型容器，除了作用于其上的外力不同外，分析方法完全是相同的。至于半埋式贮液容器和容器中液体未完全充满的情形，则只是边界条件有所差异而已。

这里我们把贮液容器简化为剪切梁结构。考虑到贮液容器一般说来其高度与横向尺寸之比值均不太大，属于所谓"矮胖"结构，因此，作这样的简化是合理的。

从式(2.3.1)及结构动力学可知[14]等截面剪切梁的运动方程为

$$\rho_1 F\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2}=\frac{GF}{K_0}\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2}+S^0(z,t).$$

考虑 $u(z,t)$ 按 j 振型作自由振动，这时，

$$u(z,t)=e^{i\omega_j t}X_j(z),$$

由该运动所产生的液动压力为

$$S^0(z,t)=e^{i\omega_j t}S_j^0(z).$$

将它们代入运动方程，得到

$$\frac{GF}{K_0}\frac{d^2X_j(z)}{dz^2}+\omega_j^2\rho_1 FX_j(z)+S_j^0(z)=0 \quad (3.2.41)$$

边界条件为：

$$X_j(z)|_{z=-h}=0,\quad \left.\frac{d\overline{X}_j}{dz}\right|_{z=0}. \tag{3.2.42}$$

其中，G为材料的剪切弹性模量，F为梁的截面积，K_0为剪力截面系数，ρ_1为材料的质量密度，$X_j(z)$为容器充满液体时的振型，ω_j为与$X(z)$相应的固有频率．$S^0(z,t)$为作用于容器壁上每单位高度的液动压力。

从自振方程(3.2.41)可以看出，液动压力的作用，就等同于在贮液容器上加上一附加质量。

下面，我们对圆环形、圆柱形和矩形三种容器形式分别进行讨论。

（一）圆环形容器的情形

对于圆环形容器，如前面所述，假定它作剪切振动，因而其外柱和内柱具有相同的振型形式。现在，令此振型为$X_j(z)$。

在容器自振的情况下，取地面运动加速度$\ddot{x}_0(t)$等于零。于是，从式(3.2.11)得出容器h按第j振型振动时，作用于外柱侧壁上单位长度的液动压力为

$$\begin{aligned}S_j^0(z)=4\rho a\omega_j^2\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{c_n}{n}\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}\left\{I_1\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\left[K_1'\left(\frac{n\pi k'a}{2h}\right)-K_1'\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\right]-\right.\\ \left.-K_1\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\left[I_1'\left(\frac{n\pi k'a}{2h}\right)-I_1'\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\right]\right\}\int_{-h}^{0}X_j(z)\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz.\end{aligned} \tag{3.2.43}$$

将$S_j^0(z)$代入式(3.2.41)得

$$\begin{aligned}D[X_j(z)]+\rho_1F\omega_j^2X_j(z)+4\rho a\omega_j^2\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{c_n}{n}\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}\\ \left\{I_1\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\left[K_1'\left(\frac{n\pi k'a}{2h}\right)-K_1'\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\right]-K_1\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\left[I_1'\left(\frac{n\pi k'a}{2h}\right)-\right.\right.\\ \left.\left.-I_1'\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\right]\right\}\int_{-h}^{0}X_j(z)\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz=0,\end{aligned} \tag{3.2.44}$$

其中

$$D[X_j(z)]=\frac{GF}{K_0}\frac{d^2X_j(z)}{dz^2}. \tag{3.2.45}$$

现在，我们把满水振型$X_j(z)$按无水振型$\overline{X}_i(z)$进行展开：

$$X_j(z)=\sum_{i=1}^{\infty}A_{ji}\overline{X}_i(z), \tag{3.2.46}$$

式中A_{ji}是展开时的系数，而$X_i(z)$应满足无水时的自振方程

$$D[\overline{X}_i(z)]+\omega_{0i}^2\rho_1F\overline{X}_i(z)=0 \tag{3.2.47}$$

以及边界条件式(3.2.42)。ω_{0i}是无水时的自振圆频率。方程(3.2.47)的求解已在许多与结构动力学有关的书籍中讨论过了[14]，下面仅列出它们的结果：

由式(3.2.45)和(3.2.46)得

$$D[X_j(z)]=\sum_{i=1}^{\infty}A_{ji}D[\overline{X}_i(z)]$$

$$-\sum_{i=1}^{\infty} A_{ji}\omega_{0i}^2\rho_1 F\overline{X}_i(z), \tag{3.2.45'}$$

从而，由式(3.2.44)得到

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_{ji}\omega_{0i}^2\rho_1 F\overline{X}_i(z)-\rho_1 F\omega_j^2\sum_{i=1}^{\infty} A_{ji}\overline{X}_i(z)-$$
$$-4\rho a\omega_j^2\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{C_n}{n}\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}\left\{I_1\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\left[K_1'\left(\frac{n\pi k'a}{2h}\right)-K_1'\left[\frac{n\pi a}{2h}\right]-\right.\right.$$
$$\left.\left.-K_1\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\left[I_1'\left(\frac{n\pi k'a}{2h}\right)-I_1'\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\right]\right\}\int_{-h}^{0}\sum_{k=1}^{\infty}A_{jk}\overline{X}_k(z)\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}\cdot dz=0.$$

用 $\overline{X}(z)$ 乘上式两端并从 $-h$ 到 0 积分，利用无水振型的正交性，得

$$\frac{\rho_1 F}{4\rho a h}N_i A_{ji}\left(\frac{\omega_{0i}^2}{\omega_j^2}-1\right)-\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}D_n\sum_{k=1}^{\infty}M_{in}M_{kn}A_{jk}=0,\ (i=1,2,3,\cdots) \tag{3.2.48}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
N_i&=\frac{1}{h}\int_{-h}^{0}\overline{X}_i^2(z)dz,\\
M_{in}&=\frac{1}{h}\int_{-h}^{0}\overline{X}_i(z)\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz\\
D_n&=C_n\left\{I_1\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\left[K_1'\left(\frac{n\pi k'a}{2h}\right)-K_1'\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\right]-\right.\\
&\qquad\left.-K_1\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\left[I_1'\left(\frac{n\pi k'a}{2h}\right)-I_1'\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\right]\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{3.2.49}$$

可以看出，这个无穷项的联立方程（3.4.48）的系数矩阵关于其上对角线成 对 称 的。方程(3.2.48)中之 A_{ji} 不全为零时的条件是其系数行列式等于零，即存在

$$\begin{vmatrix}
a_{11}\frac{\omega_{01}^2}{\omega_j^2}-(a_{11}+b_{11}) & -b_{12}\cdots & -b_1k\cdots\\
-b_{21} & a_{22}\frac{\omega_{02}^2}{\omega_j^2}-(a_{22}+b_{22}) & -b_2k\cdots\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\
-b_{k1} & -b_{k2} & \cdots a_{kk}\frac{\omega_{0k}^2}{\omega_j^2}(a_{kk}+b_{kk})\cdots\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{vmatrix}=0, \tag{3.2.50}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
a_{kk}&=\frac{\rho_1 F}{4\rho a h}N_k,\quad b_{kk}=\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{D_n}{n}M_{kn}^2,\\
b_{ik}&=\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{D_n}{n}M_{kn}M_{in},
\end{aligned}\right\} \tag{3.2.51}$$

显然有

$$b_{ik}=b_{ki}.$$

从式（3.2.50）解出ω_j，即得到容器的满水固有频率。显然，它有无穷多个。将所得到的ω_j代回式（3.2.48），求得A_{ji}之值，从而由式（3.2.46）得到满水情况下容器的振型形状。

（二）圆柱形容器的情形

此时，由式(3.2.23)作用于容器侧壁上每单位长度之液动压力为

$$S_j^0(z)=4\rho a\omega_j^2\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{I_1\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)}{I_1'\left(\frac{n\pi a}{h}\right)}\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}\int_{-h}^{0}X_j(z)\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz,\tag{3.2.52}$$

从而由方程(3.2.41)得出

$$D(X_j(z))+\rho_1F\omega_j^2X_j(z)+4\rho a\omega_j^2\times$$

$$\times\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{I_1\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)}{I_1'\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)}\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}\int_{-h}^{0}X_j(z)\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz=0.\tag{3.2.53}$$

同样，将有水振型按无水振型即式(3.2.46)展开，依照上面的方法，得到方程

$$\frac{\rho_1F}{4\rho ah}N_iA_{ji}\left(\frac{\omega_{0i}^2}{\omega_j^2}\right)-1\Big)-\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}D_n'\sum_{k=1}^{\infty}M_{in}M_{kn}A_{jk}=0.$$

$$(i=1,2,\cdots)\tag{3.2.54}$$

其中

$$D_n'=I_1\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\Big/I_1'\left(\frac{n\pi a}{2h}\right).$$

由上面线性方程组中A_{ji}的系数行列式等于零，同样可得到频率方程(3.2.50)。不过这时其中的元素为

$$\left.\begin{aligned}&a_{kk}=\frac{\rho_1F}{4\rho ah}N_k,\quad b_{kk}=\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{D_n'}{n}M_{kn}^2,\\&b_{ik}=\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{D_n'}{n}M_{in}M_{kn}.\end{aligned}\right\}\tag{3.2.55}$$

从方程(3.2.50)得到有液容器的固有圆频率ω_j，将其代回到方程(3.2.44)中求出A_{ji}，再代回式(3.2.46)即得到容器有液时的振型。

（三）矩形容器的情形

对于矩形容器，在自由振动的情况下，从式(3.2.36)得到作用于侧壁上每单位长度的液动压力值。

于是，由方程(3.2.41)得到

$$D(X_j(z))+\rho_1F\omega_j^2X_j(z)+\frac{8\rho b\omega_j^2}{\pi}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}\times$$

$$\times\left[-\operatorname{csc}\mathrm{h}\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)+\operatorname{coth}\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\right]\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}\int_{-h}^{0}X_j\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz. \quad (3.2.56)$$

再一次将容器充满液体时的振型按无液时的振型加以展开，按照上面的过程，得到

$$\frac{\rho_1 F\pi}{8\rho bh}N_i A_{ji}\left(\frac{\omega_{0i}^2}{\omega_j^2}-1\right)-\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}D_n''\sum_{k=1}^{\infty}M_{in}M_{kn}A_{jk}=0,$$

$$(i=1,2,\cdots) \quad (3.2.57)$$

其中

$$D_n'=-\operatorname{csc}\mathrm{h}\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)+\operatorname{cot}\mathrm{h}\left(\frac{n\pi a}{2h}\right).$$

使线性方程(3.2.57)之系数行列等于零，得到频率方程(3.2.50)，其元素为

$$a_{kk}=\frac{\rho_1 F\pi}{8\rho bh}N_k,\quad b_{kk}=\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{D_n'}{n}M_{kn}^2,$$

$$b_{ik}=\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{D_n'}{n}M_{in}M_{kn}.$$

同样，从频率方程(3.2.50)算出容器满液时的固有频率ω_j，将其代回式(3.2.57)，即可算得A_{ji}，最后可由式(3.2.46)得到容器满液时的振型。以上就是计算满液时自振特性的全部过程。

(四) 算例：

例1　假设有一钢筋混凝土圆柱形水池，其外半径为7.5米，内半径为7米，高为10米；贮水池全为水所充满。水的容重为1吨/米^3，钢筋混凝土的容重为2.4吨/米^3，剪切弹性模量为$G=9\times10^4$公斤/厘米^2。求其满水振型和固有圆频率。

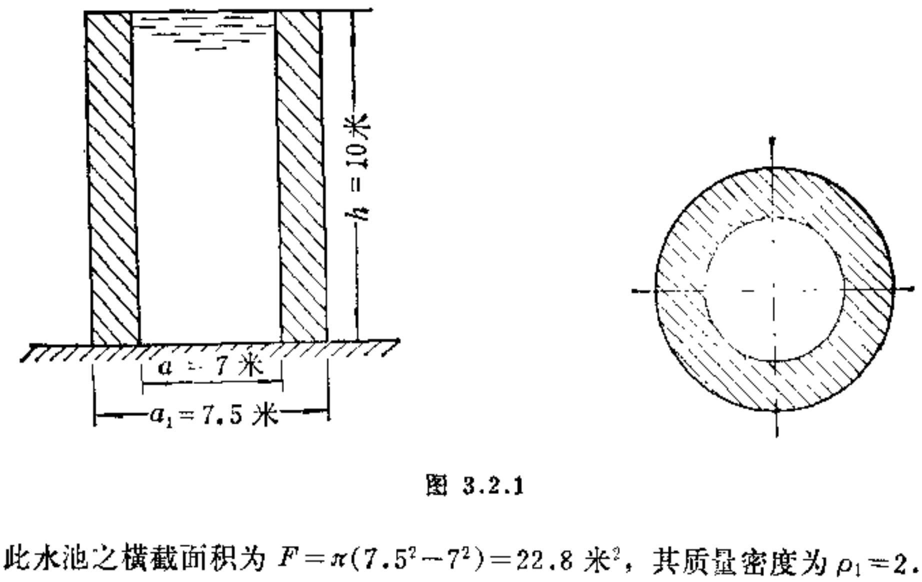


图 3.2.1

解：此水池之横截面积为$F=\pi(7.5^2-7^2)=22.8$米^2，其质量密度为$\rho_1=2.45\times10^{-6}$公斤·秒^2/厘米^4。

从文献[14]知，由无水时容器之固有振动方程(3.2.47)在边界条件式（3.2.42）之下的解，得到无水振型为

$$\overline{X}_i(z)=\sin\frac{i\pi(z+h)}{2h}=\sin\frac{i\pi(z+h)}{20},\quad i=1,3,5\cdots$$

而其无水固有频率为

$$\omega_{0i}=\frac{i\pi}{2h}\sqrt{\frac{G}{\rho_1 K_0}},$$

若取剪力截面系数 $K_0=1$，则有

$$\omega_{0i}=\frac{3.14\times i}{2\times 10}\sqrt{\frac{9\times 10^8}{2.45\times 10^2}}=\frac{1.92\times 10^3\times 3.14\times i}{2\times 10}$$

$$=301\,i\ \text{弧度/秒},\quad i=1,3,5,\cdots.$$

从式 (3.2.49) ，得

$$N_i=\frac{1}{10}\int_{-10}^{0}\sin^2\frac{i\pi(z+h)}{20}dz=0.5,$$

$$M_{in}=\frac{1}{10}\int_{-10}^{0}\sin\frac{i\pi(z+h)}{20}\cos\frac{n\pi(z+h)}{20}dz=\frac{2(i-(-1)^{\frac{n-1}{2}}n)}{\pi(i^2-n^2)},$$

$$M_{nn}=\frac{1}{n\pi},$$

$$D_n'=\frac{I_1\left(\dfrac{n\pi\times 7}{2\times 10}\right)}{I_1'\left(\dfrac{n\pi\times 7}{2\times 10}\right)}=\frac{I_1(1.1\,n)}{I_1'(1.1\,n)},\quad n=1,3,5\cdots,$$

$$a_{11}=a_{33}=\cdots=\frac{2.4\times 22.8}{4\times 1\times 7\times 10}\times 0.5=0.098,$$

$$b_{11}=I_1(1.1)/I_1'(1.1)\times\left(\frac{1}{\pi}\right)^2+\frac{I_1(3\times 1.1)}{3\times I_1'(3\times 1.1)}\times\left(-\frac{2}{8\pi}\right)^2+$$

$$+\frac{I_1(5\times 1.1)}{5\times I_1'(5\times 1.1)}\times\left(-\frac{2}{24\pi}\right)^2+\cdots$$

$$=0.087,$$

$$b_{33}=I_1(1.1)/I_1'(1.1)\times\left(\frac{2}{8\pi}\right)^2+I_1(3\times 1.1)/3\times I_1'(3\times 1.1)\times\left(\frac{1}{3\pi}\right)^2+\cdots$$

$$=0.0095,$$

$$b_{55}=I_1(1.1)/I_1'(1.1)\times\left(\frac{2}{24\pi}\right)^2+I_1(3\times 1.1)/3\times I_1'(3\times 1.1)\times\left(\frac{2}{16\pi}\right)^2+\cdots$$

$$=0.0021,$$

$$b_{13}=I_1(1.1)/I_1'(1.1)\times\left(\frac{1}{\pi}\times\frac{2}{8\pi}\right)+I_1(3\times 1.1)/3\times I_1'(3\times 1.1)\times$$

$$\times\left(-\frac{2}{8\pi}\right)\times\left(\frac{1}{3\pi}\right)+\cdots$$

$$=0.0185,$$

$$b_{15}=\frac{I_1(1.1)}{I_1'(1.1)}\times\frac{1}{\pi}\times\frac{2}{24\pi}+\frac{I_1(3\times 1.1)}{3I_1'(3\times 1.1)}\times\left(-\frac{2}{8\pi}\right)\times\frac{2}{16\pi}+$$

$$+\frac{I_1(5\times1.1)}{5\,I_1'(5\times1.1)}\times\left(-\frac{2}{24\,\pi}\right)\times\frac{1}{5\,\pi}+\cdots$$

$$=0.006,$$

$$b_{35}=\frac{I_1(1.1)}{I_1'(1.1)}\times\frac{2}{24\,\pi}\times\frac{2}{8\,\pi}+\frac{I_1(3\times1.1)}{3\,I_1'(3\times1.1)}\times\left(\frac{2}{16\,\pi}\right)\times\frac{1}{3\,\pi}+$$

$$+\frac{I_1(5\times1.1)}{5\,I_1'(5\times1.1)}\left(-\frac{2}{16\,\pi}\right)\times\frac{1}{5\,\pi}+\cdots$$

$$=0.00281,$$

……………………………………………

这里，我们求出了容器的前三个有水频率和振型。这时，在频率方程（3.2.50）中，取其前三阶行列式，得

$$\begin{vmatrix} 0.098\times\frac{301^2}{\omega_j^2}-(0.098+0.087) & -0.0185 & -0.006 \\ -0.00185 & 0.098\times\frac{(3\times301)^2}{\omega_j^2}-(0.098+0.0095) & -0.00281 \\ -0.006 & -0.00281 & 0.098\times\frac{(5\times301)^2}{\omega_j^2}-(0.098+0.0021) \end{vmatrix}=0$$

将之展开后，得

$$(\bar{\omega}^2)^3-2.052(\bar{\omega}^2)^2+0.3114(\bar{\omega}^2)-0.0095=0,$$

其中 $\bar{\omega}^2=\frac{301^2}{\omega_j^2}$。由此三次方程得出三个根：

$$\bar{\omega}_1^2-1.892,$$

$$\bar{\omega}_2^2=0.122,$$

$$\bar{\omega}_3^2=0.042.$$

于是，得到容器充满水时之前三个固有频率：

$$\omega_1=219\text{ 弧度/秒},\ \omega_2=861\text{ 弧度/秒},\ \omega_3=1470\text{ 弧度/秒}。$$

现在，我们来求容器之有水振型。这时，由式（3.2.54）有

$$\left.\begin{aligned} &\left[0.098\times\frac{301^2}{\omega_j^2}-0.185\right]A_{j1}-0.0185\,A_{j2}-0.006\,A_{j3}=0,\\ &-0.0185\,A_{j1}+\left(0.882\frac{301^2}{\omega_j^2}-0.1075\right)A_{j2}-0.0028A_{j3}=0,\\ &-0.006\,A_{j1}-0.0028\,A_{j2}+\left(2.375\frac{301^2}{\omega_j^2}-0.1001\right)A_{j3}=0.\end{aligned}\right\}$$

将 ω_1，ω_2，ω_3 分别代入上面联立方程，每次对 $A_{ji}(j,i=1,2,3)$ 求解的结果如下表所示。从而，由式（3.2.46）得到容器满水时之前三个振型如下：

表 3.2.1

n	无水时频率 ω_{0n}（弧度/秒）	有水时频率 ω_n（弧度/秒）	$\omega_n/\omega_{0n}(\%)$	A_{n1}	A_{n2}	A_{n3}
1	301	219	72.7	1	0.0118	0.0014
2	903	861	95.3	−0.1069	1	0.0114
3	1505	1470	97.6	−0.0299	−0.0323	1

$$X_1(z)=\sin\frac{\pi(z+10)}{20}+0.0118\sin\frac{3\pi(z+10)}{20}+0.00136\sin\frac{5\pi(z+10)}{20}\cdots,$$

$$X_2(z)=-0.1069\sin\frac{\pi(z+10)}{20}+\sin\frac{3\pi(z+10)}{20}+0.0114\sin\frac{5\pi(z+10)}{20},$$

$$X_3(z)=-0.0299\sin\frac{\pi(z+10)}{20}-0.0323\sin\frac{3\pi(z+10)}{20}+\sin\frac{5\pi(z+10)}{20}.$$

图 3.2.2 上示出了容器之振型曲线。为了对比起见，用实线示无水振型，而用虚线示满水振型。

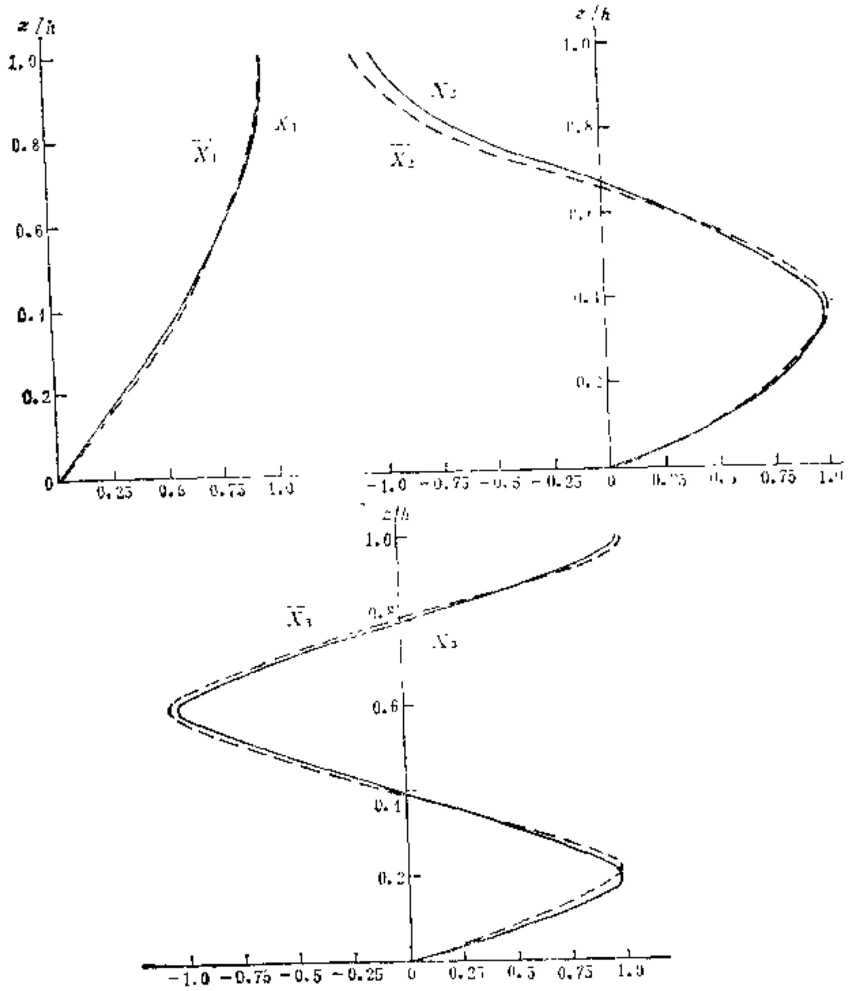


图 3.2.2

从表 3.2.1 和图 3.2.2 可见，容器满水时的固有频率和无水时的频率相比，满水频率均不同程度地有所降低，其中，以第一频率降低最多(达 27.3%)，频率越高，降低愈少；而满水时的振型，无论低振型还是高振型均与无水时的振型相差不大。这个性质很重要，因为我们在分析容器的动水压力及地震反应时，可以用无水振型来代替有水振型。

从上例得知，蓄水对于容器的第一频率影响最大。下面，我们通过一例来考察对于一定 ρ_1 值之容器和一定 ρ 值之液体，其满液时之第一频率随比值 $\frac{h}{a}$ 变化的情形。

例 2， 考虑图 3.2.1′所示之矩形容器， 其尺寸如图所示。设$\zeta=\frac{a}{h}$，$\xi=\frac{a_1b_1}{ab}$。容器材料的容重$\rho_1=2.4$ 吨/米^3，贮液容重 $\rho=1$ 吨/米^3。试求其满液时第一频率随$\frac{h}{a}$的变化。

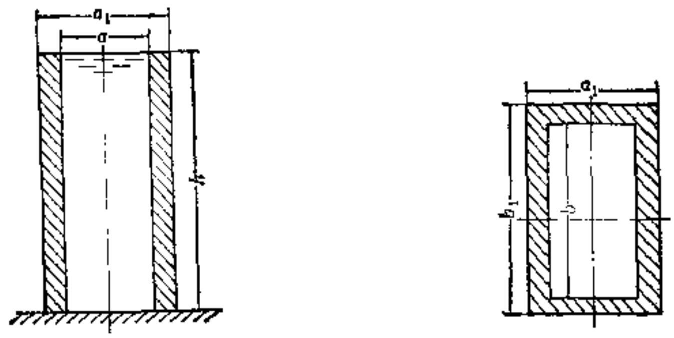


图 3.2.1′

由于我们只考虑容器之第一固有频率，因而在方程(3.2.57)中， 取 $i=1$，$k=1$， 并令 A_{11} 之系数等于零，即得到容器满水第一频率和无水第一频率之比值的近似表示式

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_{01}^2}=\frac{a_{11}}{a_{11}+b_{11}}.$$

在上例中已经指出了，对于等截面悬臂梁，其第一振型为

$$\bar{X}_1=\sin\frac{\pi(z+h)}{2h},$$

从而算得

$$a_{11}=\frac{\rho_1(d_1b_1-ab)\pi}{8\,\rho bh}N_1=0.15\,\zeta(\xi-1),$$

$$b_{11}=\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{-\operatorname{csch}\left(\frac{n\,\pi\,\zeta}{2}\right)+\coth\left(\frac{n\,\pi\,\zeta}{2}\right)}{n}M_{1n}^2,$$

其中，$M_{11}=\frac{1}{\pi}$，$M_{1n}=-\frac{2}{\pi(n^2-1)}$ $(n>1)$。

表 3.2.2 有水频率与无水频率之比 (ω_1/ω_{01})

	$\xi=1.8$	$\xi=1.7$	$\xi=1.6$	$\xi=1.5$	$\xi=1.4$	$\xi=1.3$
1.5	0.679	0.649	0.613	0.569	0.514	0.443
1.2	0.652	0.621	0.585	0.539	0.484	0.413
1.0	0.637	0.605	0.567	0.523	0.467	0.396
0.8	0.622	0.590	0.553	0.507	0.451	0.382
0.6	0.608	0.576	0.540	0.493	0.437	0.368

表 3.2.2 和图 3.2.3、3.2.4 中给出了$\frac{\omega_1^2}{\omega_{01}^2}$随 ζ 和 ξ 变化的计算结果。

从上面的图和表可见，尽管容器之满水第一频率是取线性方程(3.2.57)之第一项近似地

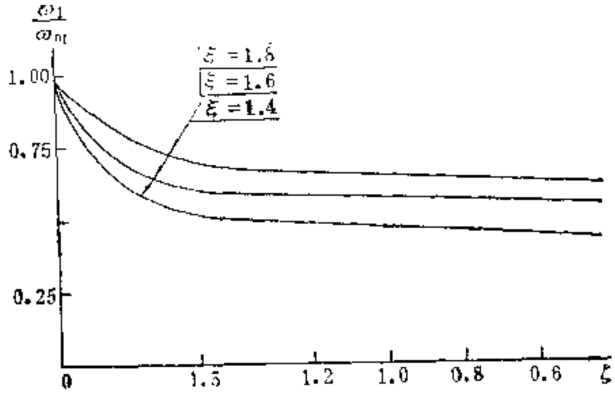


图 3.2.3

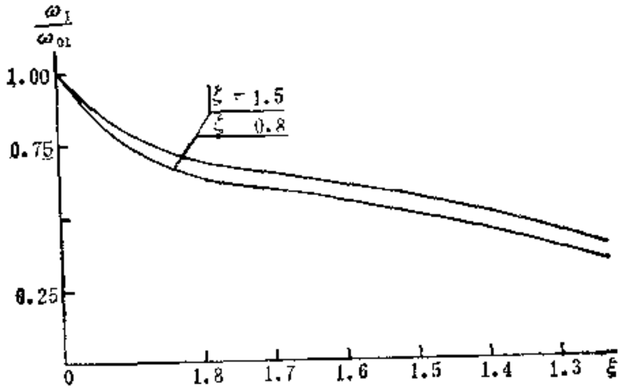


图 3.2.4

加以计算的，但仍可以看出动水压力对频率的影响，即是说，频率随 $\zeta=\frac{a}{b}$ 和 $\xi=\frac{a_1b_1}{ab}$ 值减小而减小。另一方面，比值 ζ 和 ξ 反应了容器的刚度，ζ 和 ξ 值愈小，则容器结构柔性愈大。因而，可以得出结论：容器柔性愈大，动水压力对频率影响亦愈大。

三、贮液容器对地震作用的反应

(一) 满液情况下的振型正交条件

关于无液情况下振型的正交条件，我们已在第二章第三节作了简要的讨论。为了探讨满液情况下容器对地震作用的反应，我们也要利用满液情况下的正交条件。下面来推导这些条件。

我们仍从圆环形容器开始。根据功的互等原理，相应于第 r 振型 X_r 的作用外力（惯性力和液动压力）对于任意另一振型 X_s 所作的功，等于相应于第 s 振型 X_s 的作用外力对于振型 X_r 所做的功。于是，由式 (3.2.44) 得到

$$\int_{-h}^{0}\omega_r^2\Big[\rho_1 F X_r(z)+4\rho a\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}D_n\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}\int_{-h}^{0}X_r(z)\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz\Big]\times$$

$$\times X_s(z)dz=\int_{-h}^{0}\omega_s^2\Big[\rho_1 F X_s(z)+4\rho a\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}D_n\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}\times$$

$$\times\int_{-h}^{0} X_s(z)\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz\Big]X_r(z)dz.$$

进行整理后，可得

$$(\omega_r^2-\omega_s^2)\Big[\int_{-h}^{0}\rho_1 F X_r X_s dz+4\rho a\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}D_n\times$$

$$\times\int_{-h}^{0} X_s\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz\int_{-h}^{0} X_r\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz\Big]=0. \tag{3.2.58}$$

由于 $\omega_r^2-\omega_s^2\neq 0$，从而有

$$\int_{-h}^{0}\rho_1 F X_r X_s dz+4\rho a\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}D_n\int_{-h}^{0} X_s\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz\times$$

$$\times\int_{-h}^{0} X_r\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz=0 \tag{3.2.59}$$

这就是圆环形容器满水振型的正交条件。

同样，可以得到圆柱形容器振型的正交条件为

$$\int_{-h}^{0}\rho_1 F X_r X_s dz+4\rho a\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{I_1\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)}{I_1'\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)}\int_{-h}^{0} X_s\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz\times$$

$$\times\int_{-h}^{0} X_r\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz=0, \tag{3.2.60}$$

对于矩形容器，正交条件为

$$\int_{-h}^{0}\rho_1 F X_r X_s dz+\frac{8\rho b}{\pi}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}\Big[\coth\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)-\operatorname{csch}\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\Big]\times$$

$$\times\int_{-h}^{0} X_s\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz\times\int_{-h}^{0} X_r\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz=0 \tag{3.2.61}$$

在方程(3.2.44)、(3.2.53)、(3.2.57)中可见，$D(X_j(z))$表示容器的弹性恢复力。由于这些方程表示的是作用于弹性容器上之外力与容器的弹性力相平衡，因而振型正交条件又可以写为如下形式：

$$\int_{-h}^{0} D[X_r(z)]X_s(z)dz=0 \tag{3.2.62}$$

或

$$\int_{-h}^{0} D[X_s(z)]X_r(z)=0.$$

和无液容器振型的振型正交条件一样，满液振型的正交条件同样表明：相应于第 r 振型 $X_r(z)$的作用外力（或弹性恢复力）对其它任何振型 $X_s(z)$均不作功。

（二）贮液容器对地震的反应

如前所述，在地面运动 $\ddot{x}_0(t)$ 所产生的惯性力和液动压力作用下，剪切梁的振动微分方程为

$$\frac{GF}{K_0}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\rho_1 F\Big[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}+\ddot{x}_0(t)\Big]-S^0(z,t), \tag{3.2.62'}$$

式中，u 为容器的横向弹性变形；ε 为结构的阻尼系数；$\ddot{x}_0(t)$ 为地震地面加速度；$S^0(z,t)$为作用于容器单位高度上的液动压力。

现在，我们仍从圆环形容器开始，考虑方程(3.2.62)的积分。为了使讨论简单起见，根据容器作剪切振动的假定，认为外柱和内柱，具有相同的振型形状，故可以按相同方法进行分析。下面，我们仅考虑外柱的振动性态。

将作用于容器外柱上单位长度的液动压力式（3.2.11）代入运动方程(3.2.62)，得

$$\frac{GF}{K_0}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\rho_1 F\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}+\ddot{X}_0(t)\right]+\rho a\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{4}{n}D_n A_n(t)\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}. \tag{3.2.63}$$

式中 D_n 的定义见式(3.2.49)。将上述方程中之位移 $u(z,t)$用满水振型 $X_i(z)$及广义坐标 $q_i(t)$展开，即如式(3.2.3)所示：

$$u(z,t)=\sum_{i=1}^{\infty}X_i(z)q_i(t). \tag{3.2.64}$$

将它代入方程(3.2.63)，得

$$\sum_{i=1}^{\infty}\Big[q_i(t)D[X_i(z)]-\ddot{q}_i(t)\Big[\rho_1 F X_i(z)+\rho a\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{4D_n}{n}\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}\times$$

$$\times\int_{-h}^{0}X_i(z)\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz\Big]-2\varepsilon\rho_1 F X_i\dot{q}_i(t)\Big]$$

$$=\ddot{x}_0(t)\left[\rho_1 F+\rho a\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{8hD_n}{n^2\pi}\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}\right]. \tag{3.2.65}$$

将上式两端同乘以 $X_i(z)$ $(i=1,2,3,\cdots)$并从 $-h$ 到 0 进行积分，再利用振型正交条件(3.2.59)以及式(3.2.44)，得

$$\ddot{q}_i(t)+2\varepsilon_i\dot{q}_i(t)+\omega_i^2 q_i(t)=-\eta_i\ddot{x}_0(t), \tag{3.2.66}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_i&=\frac{B_i}{A_i}\\ \eta_i&=\frac{E_i}{A_i}\end{aligned}\right\} \tag{3.2.67}$$

$$\left.\begin{aligned}A_i&=\int_{-h}^{0}X_i(z)\Big[\rho_1 F X_i(z)+\rho a\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{4D_n}{n}\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}\int_{-h}^{0}X_i(z)\times\\ &\qquad\times\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}dz\Big]dz,\\ B_i&=\varepsilon\rho_1 F\int_{-h}^{0}X_i^2(z)dz,\\ E_i&=\int_{-h}^{0}X_i(z)\left[\rho_1 F+\rho a\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{8hD_n}{n^2\pi}\cos\frac{n\pi(z+h)}{2h}\right]dz\end{aligned}\right\} \tag{3.2.68}$$

ε_i同样称为第 j 振型的振型阻尼系数，而 η_i 称为第 j 振型的振型参与系数。

将满液振型 $X_i(z)$按无液振型 $\bar{X}_i(z)$展开[式(3.2.46)]，并代入上式，再利用无液振型

的正交条件

$$\int_{-h}^{0} X_i(z) X_j(z) dz \quad (i \neq j),$$

从以上各式可得：

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_j &= \frac{\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} A_{ji}^2 D_i}{\sum_{i=1}^{\infty} \omega_{0i}^2 D_i A_{ji}^2}, \\ \eta_j &= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \omega_{0i}^2 L_i A_{ji}}{\sum_{i=1}^{\infty} \omega_{0i}^2 D_i A_{ji}^2}. \end{aligned}\right\} \tag{3.2.67'}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} D_i &= \frac{1}{h}\int_{-h}^{0} \tilde{X}_i^2(z) dz, \\ L_i &= \frac{1}{h}\int_{-h}^{0} \tilde{X}_i(z) dz. \end{aligned}\right\} \tag{3.2.69}$$

而 A_{ji} 由方程(3.2.48)确定。

对于圆柱形容器和矩形容器，决定广义坐标的微分方程仍然具有式(3.2.66)的形式，不过振型参与系数 η_j 和振型阻尼系数 ε_j 中的 A_j 和 E_j？有所不同。对于圆柱形容器，

$$\left.\begin{aligned} A_j &= \int_{-h}^{0} X_j(z) \left[\rho_1 F X_j(z) + \rho a \sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty} \frac{4}{n} \frac{I_1\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)}{I_1'\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)} \cos\frac{n\pi(z+h)}{2h} \times \right. \\ &\left. \times \int_{-h}^{0} X_j(z) \cos\frac{n\pi(z+h)}{2h} dz \right] dz, \\ E_j &= \int_{-h}^{0} X_j(z) \left[\rho_1 F + \rho a \sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{8h}{n^2\pi} \frac{I_1\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)}{I_1'\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)} \times \right. \\ &\left. \times \cos\frac{n\pi(z+h)}{2h} \right] dz. \end{aligned}\right\} \tag{3.2.68'}$$

对于矩形容器，

$$A_j = \int_{-h}^{0} X_j(z) \left\{\rho_1 F + \rho b \sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty} \frac{8}{n\pi} \left[\coth\left(\frac{n\pi a}{2h}\right) - \operatorname{csch}\left(\frac{n\pi a}{2h}\right)\right] \times \right.$$

$$\left. \times \cos\frac{n\pi(z+h)}{2h} \int_{-h}^{0} X_j(z) \cos\frac{n\pi(z+h)}{2h} dz \right\} dz$$

$$E_j = \int_{-h}^{0} X_j(z) \left[\rho_1 F + \rho b \sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{16h}{n^2\pi} \left[\coth\left(\frac{n\pi a}{2h}\right) - \right.\right.$$

$$-\operatorname{csch}\left(\frac{h\pi\sigma}{2h}\right)\cos\frac{u\pi(z+h)}{2h}\Bigg]dz. \tag{3.2.68''}$$

对于B_j，具有与式(3.2.68)相同的形式；而对于式(3.2.67')来说，其中之A_{ji}对于圆柱形容器和矩形容器则分别由式(3.2.54)和由式(3.2.57)决定

从第三章得知，对于具有自振频率ω_j及阻尼系数ε_j的单质点系统，在地震地面加速度$\ddot{x}_0(t)$作用下的相对位移反应$\delta_j(t)$应满足如下方程：

$$\ddot{\delta}_j(t)+2\varepsilon_j\dot{\delta}_j(t)+\omega_j^2\delta_j(t)=-\ddot{x}_0(t). \tag{3.2.70}$$

将式(3.2.66)和(3.2.70)相比较，可见

$$q_j(t)=\eta_j\delta_j(t), \tag{3.2.71}$$

最后得到容器满液时之位移反应为

$$u(z,\ t)=\sum_{j=1}^{\infty}X_j(z)\eta_j\delta_j(z)$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}A_{ji}\eta_j\overline{X}_i(z)\delta_j(t). \tag{3.2.72}$$

有了容器满液时之位移反应式，则上节中之液动压力问题就彻底解决了。同时，以式(3.2.72)为基础，亦可计算满液容器所承受的地震荷载(包括惯性力和液动压力)。这时，将式(3.2.64)代入式 (3.2.63),比较左右两端，可见，作用于容器上的地震荷载为

$$P(z,\ t)=\sum_{j=1}^{\infty}q_j(t)D(X_j(z)).$$

再由式(3.2.45')和(3.2.71)得到

$$P(z,\ t)=-\sum_{i,j=1}^{\infty}\rho_1FA_{ji}\omega_{0i}^2\overline{X}_i(z)\eta_j\delta_j(t).$$

从式(3.2.73)进而得到作用于容器上的总地震力(基底剪力)

$$S=\int_{-h}^{0}P(z,\ t)dz$$

$$=-\rho_1Fh\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}A_{ji}\omega_{0i}^2L_i\eta_j\delta_j(t). \tag{3.2.74}$$

到此为止，我们已解决了容器满液情况下的液动压力和容器的振动问题。从上面的结果可以看出，无论是刚性容器还是弹性容器的情形，计算作用于其上的液动压力、地震荷载及振动位移的公式，其形式均较复杂，包含有一重或二重无穷级数。乍一看，计算工作量似乎很大，但如果考虑到这些级数的收敛性均很好，实际计算时只需取前面几项，甚至第一项就已敷工程设计之用，从而使用起来亦不会有太多困难。特别在电子计算机已普及应用的今天，进行这些"实时分析"已经极其方便了。

第三节　反应谱理论的应用

上面两节中，对刚性容器和弹性容器在满液情况下其中贮液所产生的液动压力及对地震运动之反应进行了详细的理论分析，得到了一系列实时解。但是，对于工程设计来说，人们

并不希望知道每一次地震过程中液动压力及容器之反应在任何时刻的实时值，最感兴趣的是在某次地震中容器内贮液有可能产生的最大液动压力及容器反应的最大值。这就给我们提供了利用反应谱理论的可能性。

一、刚性贮液构筑物中液动压力的计算

首先，从本章第一节中的式(3.1.25)、(3.1.65)、(3.1.102)或式(3.1.103)、(3.1.27)(3.1.67)、(3.1.105)可以看出，作用于容器侧壁上的液动压力和其合力(基底剪力)可以统一地写为

$$p^{w}(z,\ t)=-A\left[\ddot{x}_0(t)+\sum_{j=1}^{\infty}d_j p_j^{w}(z)\ddot{q}_j(t)\right] \tag{3.3.1}$$

和

$$S(t)=-M_l\left[\ddot{x}_0(t)+\sum_{j=1}^{\infty}d_j s_j\ddot{q}_j(t)\right], \tag{3.3.2}$$

式中，对于无阻尼液体广义坐标 $\ddot{q}_j(t)$ 按如下微分方程决定：

$$\ddot{q}_j(t)+\tilde{\omega}_j^2 q_j(t)=-\ddot{x}_0(t) \tag{3.3.3}$$

对于具有内阻尼的粘性液体，近似地按如下方程决定：

$$\ddot{q}_j(t)+2\varepsilon_j\dot{q}_j(t)+\tilde{\omega}_j^2 q_j(t)=-\ddot{x}_0(t), \tag{3.3.3'}$$

其中，ε_j 为液体第 j 振型的阻尼系数。在求解微分方程(3.3.3)和(3.3.3′)时，应满足第一节中对于速度势所给定的初始条件。

在式(3.3.1)—(3.3.3′)中，

$$\left.\begin{aligned}
p_j^{w}(z)&=\frac{\cosh\left(\sigma_j\dfrac{z+h}{a}\right)}{\cosh(\sigma_j h_0)},\\
S_j&=\frac{1}{h_0\sigma_j}\tanh(\sigma_j h_0),\\
\tilde{\omega}_j^2&=\frac{g}{a}\sigma_j\tanh(\sigma_j h_0).
\end{aligned}\right\} \tag{3.3.4}$$

其余系数的形式如下。

对于圆柱形容器：

$$\left.\begin{aligned}
A&=\rho a\sin\theta,\\
M_l&=\rho\pi a^2 h,\\
d_j&=\frac{2}{\sigma_j^2-1},
\end{aligned}\right\} \tag{3.3.5}$$

σ_j 为方程(3.1.10)的根。

对于矩形容器：

$$\left.\begin{aligned}
A&=\frac{\rho a}{2},\\
M_l&=\rho abh,\\
\sigma_j&=(2j-1)\pi,\\
d_j&=\frac{8}{\sigma_j^2},
\end{aligned}\right\} \tag{3.3.6}$$

b 是贮液容器的宽度(如图 3.1.15 所示)。

对于圆环形容器:

$$\left.\begin{aligned}&A=\rho a\sin\theta,\\&M_l=\rho\pi a^2h,\\&d_j=\frac{2(1-k'R_1^n(k'\sigma_j))}{(\sigma_j^2-1)-(k'^2\sigma_j-1)R_1^{n2}(k'\sigma_j)},\\&R_1^n(k'\sigma_j)=\alpha_jJ_1(k'\sigma_j)+\beta_jY_1(k'\sigma_j),\\&\alpha_j=\frac{1}{J_1(\sigma_j)+\gamma_jY_1(\sigma_j)},\ \beta_j=\gamma_j\alpha_j,\end{aligned}\right\}\tag{3.3.7}$$

σ_j 是方程(3.1.58)之根，γ_n 由式(3.1.57)决定。

对于底板上之液动压力，同样可以重新写为:

对于圆柱形容器和圆环容器:

$$p_c^b=(r,t)=-A\left[\frac{r}{a}\ddot{x}_0(t)+\sum_{j=1}^{\infty}d_j\ddot{q}_j(t)R_i\left(\frac{\sigma_jr}{a}\right)\right];\tag{3.3.8}$$

式中，对于圆柱形容器

$$R_j\left(\frac{\sigma_jr}{a}\right)=\frac{1}{\cosh(\sigma_jh_0)}\frac{J_1\left(\frac{\sigma_jr}{a}\right)}{J_1(\sigma_j)};$$

对于圆环形容器

$$P_j\left(\frac{\sigma_jr}{a}\right)=\frac{R_1^n\left(\sigma_j\frac{r}{a}\right)}{\cosh(\sigma_jh_0)};$$

对于矩形容器

$$P_r^b(x,t)=-A\left[\left(1-\frac{2x}{a}\right)\ddot{x}_0(t)+\sum_{j=1,3,\cdots}^{\infty}d_jR_i\left(\frac{j\pi x}{a}\right)\ddot{q}_j(t)\right],\tag{3.3.9}$$

式中

$$R_i\left(\frac{j\pi x}{a}\right)=\frac{\cos\frac{j\pi x}{a}}{\cosh(j\pi h_0)}.$$

从式(3.1.13)、(3.1.60′)和(3.1.93)看出，无论圆柱形容器、圆环形容器或矩形容器，均有如下关系式:

$$\sum_{j=1}^{\infty}{}^{*}d_j=1.$$

与前面一样，对于圆柱形和圆环形容器，$\sum_{j=1}^{\infty}{}^{*}$表示 j 从 1，2，3，$\cdots$依次求和，而对于矩形容器，则表示 j 从 1，3，5，$\cdots$求和。

从式(3.3.1)、(3.3.2)和(3.3.8)、(3.3.9)看出，作用于容器侧壁和底板上的液动压力在形式上与弹性结构的地震反应是类似的，其中，系数 d_j 相当于弹性结构的振型参与系数，

$p_j^w(z)$ 和 $R_j\left(\sigma_j\frac{a}{r}\right)$相当于振型函数，$q_j(t)$为广义坐标，它与一般弹性结构具有同样的意义由于这种类比关系，使我们有可能利用反应谱理论来计算液动压力的地震反应。

为此，我们可以把式(3.3.1)、(3.3.2)以及(3.3.8)、(3.3.9)改写为

$$p^w(z,t)=-A\left[\left(1-\sum_{j=1}^{\infty}{}^*d_jp_j^w(z)\right)\ddot{x}_0(t)+\sum_{j=1}^{\infty}{}^*d_jp_j^w(z)\ (\ddot{x}_0+\ddot{q}_j)\right], \quad (3.3.10)$$

$$S(t)=-M_l\left[\left(1-\sum_{j=1}^{\infty}{}^*d_js_j\right)\ddot{x}_0\,(t)+\sum_{j=1}^{\infty}d_js_j\ (\ddot{x}_0+\ddot{q}_j)\ \right], \quad (3.3.11)$$

$$p_c^b(r,t)=-A\left\{\left[\frac{r}{a}-\sum_{j=1}^{\infty}d_jR_j\left(\sigma_j\frac{r}{a}\right)\right]\ddot{x}_0\ (t)+\sum_{j=1}^{\infty}d_jR_j\left(\sigma_j\frac{r}{a}\right)(\ddot{x}_0+\ddot{q}_j)\right\},$$

$$p_r^b(x,t)=-A\left\{\left[1-\frac{2x}{a}-\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}d_jR_j\left(\frac{j\pi x}{a}\right)\right]\ddot{x}_0+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1,3,\cdots}^{\infty}d_jR_j\left(\frac{j\pi x}{a}\right)(\ddot{x}_0+\ddot{q}_j)\right\} \quad (3.3.12)$$

将上面各式与式 (3.1.46)、(3.1.47)、(3.1.46′)、(3.1.77)、(3.1.78)、(3.1.77′)、(3.1.120)、(3.1.122)、(3.1.121)相比较，可以看出方括号中的第一项乃是脉冲压力，它随时间变化的过程与地面加速度 $\ddot{x}_0(t)$完全一致，且成正比关系，其比例系数

$$A\left(1-\sum_{j=1}^{\infty}{}^*d_jp_j^w\ (z)\right)、\ A\left[\frac{r}{a}-\sum_{j=1}^{\infty}d_jR_j\left(\frac{\sigma_jr}{a}\right)\right]$$

和

$$A\left[1-\frac{2x}{a}-\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}d_jR_j\left(\frac{j\pi x}{a}\right)\right],$$

如在第一节中指出的那样，可以看成是随深度分布和随底面尺寸分布的等效质量；而

$$M_l\left(1-\sum_{j=1}^{\infty}{}^*d_js_j\right)$$

则是由

$$A\left(1-\sum_{j=1}^{\infty}{}^*d_jp_j^w\ (z)\right)$$

沿整个贮液器侧壁之积分所得到的总等效质量（顺便指出，如果把分布等效质量亦看成是带有正号或负号的数的话，则沿着底面尺寸分布的等效质量之代数和等于零，从而作用于底面上的合液动压力亦为零)。上式中方括号内第二项称为振动压力或对流压力，它由无穷多个分布质量 $Ad_jp_j^w(t)$、$Ad_jR_j\left(\frac{\sigma_jr}{a}\right)$、$Ad_jR_j\left(\frac{j\pi x}{a}\right)$与时间函数$(\ddot{x}_0+\ddot{q}_j)$的乘积叠加而成，它们相应于无穷多个液体振型中第 j 振型的液动压力，而 $M_ld_js_j(\ddot{x}_0+\ddot{q}_j)$ 则是每一振型的合力。此外，式(3.3.10)—(3.3.13) 中的每一个时间函数 $\ddot{x}_0+\ddot{q}_j$ 都代表频率等于 $\bar{\omega}_j$、振型阻尼系数等于 ε_j 的单质点系统在地震地面加速度 $\ddot{x}_0(t)$ 作用之下的绝对加速度反应，其最大

值等于 $gk\beta_j$（见第二章）[$k=(\ddot{x}_0|_{max}/g)$，称为地震系数，它是以重力加速度 g 为单位的地面最大加速度值，β_j 是第 j 振型的动力放大系数，$\beta_j=|\ddot{x}_0+\ddot{q}_j|_{max}/(\ddot{x}_0|_{max})$]。

在式(3.3.10)—(3.3.13)中，由于 $\ddot{x}(t)$ 与 $\ddot{x}_0(t)+\ddot{q}_j(t)$（$j=1,2,\cdots$ 或 $j=1,3,\cdots$）是不同的时间函数，因此，存在着如第二章中对于多质点体系所叙述的振型组合问题。由于它们的最大值一般不会同时发生，因此，按照与多质点体系同样的道理，我们也可以用平方和开方的办法来计算贮液容器上的最大液动压力：

作用于侧壁上的液动压力之最大值为

$$p^w_{max}(t)=Akg\left\{\left[1-\sum_{j=1}^{\infty}{}^{*}d_j p_j^w(z)\right]^2+\sum_{j=1}^{\infty}{}^{*}\left[\beta_j d_j p_j^w(z)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}; \tag{3.3.14}$$

其合力（最大基底剪力）为

$$S_{max}=M_l kg\left[\left(1-\sum_{j=1}^{\infty}{}^{*}d_j s_j\right)^2+\sum_{j=1}^{\infty}{}^{*}(\beta_j d_j s_j)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.3.15}$$

作用于底板上的液动压力之最大值：

对于圆柱形容器和圆环形容器

$$p^b_{r,max}(r)=Akg\left\{\left[\frac{r}{a}-\sum_{j=1}^{\infty}d_j R_j\left(\frac{\sigma_j r}{a}\right)\right]^2+\sum_{j=1}^{\infty}\left[\beta_j d_j R_j\left(\frac{\sigma_j r}{a}\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}; \tag{3.3.16}$$

对于矩形容器

$$p^b_{r,max}(x)=Akg\left\{\left[1-\frac{2x}{a}-\sum_{j=1,3,\cdots}^{\infty}d_j R_j\left(\frac{j\pi x}{a}\right)\right]^2+\sum_{j=1,3,\cdots}^{\infty}\left[\beta_j d_j R_j\left(\frac{j\pi x}{a}\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{3.3.17}$$

按照相同的理由，可以由第一节中的相应公式，获得由作用于容器侧壁上的液动压力所产生的倾覆力矩之最大值

$$M^w_{max}=M_l hkg\left[\left(\frac{1}{2}-\sum_{j=1}^{\infty}d_j m_j^w\right)^2+\sum_{j=1}^{\infty}(\beta_j d_j m_j^w)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.3.18}$$

式中

$$m_j^w=\frac{1}{\sigma_j h_0}\left[\tanh(\sigma_j h_0)+\frac{1}{\sigma_j h_0}\left(\frac{1}{\cosh(\sigma_j h_0)}-1\right)\right]. \tag{3.3.19}$$

由作用于底板上之液动压力所产生的倾覆力矩的最大值为：

对于圆柱形容器

$$M^b_{max}=Bkg\left[\left(\frac{1}{4}-\sum_{j=1}^{\infty}d_j m_j^b\right)^2+\sum_{j=1}^{\infty}(\beta_j d_j m_j^b)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.3.20}$$

式中

$$B=\rho a^4\pi,\quad m_j^b=\frac{1}{\sigma_j^2\cosh(\sigma_j h_0)}; \tag{3.3.21}$$

对于圆环形容器

$$M^b_{max}=Bkg\left[\left(\frac{1-k'^4}{4}-\sum_{j=1}^{\infty}d_j m_j^b\right)^2+\sum_{j=1}^{\infty}(\beta_j d_j m_j^b)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.3.22}$$

式中

$$B=\rho a^4\pi,\ m_j^b=\frac{1-k'^2R_1^n(k'\sigma_j)}{\sigma_j^2\cosh(\sigma_j h_0)};\tag{3.3.23}$$

对于矩形容器

$$M_{max}^b=Bkg\left[\left(\frac{1}{12}-\sum_{j=1,3,\cdots}^{\infty}d_jm_j^b\right)^2+\sum_{j=1,3,\cdots}^{\infty}(\beta_jd_jm_j^b)^2\right]^{\frac{1}{2}},\tag{3.3.24}$$

式中

$$B=\rho a^3b,\ m_j^b=\frac{1}{\sigma_j^2\cosh(\sigma_j h_0)}.\tag{3.3.15}$$

计算结果表明，上面各公式即使只取级数的第一项，亦是相当精确的。

上面，我们利用平方和开方的方法估计了液动压力。但是，正如文献[7]所指出的那样，平方和开方的方法应该应用于内力组合，也就是说，应该分别计算脉冲压力和对流内力中各振型压力所产生的内力，然后采用平方和开方的方法将这些内力加以组合以得出最大内力。但是，这样一来，计算过于繁复。考虑到液动压力不象多质点弹性结构各振型地震力那样反复变化符号，直接组合压力带来的误差是不大的。因此，为了简化计算，采用了以上这样的方法。

在上面的公式中，β_j 可以根据液体的自振周期 $T_j=\frac{2\pi}{\bar{\omega}_j}$ 和阻尼系数 ε_j，按照标准反应谱取得（例如第二章图 2.4.1 所示的我国工业与民用建筑抗震设计规范中所规定的标准反应谱）。但是，此标准反应谱给出的是地震影响系数 $\alpha=k\beta$，而对于液动压力的计算来说，需要利用的是 k 和 β 各自的值而不是其乘积 $k\beta$。然而，根据规范修订报告中的资料，我们知道，当地震烈度为 7、8、9 度时，k 值分别取 0.1、0.2 和 0.4。这样，我们就有可能根据不同地震烈度的 k 值从图 2.4.1 上的 α 算出所需的 β 值。不同地震烈度的 α_{max} 值列于表 3.3.1 中。从此表的 α_{max} 值和 k 值可见，$\beta_{max}=2.25$

表 3.3.1

设计烈度	7	8	9
α_{max}	0.23	0.45	0.90

应当指出，在我国工业与民用建筑抗震设计规范中所规定的标准反应谱相应于阻尼比等于 0.05 的情形，由于液体的阻尼比一般均比 0.05 小得多，因此需要作相应的修正。当阻尼比不等于 0.05 时，在文献[15]中建议了一种修正方法。不过，该方法只适用于阻尼比不太小的情形。由于液体的阻尼很小，可以近似采用零阻尼反应谱。从许多典型地震加速度记录的反应谱曲线看出，零阻尼反应谱的峰值约较阻尼比为 0.05 时反应谱的峰值大 1.5 至 3 倍。考虑到液体的阻尼很小，可以粗略地将阻尼比为 0.05 时的标准反应谱放大 1 倍考虑，即近似地采用 $\beta_{max}=4.5$，于是，表 3.3.1 中给出的地震影响系数之最大值同样应放大一倍，如表 3.3.2 所示。

当只考虑第一振型时，式(3.3.14)—(3.3.24)可以简化如下：

对于圆柱形贮液容器，侧壁上的最大液动压力为

表 3.3.2

设计烈度	7	8	9
α_{max}	0.45	0.90	1.80
k	0.1	0.2	0.4

$$p^{w}_{max}(z)=ck\gamma a\sin\theta\left[\left(1-0.838\frac{\cosh\left(\frac{1.84\,(z+h)}{a}\right)}{\cosh\,(1.84\,h_0)}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(0.838\,\beta_1\frac{\cosh\left(\frac{1.84\,(z+h)}{a}\right)}{\cosh\,(1.84\,h_0)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.3.26}$$

底板上的最大液动力为

$$p^{w}_{max}(r)=ck\gamma a\sin\theta\left[\left(\frac{r}{a}-0.838\,\frac{J_1\left(\frac{1.84\,r}{a}\right)}{J_1(1.84)\cosh(1.84\,h_0)}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(0.838\,\beta_1\frac{J_1\left(\frac{1.84\,r}{a}\right)}{J_1(1.84)\cosh(1.84\,h_0)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}; \tag{3.3.27}$$

侧壁上液动压力之合力的最大值为

$$S_{max}=ck\gamma\pi a^2h\left[\left(1-0.838\frac{\tanh(1.84\,h_0)}{1.84\,h_0}\right)^2+\left(0.838\frac{\tanh(1.84\,h_0)}{1.84\,h_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.3.28}$$

作用于侧壁上液动压力所产生的倾覆力矩之最大值为

$$M^{w}_{max}=ck\gamma\pi a^2h^2\left[\left(\frac{1}{2}-0.838\,m^{w}_{1}\right)^2+(0.838\,m^{w}_{1}\beta_1)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.3.29}$$

式中

$$m^{w}_{1}=\frac{1}{1.84\,h_0}\left[\tanh(1.84\,h_0)+\frac{1}{1.84\,h_0}\left(\frac{1}{\cosh(1.84\,h_0)}-1\right)\right]; \tag{3.3.30}$$

作用于底板上的液动压力所产生的倾覆力矩的最大值为

$$M^{b}_{max}=ck\gamma\pi a^4\left[\left(\frac{1}{4}-\frac{0.838}{1.84^2\cosh(1.84\,h_0)}\right)^2+\left(\frac{0.838\,\beta_1}{1.84^2\cosh(1.84\,h_0)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.3.31}$$

对于圆环形容器，作用在侧壁上的最大液动压力为

$$p^{w}_{max}(z)=ck\gamma a\sin\theta\left[\left(1-\frac{d_1\cosh\left(\sigma_1\frac{z+h}{a}\right)}{\cosh(\sigma_1h_0)}\right)^2+\left(d_1\beta_1\frac{\cosh\left(\sigma_1\frac{z+h}{a}\right)}{\cosh(\sigma_1h_0)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}; \tag{3.3.32}$$

底板上的最大液动压力为

$$p^{b}_{max}(r)=ck\gamma a\sin\theta\left[\left(\frac{r}{a}-d_1R_1\left(\frac{\sigma_1r}{a}\right)\right)^2+\left(d_1\beta_1R_1\left(\frac{\sigma_1r}{a}\right)\right)^2\right], \tag{3.3.33}$$

式中

$$R_1\left(\frac{\sigma_1 r}{a}\right)=\frac{1}{\cosh(\sigma_1 h_0)}\left[\alpha_1 J_1\left(\sigma_1\frac{r}{a}\right)+\beta_1 Y_1\left(\sigma_1\frac{r}{a}\right)\right]; \tag{3.3.34}$$

合液动压力的最大值为

$$S_{\max}=ck\gamma\pi a^2 h\left[\left(1-\frac{d_1\tanh(\sigma_1 h_0)}{\sigma_1 h_0}\right)^2+\left(\frac{d_1\beta_1\tanh(\sigma_1 h_0)}{\sigma_1 h_0}\right)^2\right]; \tag{3.3.35}$$

作用在容器侧壁上的液动压力所产生的倾覆力矩最大值为

$$M^w_{\max}=ck\gamma\pi a^2 h^2\left[\left(\frac{1}{2}-d_1 m^w_1\right)^2+(d_1\beta_1 m^w_1)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.3.36}$$

式中

$$m^w_1=\frac{1}{\sigma_1 h_0}\left[\tanh(\sigma_1 h_0)+\frac{1}{\sigma_1 h_0}\left(\frac{1}{\cosh(\sigma_1 h_0)}-1\right)\right]; \tag{3.3.37}$$

作用在容器底板上的液动压力所产生的倾覆力矩最大值为

$$M^b_{\max}=ck\gamma\pi a^4\left[\left(\frac{1-k'^4}{4}-d_1 m^b_1\right)^2+(d_1\beta_1 m^b_1)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.3.38}$$

式中

$$m^b_1=\frac{1-k'^2[\alpha_1 J_1(k'\sigma_1)+\beta_1 Y_1(k'\sigma_1)]}{\sigma_1^2\cosh(\sigma_1 h_0)}, \tag{3.3.39}$$

式中 α_1、β_1、σ_1、d_1 根据不同的 k' 值从表 3.1.2 选取。

对于矩形容器，作用在侧壁上的最大液动压力为

$$p^w_{\max}(z)=\frac{1}{2}c\gamma ka\left[\left(1-\frac{8}{\pi^2}\frac{\cosh\frac{\pi(z+h)}{a}}{\cosh(\pi h_0)}\right)^2+\left(\frac{8\beta_1}{\pi^2}\frac{\cosh\frac{\pi(z+h)}{a}}{\cosh(\pi h_0)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.3.40}$$

作用在底板上的液动压力之最大值为

$$p^b_{\max}(x)=\frac{1}{2}ck\gamma a\left[\left(1-\frac{2x}{a}-\frac{8}{\pi^2}\frac{\cos\frac{\pi x}{a}}{\cosh(\pi h_0)}\right)^2+\left(\frac{8\beta_1}{\pi^2}\frac{\cos\frac{\pi x}{a}}{\cosh(\pi h_0)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.3.41}$$

合液动压力的最大值为

$$S_{\max}=ck\gamma\pi a^2 h\left[\left(1-\frac{8}{\pi^3}\frac{\tanh(\pi h_0)}{h_0}\right)^2+\left(\frac{8\beta_1}{\pi^3}\frac{\tanh(\pi h_0)}{h_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}; \tag{3.3.42}$$

作用于侧壁上液动压力所产生的倾覆力矩最大值为

$$M^w_{\max}=ck\gamma\pi a^2 h^2\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{8m^w_1}{\pi^2}\right)^2+\left(\frac{8\beta_1 m^w_1}{\pi^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.3.43}$$

式中

$$m^w_1=\frac{1}{\pi h_0}\left[\tanh(\pi h_0)+\frac{1}{\pi h_0}\left(\frac{1}{\cosh(\pi h_0)}-1\right)\right]; \tag{3.3.44}$$

作用于底板上液动压力所产生的倾覆力矩最大值为

$$M^b_{\max}=ck\gamma a^3 b\left[\left(\frac{1}{12}-\frac{8}{\pi^4\cosh(\pi h_0)}\right)^2+\left(\frac{8\beta_1}{\pi^4\cosh(\pi h_0)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.3.45}$$

在以上各公式中，$\gamma=\rho g$ 为液体的单位体积重量，c 为结构系数，按工业与民用建筑抗震设计规范的规定，对于诸如水塔之类的建筑，可以取 $c=0.4$，而对于贮液构筑物，可适

当加大。

二、算例

假设在 9 度地震区有一圆柱形贮液容器，其半径 $a=10$ 米，内存重油，其单位体积重量为 $\gamma=0.8$ 吨/米^3，液面距容器底深度为 $h=13$ 米。假设容器为刚性体且集中之重油处于满液状态。此贮液器修建在Ⅱ类地基上(关于地基土分类的概念，见文献[7])。试求作用于容器上的液动压力和倾覆力矩的最大值。

和第一节第四段的例一样，取结构系数 $c=0.4$，因为此贮液器位于 9 度区，从而有 $k=0.4$，再令 $\theta=\frac{\pi}{2}$，这样

$$ck\gamma a\sin\theta=0.4\times0.4\times0.8\times10\times1=1.28(\text{吨/米}^2)$$

由上例算得的贮液自振周期 $T_1=4.69$ 秒和 $T_2=2.75$ 秒，在图 2.4.1 上按照第Ⅱ类地基的反应谱曲线，查得 $\beta_1=\beta_2=\frac{0.2\times1.8}{0.4}=0.9$。

侧壁上脉冲压力和第一振型的液动压力可以按公式(3.3.26)依表 3.3.3 进行计算，表中之 $p_1^w(z)$ 由公式(3.3.4)确定。第二振型的影响可按表 3.3.4 计算，其中之 $p_2^w(z)$ 同样由公式(3.3.4)确定。

表 3.3.3

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
z/h	$p_1^w(z)$	0.838(b)	β_1(c)	1−(c)	(e)^2	(d)^2	(f)+(g)	$\sqrt{(h)}$	1.28(i)
0	1	0.838	0.754	0.162	0.0262	0.569	0.596	0.771	0.988
0.2	0.629	0.526	0.473	0.474	0.226	0.224	0.450	0.676	0.877
0.4	0.403	0.338	0.304	0.662	0.440	0.0925	0.533	0.730	0.934
0.6	0.271	0.227	0.204	0.773	0.600	0.0416	0.642	0.800	1.020
0.8	0.204	0.171	0.154	0.829	0.690	0.0237	0.714	0.845	1.080
1.0	0.182	0.152	0.137	0.818	0.722	0.0188	0.741	0.860	1.100

表 3.3.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z/h	$p_2^w(z)$	0.073(2)	β_2(3)	上表中(e)+(3)	(4)^2	(5)^2	上表中(g)+(6)+(7)	$\sqrt{(8)}$	1.28(9)
0	1	0.073	0.066	0.090	0.0043	0.0081	0.581	0.761	0.975
0.2	0.2145	0.018	0.016	0.456	0.0003	0.208	0.432	0.606	0.8[illegible]
0.4	0.0634	0.004	0.004	0.653	0	0.435	0.528	0.726	0.929
0.6	0.0155	0.001	0.001	0.772	0	0.598	0.640	0.800	1.020
0.8	0.0041	0	0	0.829	0	0.677	0.701	0.836	1.070
1.0	0.0020	0	0	0.818	0	0.722	0.741	0.860	1.100

从这两个表可见，液动压力沿高度的分布接近于矩形(如图 3.3.1 示)，而且第二振型的影响是很小的。因此，在实际计算时只需考虑一个振型就够了。

将此结果和第一节的图 3.1.22 相比较可见，当考虑表面波影响时，侧壁上液面处液动压

力不再如忽略表面波影响时那样等于零了。表面波影响主要表现在液面附近，它沿着深度很快地衰减，这和第一章中所指出的结论相一致。

若只考虑第一振型，底板上的液动压力，可以按公式(3.3.27)依下表(表3.3.5)计算。

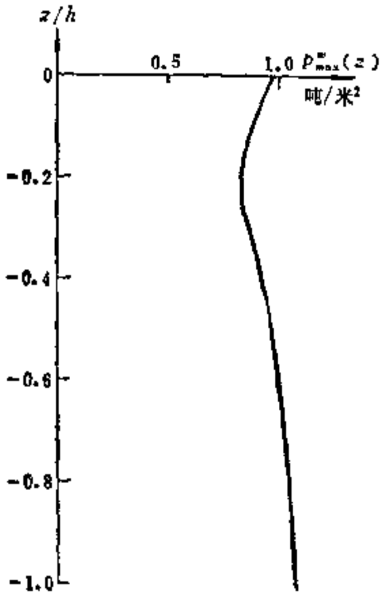


图 3.3.1

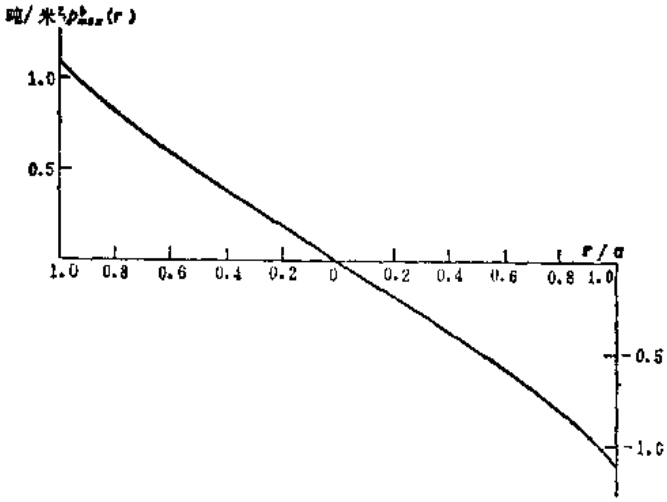


图 3.3.2

表 3.3.5

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
r/a	$R_1\left(\sigma_1\frac{r}{a}\right)$	0.838(b)	β_1(c)	(a)−(c)	$(e)^2$	$(d)^2$	(f)+(g)	$\sqrt{(h)}$	1.28(i)
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.2	0.069	0.0578	0.052	0.1422	0.0202	0.0027	0.0229	0.151	0.193
0.4	0.1073	0.0899	0.0809	0.3101	0.0962	0.0065	0.1027	0.320	0.410
0.6	0.1473	0.1234	0.1111	0.4766	0.2271	0.01234	0.2394	0.489	0.626
0.8	0.1731	0.1451	0.1306	0.6549	0.4290	0.01706	0.4461	0.668	0.855
1.0	0.182	0.1527	0.1374	0.8473	0.7179	0.0189	0.7368	0.858	1.098

从图 3.3.3 及图 3.1.23 可见，作用于底板上的液动压力，无论考虑表面波影响与否，均沿着半径方向几乎呈直线分布。这意味着，在实际计算中，可以作直线分布的简化。同时，从图 3.3.2 和图 3.1.23 亦看出，表面波对作用于底板上的液动压力影响不大。

最后，我们可从式（3.3.28）、（3.3.29）、（3.3.30）算出作用于容器上总液动压力、作用于侧壁上液动压力所产生的倾覆力矩和作用于底板上液动压力所产生的倾覆力矩的最大值：

$$S_{max}=0.4\times0.4\times0.8\times3.14\times10^2\times13\times0.761=397.6(\text{吨}),$$

$$M^{w}_{max}=0.4\times0.4\times0.8\times3.14\times10^2\times13^2\times0.268=1820.4(\text{吨}\cdot\text{米}),$$

$$M^{b}_{max}=0.4\times0.4\times0.8\times3.14\times10^4\times0.209=840.0(\text{吨}\cdot\text{米}).$$

和第一节第四段的例子所得到的结果进行比较，考虑表面波影响时，合液动压力 S_{max} 比不考虑表面波影响时的值增加 17%，而作用于侧壁上液动压力所产生的倾覆力矩增加 7.2%，作用于底板上的液动压力所产生的倾覆力矩则只增了 0.4%。由此可见，从实用观点来看，

在对横向尺寸足够大的贮液容器进行抗震设计时，为了计算简单起见，可以忽略表面波影响，而只考虑脉冲压力的作用。而对于小型容器，如作这样的简化处理，就将带来不可忽视的误差。

三、弹性贮液构筑物中液动压力的计算

为了节省篇幅起见，对于弹性构筑物，这里，我们只讨论作用在侧壁上的液动压力、作用在底板上的液动压力及其合液动压力，至于由侧壁上液动压力所产生的倾覆力矩和由底板上液动压力所产生的倾覆力矩可按相同方法进行计算。

和前面一样，我们首先把作用于容器侧壁和底板上的液动压力及其合力的公式改写为：

作用于侧壁上的液动压力

$$p^{w}_{(z,t)}=-A\sum_{j=1,3,\cdots}^{\infty}B_j\left\{\left[D_j-\sum_{n=1}^{\infty}A_{jn}\eta_n\right]\ddot{x}_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}A_{jn}\eta_n[\ddot{x}_0(t)+\ddot{\delta}_n(t)]\right\};\tag{3.3.46}$$

作用于底板上的液动压力

$$p^{b}(\xi,t)=-A\sum_{j=1,3,\cdots}^{\infty}B'_j\left\{\left[D'_j-\sum_{n=1}^{\infty}A'_{jn}\eta_n\right]\ddot{x}_0+\sum_{n=1}^{\infty}A'_{jn}\eta_n[\ddot{x}_0(t)+\ddot{\delta}_n(t)]\right\}.\tag{3.3.47}$$

对于圆柱形和圆环形容器，$\xi=r$；对于矩形容器，$\xi=x$。

合液动压力(基底剪力)

$$S(t)=-C\sum_{j=1,3,\cdots}^{\infty}H_j\left\{\left[D_j-\sum_{n=1}^{\infty}A_{jn}\eta_n\right]\ddot{x}_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}A_{jn}\eta_n[\ddot{x}_0(t)+\ddot{\delta}_n(t)]\right\},\tag{3.3.48}$$

式中，对于圆柱形容器

$$\left.\begin{aligned}
&A=\rho\sin\theta\\
&B_j=\frac{4}{j\pi}\frac{I_1\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)}{I'_1\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)}\cos\frac{j\pi(z+h)}{2h}\\
&D_j=(-1)^{\frac{j-1}{2}}\frac{2h}{j\pi},\\
&A_{jn}=\int_{-h}^{0}X_n(z)\cos\frac{j\pi(z+h)}{2h}dz,\\
&B'_j=\frac{4}{j\pi}\frac{I_1\left(\frac{j\pi r}{2h}\right)}{I'_1\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)},\\
&C=\rho a h,\\
&H_j=(-1)^{\frac{j-1}{2}}\frac{8}{\pi_j^2}\frac{I_1\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)}{I'_1\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)},\\
&D'_j=D_j,\quad A'_{jn}=A_{jn},\quad h_0=\frac{h}{a}.
\end{aligned}\right\}\tag{3.3.49}$$

振型函数 $X_n(z)$ 由公式(3.2.46)、(3.2.48)、(3.2.50)确定。

对于圆环形容器

$$
\left.\begin{aligned}
&A=\rho\sin\theta,\\
&B_j=\frac{4}{j\pi}\frac{\cos\dfrac{j\pi(z+h)}{2h}}{I_1'\left(\dfrac{j\pi}{2h_0}\right)K_1'\left(\dfrac{j\pi k'}{2h_0}\right)-I_1'\left(\dfrac{j\pi k'}{2h_0}\right)K_1'\left(\dfrac{j\pi}{2h_0}\right)},\\
&B_j'=\frac{4}{j\pi}\frac{1}{I_1'\left(\dfrac{j\pi}{2h_0}\right)K_1'\left(\dfrac{j\pi k'}{2h_0}\right)-I_1'\left(\dfrac{j\pi k'}{2h_0}\right)K_1'\left(\dfrac{j\pi}{2h_0}\right)}\\
&D_j'=(-1)^{\frac{j-1}{2}}\frac{2h}{j\pi}\left\{I_1\left(\frac{j\pi r}{2h}\right)\left[K_1'\left(\frac{j\pi k'}{2h_0}\right)-K_1'\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)\right]-\right.\\
&\qquad\left.-K_1\left(\frac{j\pi r}{2h}\right)\left[I_1'\left(\frac{j\pi k'}{2h_0}\right)-I_1'\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)\right]\right\},\\
&A_{jn}'=I_1\left(\frac{j\pi r}{2h}\right)\int_{-h}^{0}\left[K_1'\left(\frac{j\pi k'}{2h_0}\right)X_n^a(z)-K_1'\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)X_n^{k'a}(z)\right]\times\\
&\times\cos\frac{j\pi(z+h)}{2h}dz-K_1\left(\frac{j\pi r}{2h}\right)\int_{-h}^{0}\left[I_1'\left(\frac{j\pi k'}{2h_0}\right)X_n^a(z)-I_1'\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)\times\right.\\
&\qquad\left.\times X_n^{k'a}(z)\right]\cos\frac{j\pi(z+h)}{2h}dz,\\
&C=\rho a h,\\
&H_j=(-1)^{\frac{j-1}{2}}\frac{8}{\pi j^2}\frac{1}{I_1'\left(\dfrac{j\pi}{2h_0}\right)K_1'\left(\dfrac{j\pi k'}{2h_0}\right)-I_1'\left(\dfrac{j\pi k'}{2h_0}\right)K_1'\left(\dfrac{j\pi}{2h_0}\right)};\\
&\text{对于外壁}\\
&D_j=(-1)^{\frac{j-1}{2}}\frac{2h}{j\pi}\left\{I_1\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)\left[K_1'\left(\frac{j\pi k'}{2h_0}\right)-K_1'\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)\right]-K_1\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)\times\right.\\
&\qquad\left.\times\left[I_1'\left(\frac{j\pi k'}{2h_0}\right)-I_1'\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)\right]\right\},\\
&A_{jn}=I_1\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)\int_{-h}^{0}\left[K_1'\left(\frac{j\pi k'}{2h_0}\right)X_n^a(z)-K_1'\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)X_n^{k'a}(z)\right]\times\\
&\times\cos\frac{j\pi(z+h)}{2h}dz-K_1\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)\int_{-h}^{0}\left[I_1'\left(\frac{j\pi k'}{2h_0}\right)X_n^a(z)-\right.\\
&\qquad\left.-I_1'\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)X_n^{k'a}(z)\right]\cos\frac{j\pi(z+h)}{2h}dz;\\
&\text{对于内壁}\\
&D_j=(-1)^{\frac{j-1}{2}}\frac{2h}{j\pi}\left\{I_1\left(\frac{j\pi k'}{2h_0}\right)\left[K_1'\left(\frac{j\pi k'}{2h_0}\right)-K_1'\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)\right]-K_1\left(\frac{j\pi k'}{2h_0}\right)\times\right.\\
&\qquad\left.\times\left[I_1'\left(\frac{j\pi k'}{2h_0}\right)-I_1'\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)\right]\right\},\\
&A_{jn}=I_1\left(\frac{j\pi k'}{2h_0}\right)\int_{-h}^{0}\left[K_1'\left(\frac{j\pi k'}{2h_0}\right)X_n^a(z)-K_1'\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)X_n^{k'a}(z)\right]\times\\
&\times\cos\frac{j\pi(z+h)}{2h}dz-K_1\left(\frac{j\pi k'}{2h_0}\right)\int_{-h}^{0}\left[I_1'\left(\frac{j\pi k'}{2h_0}\right)X_n^a(z)-\right.\\
&\qquad\left.-I_1'\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)X_n^{k'a}(z)\right]\cos\frac{j\pi(z+h)}{2h}dz.
\end{aligned}\right\}\tag{3.3.50}
$$

振型函数 $X_n^a(z)$ 和 $X_n^{b'a}(z)$ 由第一节第二段中的方法决定，

对于矩形容器

$$
\left.
\begin{aligned}
&A=\rho,\\
&B_j=\frac{4}{j\pi}\left[\coth\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)-\operatorname{csch}\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)\right]\cos\frac{j\pi(z+h)}{2h},\\
&D_j=(-1)^{\frac{j-1}{2}}\frac{2h}{j\pi}.\\
&A_{jn}=\int_{-h}^{0}X_n(z)\cos\frac{j\pi(z+h)}{2h}dz,\\
&B'_j=\frac{4}{j\pi}\left\{\sinh\left(\frac{j\pi\xi}{2h}\right)+\left[\operatorname{csch}\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)-\coth\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)\right]\cosh\left(\frac{j\pi\xi}{2h}\right)\right\},\\
&C=\rho bh,\\
&H_j=(-1)^{\frac{j-1}{2}}\frac{16}{j^2\pi^2}\left[\coth\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)-\operatorname{csch}\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)\right],\\
&D'_j=D_j,\quad A'_{jn}=A_{jn}.
\end{aligned}
\right\}
\qquad (3.3.51)
$$

振型函数 $X_n(z)$ 由式(3.2.46)、(3.2.58)、(3.2.50)确定．

对于所有三种形式容器，振型参与系数 η_n 均由式(3.2.67)或(3.2.67′)确定．而 $\ddot{\delta}_n(t)$ 由微分方程(3.2.70)结合容器的初始条件确定。

从式(3.3.46)、(3.3.47)、(3.3.48)看出，和刚性容器考虑表面波影响的情形一样，弹性容器在只考虑脉冲作用时，作用于容器上的脉冲液动压力亦可以分成两部份：第一部分与地面运动有关，第二部分与结构的绝对运动有关。显然，只有当两者同时达到最大时，作用于容器上的液动压力才达到最大值，但这种可能性是很小的。因此，和刚性容器情形一样，我们仍然采用平方和开方的方法来近似地求得地震时作用于容器上的液动压力的最大值。于是，由式(3.3.46)、(3.3.47)、(3.3.48)求得

$$
p_{\max}^{w}(z)=ckAg\sum_{j=1,3,\cdots}^{\infty}B_j\left[\left(D_j-\sum_{n=1}^{\infty}A_{jn}\eta_j\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_nA_{jn}\eta_j)^2\right]^{\frac{1}{2}},\qquad(3.3.52)
$$

$$
p_{\max}^{b}(\xi)=ckAg\sum_{j=1,3,\cdots}^{\infty}B'_j\left[\left(D'_j-\sum_{n=1}^{\infty}A'_{jn}\eta_j\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_nA'_{jn}\eta_j)^2\right]^{\frac{1}{2}},\qquad(3.3.53)
$$

$$
S_{\max}=ckCg\sum_{j=1,3,\cdots}^{\infty}H_j\left[\left(D_j-\sum_{n=1}^{\infty}A_{jn}\eta_j\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_nA_{jn}\eta_j)^2\right]^{\frac{1}{2}}.\qquad(3.3.54)
$$

式中 c 是结构系数，k 是地震系数，β_n 是结构第 n 振型的动力放大系数，由反应谱曲线(图 2.4.1)根据容器之自振周期 T_n 选取。

应当指出的是，这里 β_n 是结构的动力放大系数，而对于本节第二段中的刚性容器情形，β_n 是对于贮液的动力放大系数。因此，在目前的情况下，图 2.4.1 中的地震影响系数 $\alpha_{\max}$ 应当取表 3.3.1 中的值，即对于 7 度地震，$\alpha_{\max}=0.23$；对于 8 度地震，$\alpha_{\max}=0.45$；对于 9 度地震，$\alpha_{\max}=0.90$。于是，动力放大系数之最大值取 $\beta_{\max}=2.25$。

从上面的公式可以看出，在计算弹性贮液构筑物中的液动压力时，首先需要求出容器的有液振型，而在求有液振型时，又需要求出容器的无液振型，无液自振频率以及有液自振频率。这些计算是非常繁复的，对于工程使用极不方便。从第二节第二段(四)的例子可见，对

于刚度较大的贮液构筑物，贮液对于振型的影响很小，从工程实用观点来看，可以用容器的无水振型来近似；再者，贮液对容器结构的自振频率，特别是对第一自振频率的影响虽然很大，可以使之显著下降，但从上述算例可见，对于这种市政工程中常见的钢筋混凝土水池来说，其满水时之第一自振周期一般在 0.03 秒左右。如果采用目前颁布的工业与民用建筑抗震规范所规定的反应谱曲线(图 2.4.1)，其自振周期落在反应谱曲线的平台段，从而在利用反应谱理论计算这类结构的地震力时，可不必计算其满液时的自振频率，而简单地取 $\beta_n=2.25$。这样一来，贮液构筑物的抗震计算就变得大为简单了。

把式(3.3.52)—(3.3.54)改写为

$$p^w_{max}(z)=c\alpha_{max}Ag\sum_{j=1,3,\cdots}^{\infty}B_j\left[\sum_{n=1}^{\infty}(A_{jn}\eta_n)^2\right]^{\frac{1}{2}}(1+B_{js})^{\frac{1}{2}}, \tag{3.3.55}$$

$$p^b_{max}(\xi)=c\alpha_{max}Ag\sum_{j=1,3,\cdots}^{\infty}B'_j\left[\sum_{n=1}^{\infty}(A'_{jn}\eta_n)^2\right]^{\frac{1}{2}}(1+B_{js})^{\frac{1}{2}}, \tag{3.3.56}$$

$$S_{max}=c\alpha_{max}Cg\sum_{j=1,3,\cdots}^{\infty}H_j\left[\sum_{n=1}^{\infty}(A_{jn}\eta_n)^2\right]^{\frac{1}{2}}(1+B_{js})^{\frac{1}{2}}, \tag{3.3.57}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}B_{js}&=\frac{\left(D_j-\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_{jn}\eta_n\right)^2}{\beta^2_{max}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(A_{jn}\eta_n)^2},\\B'_{js}&=\frac{\left(D'_j-\sum\limits_{n=1}^{\infty}A'_{jn}\eta_n\right)^2}{\beta^2_{max}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(A'_{jn}\eta_n)^2}.\end{aligned}\right\} \tag{3.3.58}$$

为了计算简单起见，只考虑贮液容器的第一振型。于是，从文献[14]知，其振型函数为

$$X(z)=\sin\frac{\pi(z+h)}{2h}.$$

下面，我们将对圆柱形容器、圆环形容器和矩形容器三种情形分别进行讨论。

(一) 圆柱形容器

这时，我们从式(3.3.49)求得

$$\begin{aligned}A'_{j1}=A_{j1}&=\int_{-h}^{0}\sin\frac{\pi(z+h)}{2h}\cos\frac{j\pi(z+h)}{2h}dz\\&=\frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{1+(-1)^{\frac{j-1}{2}}j}\right].\end{aligned} \tag{3.3.59}$$

由式(3.3.58)得到

$$B_{js}=B'_{js}=(D_j-A_{j1}\eta)^2/\beta^2_{max}(A_{j1}\eta)^2$$

$$=\frac{\left[(-1)^{\frac{j-1}{2}}\frac{1}{j}-\left(\frac{1}{1+(-1)^{\frac{j-1}{2}}j}\right)\eta\right]^2}{\beta^2_{max}\eta^2\left[\frac{1}{1+(-1)^{\frac{j-1}{2}}j}\right]}, \tag{3.3.60}$$

并仿照式(3.2.68)求得

$$A_1=\int_{-h}^{0}\sin\frac{\pi(z+h)}{2h}\left[\rho_1 F\sin\frac{\pi(z+h)}{2h}+\rho a\sum_{k=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{4}{k}\frac{I_1\left(\frac{n\pi}{2h_0}\right)}{I_1'\left(\frac{n\pi}{2h_0}\right)}\times\right.$$

$$\left.\times\cos\frac{k\pi(z+h)}{2h}\int_{-h}^{0}\sin\frac{\pi(z+h)}{2h}\cos\frac{k\pi(z+h)}{2h}dz\right]dz=$$

$$=\frac{\rho_1\pi(a_1^2-a^2)h}{2}+\frac{16\rho a h^2}{\pi^2}\sum_{k=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{k}\frac{I_1\left(\frac{k\pi}{2h_0}\right)}{I_1'\left(\frac{k\pi}{2h_0}\right)}\left(\frac{1}{1+(-1)^{\frac{k-1}{2}}k}\right)^2,$$

$$E_1=\int_{-h}^{0}\sin\frac{\pi(z+h)}{2h}\left[\rho_1 F+\rho a\sum_{k=1,3,\cdots}^{\infty}(-1)^{\frac{k-1}{2}}\frac{8h}{k^2\pi}\frac{I_1\left(\frac{k\pi}{2h_0}\right)}{I_1'\left(\frac{k\pi}{2h_0}\right)}\cos\frac{k\pi(z+h)}{2h}\right]dz$$

$$=2\rho_1(a_1^2-a^2)h+\frac{16\rho a h^2}{\pi^2}\sum_{k=1,3,\cdots}^{\infty}(-1)^{\frac{k-1}{2}}\frac{1}{k^2}\frac{I_1\left(\frac{k\pi}{2h_0}\right)}{I_1'\left(\frac{k\pi}{2h_0}\right)}\left(\frac{1}{1+(-1)^{\frac{k-1}{2}}k}\right).$$

于是，由式(3.2.67)求得振型参与系数

$$\eta=\eta_1=\frac{E_1}{A_1}=\frac{2\rho_1\xi+\frac{16\rho h_0}{\pi^2}\sum_{k=1,3,\cdots}^{\infty}(-1)^{\frac{k-1}{2}}\frac{1}{k^2}\frac{I_1\left(\frac{k\pi}{2h_0}\right)}{I_1'\left(\frac{k\pi}{2h_0}\right)}\left(\frac{1}{1+(-1)^{\frac{k-1}{2}}k}\right)}{\frac{\rho_1\pi\xi}{2}+\frac{16\rho h_0}{\pi^2}\sum_{k=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{k}\frac{I_1\left(\frac{k\pi}{2h_0}\right)}{I_1'\left(\frac{k\pi}{2h_0}\right)}\left(\frac{1}{1+(-1)^{\frac{k-1}{2}}k}\right)^2},\quad(3.3.61)$$

式中 a_1 和 a 分别表示容器外圆半径和内圆半径，$\xi=\frac{a_1^2}{a^2}-1$。图 3.3.3 中给出了两种不同$\frac{\rho_1}{\rho}$值和几种 ξ 值时，η 随 h_0 变化的曲线。

现在，我们来估算 B_{js} 的量值。为此，在表 3.3.6 中列出了 $\eta=\eta_1=1.2$ 时的几个 B_{js} 值。由表可见，B_{js} 与 1 相比较，可以忽略不计。于是，式(3.3.55)—(3.3.57) 可以写为

表 3.3.6

j	1	3	5
B_{js}	0.088	0.039	0.000

$$p_{\max}^{w}(z)=c\alpha_{\max}\eta h\gamma\sin\theta M(h_0,\ z),\quad(3.3.62)$$

$$p_{\max}^{b}(r)=c\alpha_{\max}\eta h\gamma\sin\theta N(h_0,\ z),\quad(3.3.63)$$

$$S_{\max}=c\alpha_{\max}\eta\gamma a h^2 p(h_0),\quad(3.3.64)$$

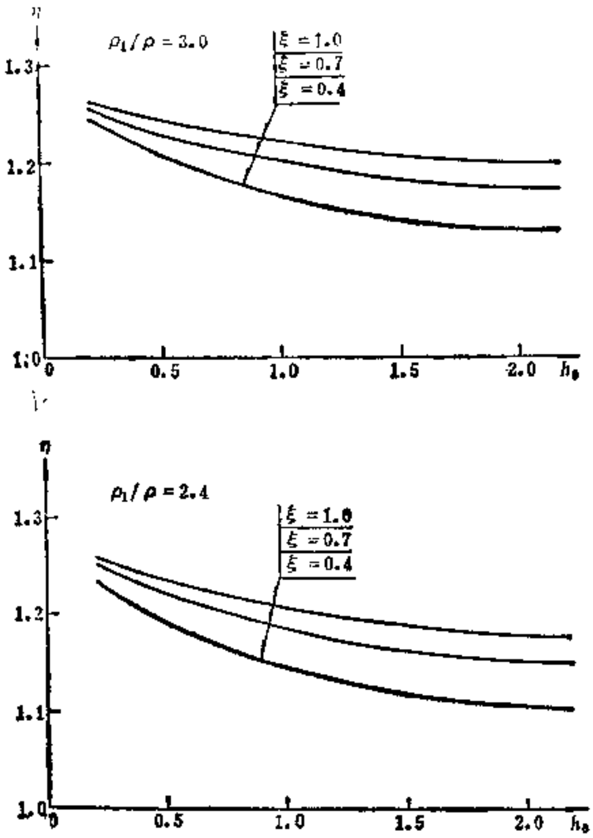


图 3.3.3

$$
\left.
\begin{aligned}
M(h_0,\ z)&=\sum_{j=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{8}{j\pi^2}\left(\frac{1}{1+(-1)^{\frac{j-1}{2}}j}\right)\frac{I_1\left(\frac{j\pi}{2h}\right)}{I_1'\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)}\cos\frac{j\pi(z+h)}{2h},\\
N(h_0,\ r)&=\sum_{j=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{8}{j\pi^2}\left(\frac{1}{1+(-1)^{\frac{j-1}{2}}j}\right)\frac{I_1\left(\frac{j\pi r}{2h}\right)}{I_1'\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)},\\
P(h_0)&=\sum_{j=1,3,\cdots}^{\infty}(-1)^{\frac{j-1}{2}}\frac{16}{j^2\pi^2}\left(\frac{1}{1+(-1)^{\frac{j-1}{2}}j}\right)\frac{I_1\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)}{I_1'\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)}.
\end{aligned}
\right\}\qquad(3.3.65)
$$

图 3.3.4、3.3.5、3.3.6 中示出了 M、N、P 随 h_0 变化的图形。

(二) 圆环形容器

对于这种情况，仍然和上面一样，为了使讨论简单起见，假设容器外柱和内柱的振型形状是相同的。于是，由式 (3.3.50)，得

$$
A_{j1}'=\left\{I_1\left(\frac{j\pi r}{2h}\right)\left[K_1'\left(\frac{j\pi k'}{2h_0}\right)-K_1'\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)\right]-K_1\left(\frac{j\pi r}{2h}\right)\left[I_1'\left(\frac{j\pi k'}{2h_0}\right)-\right.\right.
$$

$$
\left.\left.-I_1'\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)\right]\right\}\times\int_{-h}^{0}\sin\frac{\pi(z+h)}{2h}\cos\frac{j\pi(z+h)}{2h}dz=
$$

$$=\frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{1+(-1)^{\frac{j-1}{2}}j}\right]\left\{I_1\left(\frac{j\pi r}{2h}\right)\left[K_1'\left(\frac{j\pi k'}{2h_0}\right)-K_1'\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)\right]-K_1\left(\frac{j\pi r}{2h}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left[I_1'\left(\frac{j\pi k}{2h_0}\right)-I_1'\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)\right]\right\}. \tag{3.3.66}$$

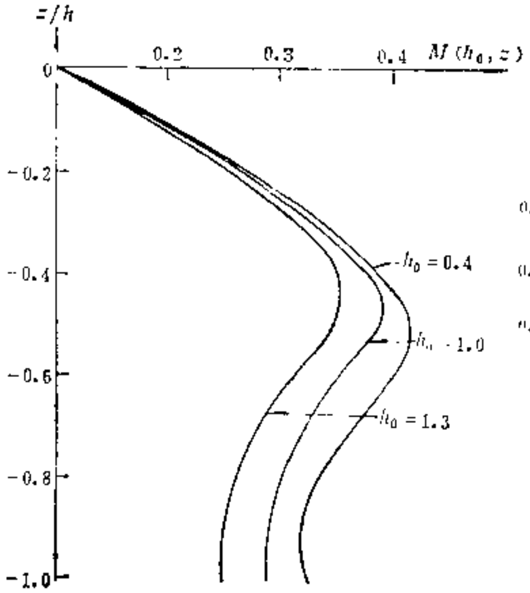


图 3.3.4

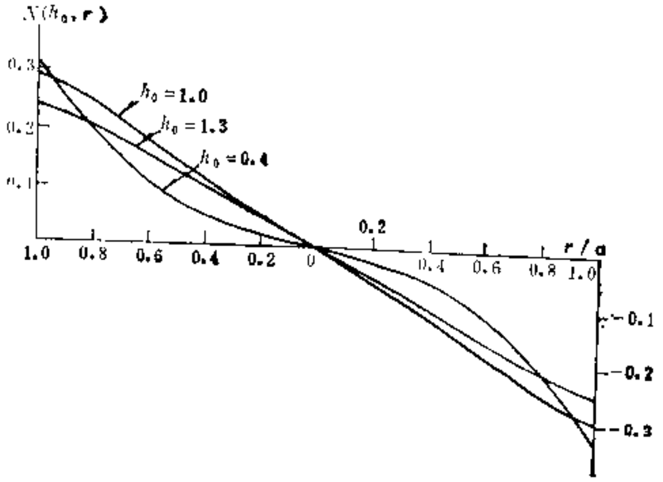


图 3.3.5

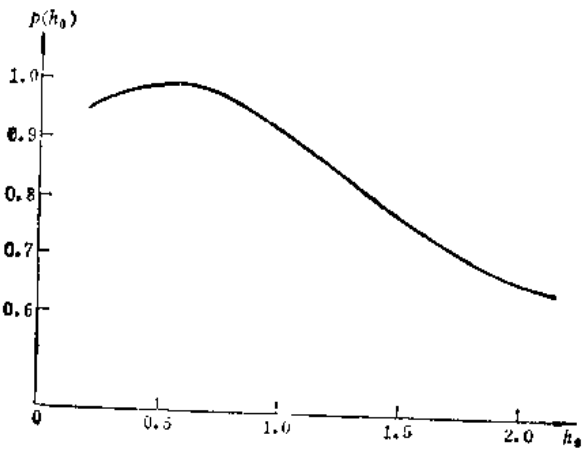


图 3.3.6

对于外壁

$$A_{j1}=\left\{I_1\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)\left[K_1'\left(\frac{j\pi k'}{2h_0}\right)-K_1'\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)\right]-K_1\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)\left[I_1'\left(\frac{j\pi k'}{2h_0}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-I_1'\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)\right]\right\}\int_{-h}^{0}\sin\frac{\pi(z+h)}{2h}\cos\frac{j\pi(z+h)}{2h}dz=$$

$$=\frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{1+(-1)^{\frac{j-1}{2}}j}\right]\left\{I_1\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)\left[K_1'\left(\frac{j\pi k'}{2h_0}\right)-K_1'\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)\right]-K_1\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)\times\right.$$

$$\times\left[I_1'\left(\frac{j\pi k'}{2h_0}\right)-I_1'\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)\right]\Big\};\tag{3.3.67}$$

对于内壁

$$A_{j1}=\frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{1+(-1)^{\frac{j-1}{2}}j}\right]\Big\{I_1\left(\frac{j\pi k'}{2h_0}\right)\left[K_1'\left(\frac{j\pi k'}{2h_0}\right)-K_1'\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)\right]-$$
$$-K_1\left(\frac{j\pi k'}{2h_0}\right)\left[I_1'\left(\frac{j\pi k'}{2h_0}\right)-I_1'\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)\right]\Big\}.\tag{3.3.68}$$

和圆柱形情形一样，此时，有

$$B_{js}=B'_{js}=\frac{\left[(-1)^{\frac{j-1}{2}}\frac{1}{j}-\left(\frac{1}{1+(-1)^{\frac{j-1}{2}}j}\right)\eta\right]^2}{\beta^2_{max}\eta^2\left[\frac{1}{1+(-1)^{\frac{j-1}{2}}j}\right]^2}.$$

再由式（3.2.67）、(3.2.68)，得到外柱和内柱之振型参与系数

$$\eta_{外}=\frac{E_{11}}{A_{11}},\quad \eta_{内}=\frac{E_{12}}{A_{12}},\tag{3.3.69}$$

$\eta_{外}$、$\eta_{内}$分别为外柱和内柱之振型参与系数，其中之E_{1i}和A_{1i}由下式确定：

$$\left.\begin{aligned}
E_{1i}=&\frac{2\rho_iF_ih}{\pi}+\frac{16\rho ah^2}{\pi^2}\sum_{k=1,3,\cdots}^{\infty}(-1)^{\frac{k-1}{2}}\frac{c_k}{k^2}\left[\frac{1}{1+(-1)^{\frac{k-1}{2}}k}\right]\Big\{I_1\left(\frac{k\pi}{2h_0}\right)\times\\
&\times\left[K_1'\left(\frac{k\pi k'}{2h_0}\right)-K_1'\left(\frac{k\pi}{2h_0}\right)\right]-K_1\left(\frac{k\pi}{2h_0}\right)\left[I_1'\left(\frac{k\pi k'}{2h_0}\right)-I_1'\left(\frac{k\pi}{2h_0}\right)\right]\Big\},\\
A_{1i}=&\frac{\rho_iF_ih}{2}+\frac{16\rho ah^2}{\pi^2}\sum_{k=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{C_k}{k}\left[\frac{1}{1+(-1)^{\frac{k-1}{2}}k}\right]^2\Big\{I_1\left(\frac{k\pi}{2h_0}\right)\left[K_1'\left(\frac{k\pi k'}{2h_0}\right)-\right.\\
&\left.-K_1'\left(\frac{k\pi}{2h_0}\right)\right]-K_1\left(\frac{k\pi}{2h_0}\right)\left[I_1'\left(\frac{k\pi k'}{2h_0}\right)-I_1'\left(\frac{k\pi}{2h_0}\right)\right]\Big\},
\end{aligned}\right\}\tag{3.3.70}$$

$i=1,\ 2$，F_1、F_2分别为外柱和内柱之横截面积，C_k由式（3.2.7）确定。

和前面关于圆柱形容器的情形一样，对于圆环形容器，可以证明，B_{js}（和B'_{js}）与1相比，可以认为是充分小的量，从而在式（3.3.55）—(3.3.57）中可以将它略去。最后由以上各式得到：

作用于外壁上液动压力之最大值

$$p^w_{外max}(z)=c\alpha_{max}\eta_{外}h\gamma\sin\theta M_{外}(h_0,\ z),$$

合力

$$S_{外max}=c\alpha_{max}\eta_{外}\gamma ah^2P_{外}(h_0),\tag{3.3.71}$$

由外壁振动所产生的底板上的液动压力

$$p^b_{外max}(r)=c\alpha_{max}\eta_{外}h\gamma\sin\theta N(h_0,\ r);$$

作用于内壁上液动压力最大值

$$p^w_{内max}(z)=c\alpha_{max}\eta_{内}h\gamma\sin\theta M_{内}(h_0,z),$$

合力

$$S_{内max}=c\alpha_{max}\eta_{内}\gamma ah^2P_{内}(h_0)\tag{3.3.72}$$

由内壁振动所产生的底板上的液动压力

$$p^b_{内max}(r)=c\alpha_{max}\eta_{内}h\gamma\sin\theta N(h_0,r);$$

底板上的合液动压力为

$$p^b_{max}(r)=p^b_{外max}(r)+p^b_{内max}(r)=c\alpha_{max}\gamma a h^2(h_0,\ r)(\eta_{外}+\eta_{内}),\qquad(3.3.73)$$

式中

$$M_{外}(h_0,\ z)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{j=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{j}\left[\frac{1}{1+(-1)^{\frac{j-1}{2}}j}\right]F_j\left(\frac{1}{h_0}\right)\cos\left(\frac{j\pi(z+h)}{2h_0}\right),\qquad(3.3.74)$$

$$F_j(x)=\frac{I_1\left(\frac{j\pi}{2}x\right)\left[K_1'\left(\frac{j\pi k'}{2h_0}\right)-K_1'\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)\right]-K_1\left(\frac{j\pi}{2}x\right)\left[I_1'\left(\frac{j\pi k'}{2h_0}\right)-I_1'\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)\right]}{I_1'\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)K_1'\left(\frac{j\pi k'}{2h_0}\right)-I_1'\left(\frac{j\pi k'}{2h_0}\right)K_1'\left(\frac{j\pi}{2h_0}\right)},$$

$$M_{内}(h_0,\ z)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{j=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{j}\left[\frac{1}{1+(-1)^{\frac{j-1}{2}}j}\right]F_j\left(\frac{k'}{h_0}\right)\cos\frac{j\pi(z+h)}{2h_0},\qquad(3.3.75)$$

$$N(h_0,r)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{j=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{j}\left[\frac{1}{1+(-1)^{\frac{j-1}{2}}j}\right]F_j\left(\frac{r}{h}\right),\qquad(3.3.76)$$

$$P_{外}(h_0)=\frac{16}{\pi^2}\sum_{j=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{j-1}{2}}}{j^2}\left[\frac{1}{1+(-1)^{\frac{j-1}{2}}j}\right]F_j\left(\frac{1}{h_0}\right),\qquad(3.3.77)$$

$$P_{内}(h_0)=\frac{16}{\pi^2}\sum_{j=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{j-1}{2}}}{j^2}\left[\frac{1}{1+(-1)^{\frac{j-1}{2}}j}\right]F_j\left(\frac{k'}{h_0}\right).\qquad(3.3.78)$$

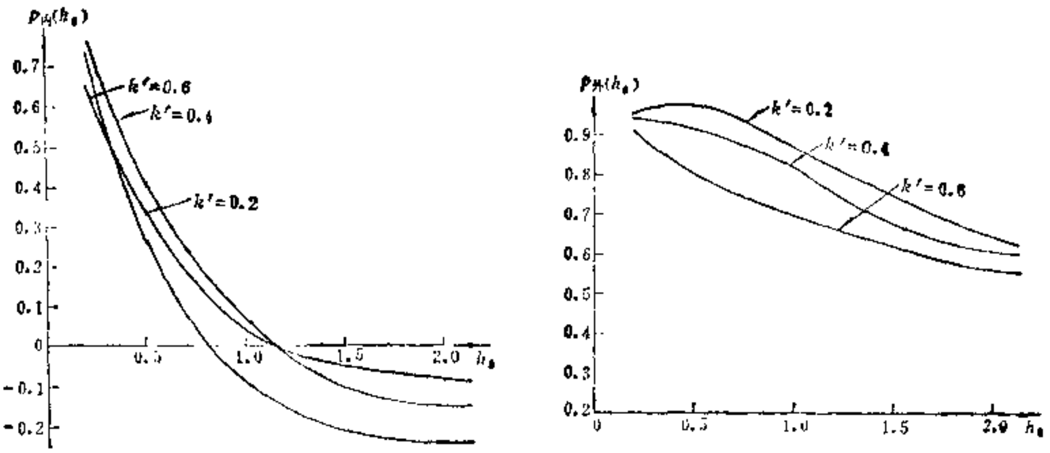


图 3.3.7

图 3.3.7 中示出了当 $k'=0.2$、0.4、0.6 时，$P_{外}(h_0)$ 和 $P_{内}(h_0)$ 随 h_0 变化的曲线。可以证明，当 $k'\to0$ 时，$M_{外}(h_0,\ z)$、$N(h_0,\ r)$ 和 $P_{外}(h_0)$ 与圆柱形容器时的公式（3.3.65）是一致的。

（三）矩形容器

这时，在式（3.3.51）中，

$$A_{j1}'=A_{j1}=\int_{-h}^{0}\sin\frac{\pi(z+h)}{2h}\cos\frac{j\pi(z+h)}{2h}dz$$

$$=\frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{1+(-1)^{\frac{j-1}{2}}j}\right],$$

从而由式（3.3.58）得到

$$B_{j1}=B'_{j1}=\frac{(D_j-A_{j1}\eta)^2}{\beta^2_{\max}(A_{j1}\eta)^2}=\frac{\left[(-1)^{\frac{j-1}{2}}\frac{1}{j}-\left(\frac{1}{1+(-1)^{\frac{j-1}{2}}j}\right)\eta\right]^2}{\beta^2_{\max}\eta^2\left[\frac{1}{1+(-1)^{\frac{j-1}{2}}j}\right]^2},$$

其中，振型参与系η由式（3.2.67）和（3.2.68）求得为

$$\eta=\eta_1=\frac{E_1}{A_1}=\frac{\int_{-h}^{0}\sin\frac{\pi(z+h)}{2h}\left[\rho_1(a_1b_1-ab)+\rho b\sum_{k=1,3,\cdots}^{\infty}G_k(h_0)\times\cos\frac{k\pi(z+h)}{2h}\right]dz}{\int_{-h}^{0}\sin\frac{\pi(z+h)}{2h}\left[\rho_1(a_1b_1-ab)+\rho b\sum_{k=1,3,\cdots}^{\infty}F_k(h_0)\cos\frac{k\pi(z+h)}{2h}\times\int_{-h}^{0}\sin\frac{\pi(z+h)}{2h}\cos\frac{k\pi(z+h)}{2h}dz\right]dz},$$

式中

$$F_k(h_0)=\frac{8}{k\pi}\left[\coth\left(\frac{k\pi}{2h_0}\right)-\mathrm{csch}\left(\frac{k\pi}{2h_0}\right)\right],$$

$$G_k(h_0)=(-1)^{\frac{k-1}{2}}\frac{16h}{k^2\pi^2}\left[\coth\left(\frac{k\pi}{2h_0}\right)-\mathrm{csch}\left(\frac{k\pi}{2h_0}\right)\right].$$

将上式积出，得到

$$\eta=\frac{2\rho_1(\xi-1)+\frac{32\rho h_0}{\pi^3}\sum_{k=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k^2}\left[\frac{1}{1+(-1)^{\frac{k-1}{2}}k}\right]\left[\coth\left(\frac{k\pi}{2h_0}\right)-\mathrm{csch}\left(\frac{k\pi}{2h_0}\right)\right]}{\frac{\rho_1\pi(\xi-1)}{2}+\frac{32\rho h_0}{\pi^3}\sum_{k=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{k}\left[\frac{1}{1+(-1)^{\frac{k-1}{2}}k}\right]^2\left[\coth\left(\frac{k\pi}{2h_0}\right)-\mathrm{csch}\left(\frac{k\pi}{2h_0}\right)\right]},\tag{3.3.79}$$

式中，$\xi=\frac{a_1b_1}{ab}$，a_1，b_1和a、b是容器横截面之外矩形和内矩形的尺寸（如图3.2.1示）。

图3.3.8中示出了对于几个ρ_1/ρ和ξ值，η随h_0变化的曲线。将图3.3.8和图3.3.3相比较，可以看出，圆柱形容器和矩形容器之振型参与系数随h_0值变化时的取值范围是相当接近的。

和圆柱形容器一样，由直接计算容易看出，$B_{j1}(B'_{j1})$与1相比可以作为无限小量而被略去。从而，式(3.3.55)—(3.3.57)可以写为

$$\left.\begin{aligned}p^w_{\max}(z)&=c\alpha_{\max}\eta h\gamma M(h_0,\ z),\\p^b_{\max}(x)&=c\alpha_{\max}\eta h\gamma N(h_0,\ x),\\S_{\max}&=c\alpha_{\max}\eta bh^2\gamma P(h_0).\end{aligned}\right\}\tag{3.3.80}$$

式中

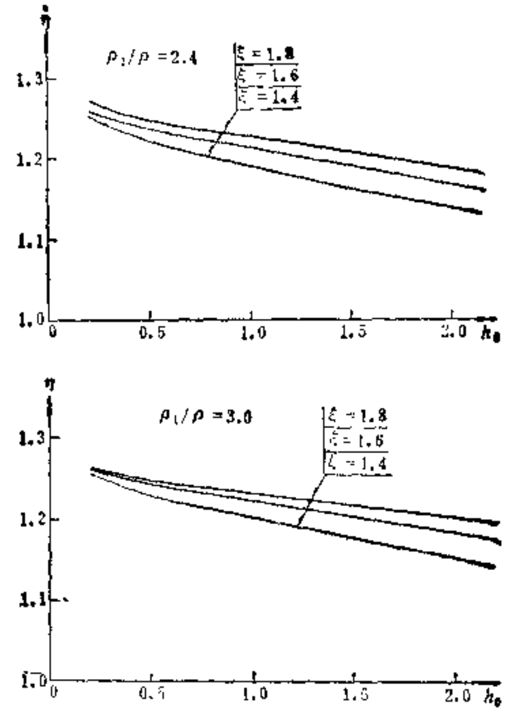


图 3.3.8

$$
\left.
\begin{aligned}
M(h_0,\ z) &= \sum_{j=1,3,\cdots}^{\infty} \frac{8}{j\pi^2}\left[\coth\left(\frac{j\pi}{2\,h_0}\right)-\operatorname{csch}\left(\frac{j\pi}{2\,h_0}\right)\right]\left(\frac{1}{1+(-1)^{\frac{j-1}{2}}j}\right)\cos\frac{j\pi(z+h)}{2\,h}\\
P(h_0) &= \sum_{j=1,3\cdots}^{\infty}(-1)^{\frac{j-1}{2}}\frac{32}{j^2\pi^3}\left(\frac{1}{1+(-1)^{\frac{j-1}{2}}j}\right)\left[\coth\left(\frac{j\pi}{2\,h_0}\right)-\operatorname{csch}\left(\frac{j\pi}{2\,h_0}\right)\right],\\
N(h_0,x) &= \sum_{j=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{8}{j\pi^2}\left(\frac{1}{1+(-1)^{\frac{j-1}{2}}j}\right)\left\{\sinh\left(\frac{j\pi x}{2\,h_0}\right)+\left[\operatorname{csch}\left(\frac{j\pi}{2\,h_0}\right)-\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.-\coth\left(\frac{j\pi}{2\,h_0}\right)\right]\cosh\left(\frac{j\pi x}{2\,h}\right)\right\}.
\end{aligned}
\right\}
\tag{3.3.81}
$$

图 3.3.9、图 3.3.10、图 3.3.11 上给出了 $M(h_0,\ z)$、$N(h_0,\ x)$、$P(h_0)$随 h_0 变化的曲线。若与圆柱形容器的相应曲线(图 3.3.4、图 3.3.5、图 3.3.6)比较，可见它们之间的形状是相似的。

算例：假设在 9 度地震区有一圆柱形钢筋混凝土贮液容器，单位体重为 2.4 吨/米^3，其内半径为 $a=10$ 米，外半径 $a_1=11.8$ 米，内存重油，油的单位体重为 $\gamma=0.8$ 吨/米^3，液面高度为 $h=13$ 米。试求地震时作用于容器侧壁上的最大脉冲液动压力。

从表 3.3.1 知，对于 9 度地震区，地震影响系数之最大值取 $\alpha_{max}=0.9$。又由 $\xi=\frac{a_1^2}{a^2}-1=\frac{11.8^2}{10^2}-1=0.4$，$\rho_1/\rho=\frac{2.4}{0.8}=3.0$ 和 $h_0=\frac{h}{a}=\frac{13}{10}=1.3$，从图 3.3.3 和图 3.3.6 查得 $\eta=1.21$，$P(h_0)=0.82$。若取结构系数 $c=0.4$，则从公式(3.3.64)计算得作用于容器侧壁上的最大脉冲液动压力的合力为

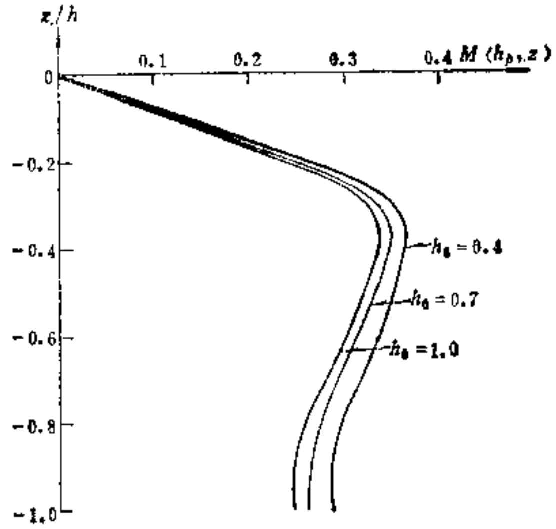


图 3.3.9

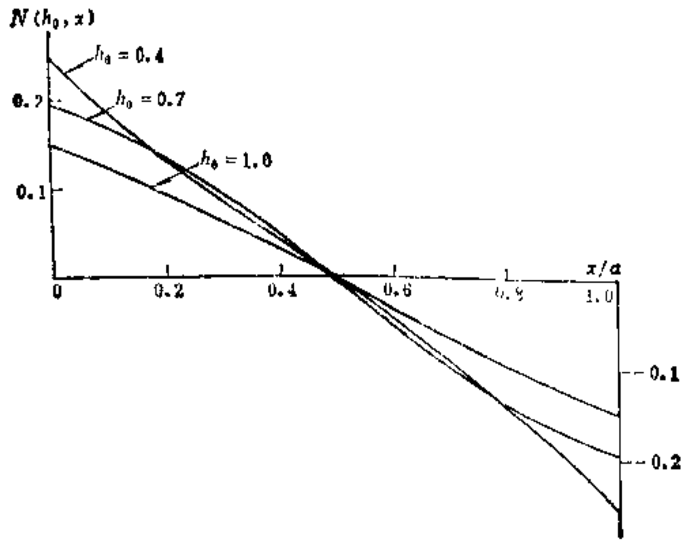


图 3.3.10

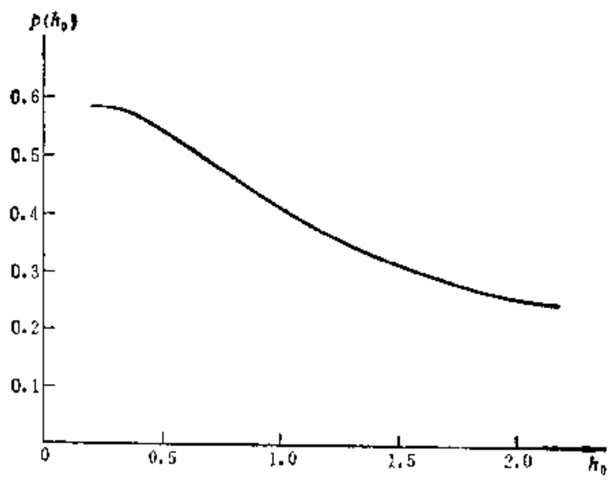


图 3.3.11

$$S_{max}=c\alpha_{max}\eta\gamma ah^2P(h_0)$$
$$=0.40\times0.90\times1.21\times0.80\times10\times13^2\times0.82=482.9(\text{吨})$$

从第一节第四段的算例可见，对于具有与本例相同内径（$a=10$米），内贮同一液体（重油），且液面高度（h）相同的刚性贮液容器，它在9度地震时可能遭受作用于其器壁上的最大脉冲合液动压力为$S_{max}=339.6$吨。本例所得到的值（约大42%）。这和文献[11]的结论是一致的。由此可见考虑容器弹性变形的重要性。

第四节 作用于贮液构筑物上的液动压力的简化计算方法

上面几节中，对于贮液构筑物中的液体在受到地震荷载时所产生的液动压力进行了分析。从上面的讨论得知，这样的分析方法需要寻求拉普拉斯方程满足给定边界条件的解。这就不可避免地造成了严格解析解法的一些缺点。这表现在：第一，严格解析解只对于诸如圆柱形容器、矩形容器、圆环形容器这类几何形状比较规整、边界条件比较简单的情形才能得到封闭形式的解，而对于几何形状复杂的容器，则严格解析解将变得无能为力。第二，由于严格解析解法需要求解拉普拉斯方程，因而解的形式往往是以级数形式出现，比较复杂，这必然给数值计算带来困难。因而，从工程角度来看，寻求计算简单而又满足所需精度的方法是很有必要的。

一、刚性贮液容器的简化计算

我们在前面已经证明了，液动压力可以分为脉冲压力和对流压力。脉冲压力与由容器壁之脉冲运动所引起的惯性力相关联，且所产生的液动压力直接正比于容器壁的加速度；对流压力则是由于液体振动所产生的液动压力，它是脉冲压力的结果。豪斯纳尔(Housner)[13]以此为基础，求助于贮液器运动时其中液体流动物理上的直观，发展了计算这两种压力的近似方法。此法的优点是，避开了求解拉普拉斯方程及无穷级数，解的形式简单，便于数值计算，且与精确解相比较，其误差相当小。其次，此方法可以对若干形状比较复杂的容器（比如椭圆形容器、侧壁为倾斜面的容器等等）得出计算液动压力的简便方式。

自豪斯纳尔的文章问世以后，不少作者在这方面进行过工作，得到了若干适于设计者利用的结果。其中，例如艾泼斯坦(Epstein)对于所谓“浅”水容器和细高容器建议了计算弯矩和倾覆力矩的若干有用曲线[16]。

本小节中，我们将以豪斯纳尔的工作为基础，介绍这一简化计算方法，并且只考虑所谓“浅”水容器的情形，至于细高容器，可以参见文献[16]。

（一）方法概述

1．脉冲压力的计算

考虑具有垂直侧壁和水平底板之容器，它关于垂直平面$x-y$和$z-y$是对称的。设容器的侧壁在x方向上给定了一个脉冲加速度$\ddot{x}_0(t)$。这将在x、y方向上产生流体加速度$\dot{u}$、$\dot{v}$和z轴方向上的加速度分量$\dot{w}$。对于矩形水柜，$\dot{w}$显然等于零；对于圆柱形水柜，从第一节的结果可以看出，环向加速度分量$\dot{u}_\theta$同样等于零。以此为依据，可以假定$\dot{w}$对$\dot{u}$的比值或者严格地等于零，或者是如此地小，以至于$\dot{w}$可以忽略。在物理上，这等价于流体被若干垂直的薄膜所限制，这些薄膜之间的间隔dz。由于这些薄膜的存在，迫使流体运动仅发

生在 x-y 平面中。于是，只考虑流体薄层中发生的脉冲压力就足够了。

考虑一单位厚度之流体薄层，如图 3.4.1 所示，并设器壁在 x 方向上给定一水平加速度 $\ddot{x}_0(t)$。此加速度之影响在于把水平加速度给予流体，同时亦给予流体一垂直加速度分量。流体的这种作用相似于当流体速度之水平分量 u 与 y 坐标无关所产生的结果，即将流体想象为被若干无质量的垂直薄膜所约束，这些薄膜在 x 方向自由运动，并设它们开始时彼此相隔 dx。当容器之侧壁给定一加速度时，这些薄膜将和流体一起被加速，而且流体将同样由于薄膜限制的关系垂直地被挤压。如图 3.4.1 所示，限制于两相邻薄膜之间的流体，由于不可压缩性，应满足连续性方程

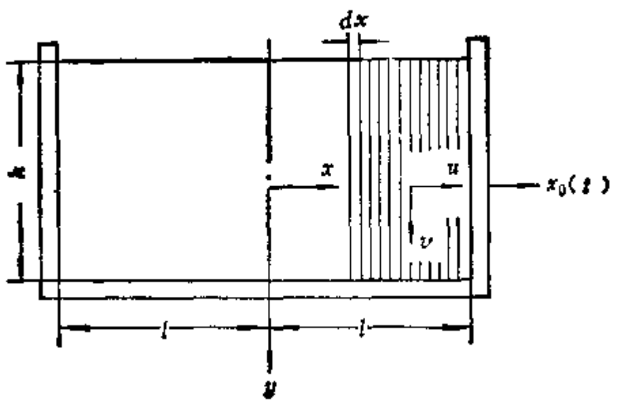


图 3.4.1

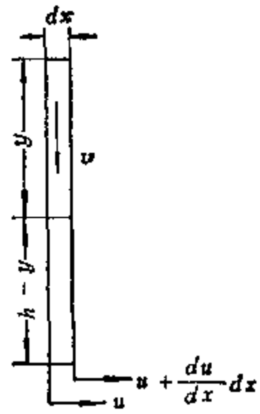


图 3.4.2

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}+\frac{\partial \dot{v}}{\partial y}=0$$

对 y 进行积分，得

$$\dot{v}=(h-y)\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}+A,$$

式中 A 为积分常数。由于当 $y=h$ 时，液体不可能有垂直速度分量，即 $\dot{v}|_{y=h}=0$，于是有 $A=0$，从而得到关系式

$$\dot{v}=(h-y)\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}\ . \tag{3.4.1}$$

将上式对时间 t 求导，可得加速度所满足的方程如下

$$\ddot{v}=(h-y)\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x}\ . \tag{3.4.1$'$}$$

再由假定流体微团运动速度小到足以忽略掉速度的二次以上的项，于是，由欧拉方程(1.1.1)，流体中的压力由

$$\frac{\partial p}{\partial y}=-\rho\,\ddot{v}$$

给出。一个薄膜上之总水平力为

$$P=\int_0^h p\,dy\ .$$

这些方程可以写为：

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{v}=(h-y)\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x},\\
&p=-\rho\int_0^y (h-y)\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x}dy=-\rho h^2\left(\frac{y}{h}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{h}\right)^2\right)\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x},\\
&P=-\rho h^2\int_0^h\left(y/h-\frac{1}{2}(y/h)^2\right)\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x}\,dy=-\rho h^3/3\,\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x}.
\end{aligned}\right\}\tag{3.4.2}$$

现在，示于图 3.4.2 中的流体薄片由于两面上的压力不同而发生运动。运动方程为

$$\frac{dP}{dx}dx+\rho h\ddot{u}dx=0$$

利用方程(3.4.2)中的P值，以上方程给出

$$\frac{d^2\ddot{u}}{dx^2}-\frac{3}{h^2}\ddot{u}=0,\tag{3.4.3}$$

其解为

$$\ddot{u}=C_1\cosh\sqrt{3}\frac{x}{h}+C_2\sinh\sqrt{3}\frac{x}{h}.\tag{3.4.4}$$

方程(3.4.2)和(3.4.4)决定着流体压力，且它们仅当液体表面是水平时才是严格可用的。但是，如果考虑局限于流体的小位移情形，则甚至当流体表面已经被激发而运动时，这些方程同样可以利用。即是说，方程(3.4.2)给出相应于任意加速度$\ddot{x}_0$的脉冲流体压力$P(t)$。

2．对流压力的计算

当贮液容器之侧壁遭受加速度作用时，流体自身被激发而振荡，并由此而在容器壁和底板上产生液动压力。现考察流体的第一振型，我们把约束考虑为由水平向可以自由旋转的刚性薄膜所构成，如图 3.4.3 所示。设$\dot{u}$、$\dot{v}$、$\dot{w}$是流体速度在x、y、z轴方向上的分量，则在不可压缩条件下，流体关于上述约束应遵守如下方程：

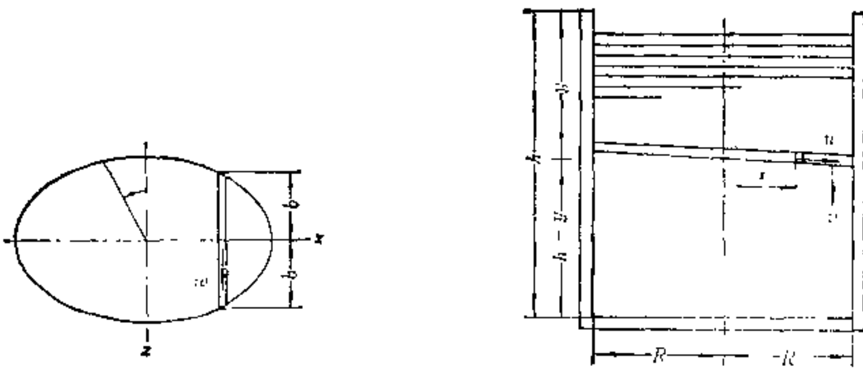


图 3.4.3

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial(\dot{u}b)}{\partial x}=-b\frac{\partial \dot{v}}{\partial y},\\
&\dot{v}=x\dot{\theta},\\
&\frac{\partial \dot{w}}{\partial z}+\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}+\frac{\partial \dot{v}}{\partial y}=0.
\end{aligned}\right\}\tag{3.4.5}$$

其中，b和θ如图 3.4.3 所示。用相似于上节的方式，对于所考虑之特殊形状的容器，可以

写出与之相适应的运动方程。适合于具有二个对称轴的任何形状容器的一般解可以按如下方式推导：

首先，从方程(3.4.5)，得

$$\left.\begin{aligned}\dot{u}&=-\frac{1}{b}\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial y}\int_{-R}^{x}xb\,dx,\\ \dot{w}&=z\frac{b'}{b^2}\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial y}\int_{-R}^{x}xb\,dx,\end{aligned}\right\}\tag{3.4.6}$$

其中$b'=ab/dx$。这样，流体之总动能为

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}\rho\int_0^h\int_{-R}^{R}\int_{-b}^{b}\left\{x^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial y}\right)^2\left(\int_{-R}^{x}xb\,dx\right)^2\left[1+z^2\left(\frac{b'}{b}\right)^2\right]\right\}dx\,dy\,dz\\ &=\frac{1}{2}\rho\int_0^h\left\{I_z\dot{\theta}^2+K\left(\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial y}\right)^2\right\}dy,\end{aligned}\tag{3.4.6'}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}I_z&=\int_{-R}^{R}\int_{-b}^{b}x^2dx\,dz,\\ K&=2\int_{-R}^{R}\frac{1}{b}\left(\int_{-R}^{x}bx\,dx\right)^2\left(1+\frac{b'^2}{3}\right)dx.\end{aligned}\right\}\tag{3.4.7}$$

其次，流体的势能为

$$V=\frac{1}{2}\rho g\theta_0^2\int_{-R}^{R}\int_{-b}^{b}x^2dx\,dz=\frac{1}{2}\rho g\theta_0^2I_z,$$

其中 θ_0 为流体自由表面处的转角。于是，由哈密顿(Hamilton)原理，得

$$\delta\int_{t_1}^{t}(T_1-V)dt=0$$

将T和V的值代入，得

$$\delta\int_{t_1}^{t}\frac{1}{2}\rho\left\{\int_0^h\left[I_z\dot{\theta}^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2K\right]dy-g\theta_0^2I_z\right\}dt=0.$$

将上式进行变分运算，得

$$\int_{t_1}^{t_2}\rho\left\{\int_0^h\left[I_z\dot{\theta}\delta\dot{\theta}+\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial y}\frac{\partial\delta\dot{\theta}}{\partial y}K\right]dy-g\theta_0I_z\delta\theta_0\right\}dt=0.$$

进行分部积分，得

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^h\rho\left[I_z\dot{\theta}-K\frac{\partial^2\dot{\theta}}{\partial y^2}\right]\delta\dot{\theta}\,dy\,dt+\rho\int_{t_1}^{t_2}\left[K\left(\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial y}\right)_0\frac{d\delta\theta_0}{dt}-g\theta_0I_z\delta\theta_0\right]dt=0,$$

再进行一次分部积分，并考虑到在$t=t_1$和$t=t_2$时，有$\delta\theta_0=0$，于是得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\rho\left[\int_0^h\left(I_z\dot{\theta}-K\frac{\partial\dot{\theta}^2}{\partial y^2}\right)\delta\dot{\theta}\,dy\right]dt-\int_{t_1}^{t_2}\rho\left[K\left(\frac{\partial\ddot{\theta}}{\partial y}\right)_0+gI_z\theta_0\right]\delta\theta_0dt=0.$$

这给出如下两个方程：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\dot{\theta}}{\partial y^2}-\frac{I_z}{K}\dot{\theta}=0,\\ &\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)_0+g\frac{I_z}{K}\theta_0=0.\end{aligned}\right\}\tag{3.4.8}$$

其边界条件为

$$
\left.\begin{array}{ll} y=h\text{ 时} & \theta_h=\dot{\theta}_h=0, \\ y=0\text{ 时} & \theta=\theta_0,\dot{\theta}=\dot{\theta}_0 \end{array}\right\} \tag{3.4.9}
$$

由方程(3.4.8)在边界条件式(3.4.9)和初始条件 $\theta|_{t=0}=0$ 之下的积分，得到

$$
\left.\begin{aligned} \theta&=\theta_0\frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{I_z}{K}}(h-y)\right)}{\sinh\left(\sqrt{\frac{I_z}{K}}h\right)}\sin\omega t, \\ \omega^2&=g\sqrt{\frac{I_z}{K}}\tanh\left(\sqrt{\frac{I_z}{K}}h\right). \end{aligned}\right\} \tag{3.4.10}
$$

这是对于自由振动和基本振型固有频率的方程。对于矩形、圆形、椭圆形等等这样一些规则形状的容器，只需计算出与容器几何形状有关的积分 I_z 和 K，即可算出上述参数。

流体中的压力由

$$
\left.\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho\ddot{w},\quad \frac{\partial p}{\partial x}=-\rho\dot{u}, \\ &p=-\rho\frac{\partial\ddot{\theta}}{\partial y}\left\{-\int_{-R}^{x}\frac{\theta}{b}dx+\frac{z^2}{2}\frac{b'}{b^2}\theta\right\}, \\ &=\int_{-R}^{x}xbdx. \end{aligned}\right\} \tag{3.4.11}
$$

给出。知道了 p，就可以容易地确定容器侧壁和底板上的力和力矩。

下面，我们将就矩形和圆柱形容器具体说明此方法的应用，

（二）矩形容器液动压力的计算

对于图 3.4.1 所示之单位厚度的矩形容器，为了和前几节相对比，我们假定容器之长度为 a。于是，由脉冲压力之边界条件：$x=\pm\frac{a}{2}$处，$\dot{u}=\ddot{x}_0$，方程(3.4.4)给出

$$
\dot{u}=\ddot{x}_0\frac{\cosh\frac{\sqrt{3}\,x}{h}}{\cosh\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{a}{h}}. \tag{3.4.12}
$$

从而，方程(3.4.2)给出

$$
p=\rho\ddot{x}_0h\sqrt{3}\left(\frac{Y}{h}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{Y}{h}\right)^2\frac{\sinh\frac{\sqrt{3}\,x}{h}}{\cosh\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{a}{h}},\quad P=-\rho\ddot{x}_0\frac{h^2}{\sqrt{3}}\frac{\sinh\frac{\sqrt{3}\,x}{h}}{\cosh\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{a}{h}}. \tag{3.4.13}
$$

这样，容器侧壁加速度 $\ddot{x}_0$ 在一个侧壁上产生正压力，而与之相对的壁上则产生负压力，增加和减小值均为

$$
p^{w_0}=\rho\ddot{x}_0h\left[\frac{Y}{h}-\left(\frac{Y}{h}\right)^2\right]\sqrt{3}\tanh\left(\sqrt{3}\frac{a}{2h}\right), \tag{3.4.14}
$$

而作用于底板上的液动压力为

$$p^{b_0}=-\rho\ddot{x}_0\frac{\sqrt{3}\,h}{2}\frac{\sinh\dfrac{\sqrt{3}\,x}{h}}{\cosh\dfrac{\sqrt{3}\,a}{2\,h}},\tag{3.4.15}$$

作用于侧壁上之总液动压力为

$$S^0=2\,\rho\ddot{x}_0\frac{h^2}{\sqrt{3}}\tanh\left(\sqrt{3}\frac{a}{2\,h}\right),\tag{3.4.16}$$

其作用点距底板的距离为

$$Z_c^0=\frac{3}{8}h,\qquad\left(\frac{2\,h}{a}\leqslant 1.5\right).\tag{3.4.17}$$

可以看出，流体在容器壁上的作用，与流体总质量中百分比$\dfrac{S^0}{ah\rho\ddot{x}}$的部分刚性地固定在底板以上$\dfrac{3}{8}h$高度处之容器壁上所产生的作用等效。此时，等效质量$M_{pr}^0$之值为

$$M_{pr}^0=M_l\frac{\tanh\dfrac{\sqrt{3}\,a}{2\,h}}{\dfrac{\sqrt{3}\,a}{2\,h}}=M_lk_1^*.\tag{3.4.18}$$

这里，$M_l=ah\rho$为单位厚度流体之总质量，而

$$k_1^*=\frac{\tanh\dfrac{\sqrt{3}\,a}{2\,h}}{\dfrac{\sqrt{3}\,a}{2\,h}},\tag{3.4.19}$$

如前面一样，称为折算系数。

施加于容器底板上之总力矩为

$$M^{b_0}=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}xp^{b_0}dx=-\rho h^2\frac{a}{2}\ddot{x}_0\left(1-\frac{\tanh\dfrac{\sqrt{3}\,a}{2\,h}}{\dfrac{\sqrt{3}\,a}{2\,h}}\right).\tag{3.4.20}$$

将此力矩包括在内，则等效质量M_{pr}应当在底板上面

$$Z_c^0=\frac{3}{8}h\left[1+\frac{4}{3}\left(\frac{\dfrac{\sqrt{3}\,a}{2\,h}}{\tanh\dfrac{\sqrt{3}\,a}{2\,h}}-1\right)\right]\tag{3.4.21}$$

处。

现在，我们来考虑对流压力。

对于单位厚度之矩形贮液容器，流体按基本振型作自由振动时，由方程(3.4.7)得到

$$\left.\begin{aligned}I_z&=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}x^2dx=\frac{a^3}{12},\\K&=2\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}2\left(\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\frac{x}{2}dx\right)^2dx=\frac{a^5}{120}.\end{aligned}\right\}\tag{3.4.7'}$$

这样，$\sqrt{\frac{I_z}{K}}=\frac{\sqrt{10}}{a}$，且由方程(3.4.10)得到

$$\left.\begin{aligned}\theta&=\theta_0\frac{\sinh\frac{\sqrt{10}(h-y)}{a}}{\sinh\frac{\sqrt{10}\,h}{a}}\sin\omega t,\\ \omega^2&=\frac{\sqrt{10}\,g}{a}\tanh\frac{\sqrt{10}\,h}{a}.\end{aligned}\right\}\tag{3.4.22}$$

流体中任何一点处的速度由

$$\dot{u}=\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2-x^2}{2}\frac{d\dot{\theta}}{dy},$$

$$\dot{v}=\dot{\theta}x$$

给出。流体中之压力由

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\rho\ddot{u},$$

$$p=-\rho\frac{a^3}{8}\left[\frac{x}{a}-\frac{4}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3\right]\frac{d\ddot{\theta}}{dy}\tag{3.4.23}$$

给出。

于是，由式(3.4.23)和(3.4.22)得到容器壁上$\left(x=\pm\frac{a}{2}\right)$之液动压力为

$$p^{w_1}=\pm\rho\frac{\sqrt{10}\,a^2}{24}\frac{\cosh\frac{\sqrt{10}(h-y)}{a}}{\sinh\frac{\sqrt{10}\,h}{a}}\omega^2\theta_0\sin\omega t,\tag{3.4.24}$$

容器壁上之总液动压力(基底剪力)为

$$S^1=\int_0^h 2\,p^{w_1}dy=\rho\frac{a^3}{12}\omega^2\theta_0\sin\omega t.\tag{3.4.25}$$

由流体施加于容器壁上的总液动压力 S^1 与由等效质量 M_{pr}^1 所产生的力是相同的，即如把流体作为具有质量 M_{pr}^1 的质点—弹簧系统置于容器中一样(如图 3.4.4 示)。如果 M_{pr}^1 以位移 $x_1(t)$ 而振动，则所产生的撞击容器壁的力 $F_1(t)$ 和此质量之动能 T 为：

$$\left.\begin{aligned}X_1&=A_1\sin\omega t,\\ F_1&=-M_{pr}^1A_1\omega^2\sin\omega t,\\ T&=\frac{1}{2}M_{pr}^1A_1^2\omega^2\cos^2\omega t.\end{aligned}\right\}\tag{3.4.26}$$

为了确定式 (3.4.26) 中之 A_1 和 M_{pr}^1，将式 (3.4.7′)、(3.4.22) 代入式(3.4.6′)中，算得容器中流体的总动能为

$$T=\frac{1}{48}\sqrt{\frac{2}{5}}\rho a^4\theta_0^2\omega^2\frac{1}{\tanh\frac{\sqrt{10}h}{a}}\cos^2\omega t\tag{3.4.6″}$$

此动能的最大值与作用于容器壁上之液动压力的绝对最大值的比为

$$\frac{T_{max}}{|S_1|_{max}}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{5}}a\theta_0\frac{1}{\tanh\frac{\sqrt{10}h}{a}}, \qquad (3.4.26')$$

另一方面，由等效质量-弹簧系统所作用于容器壁上之力的最大绝对值和此质量之动能的最大值的比为

$$\frac{T_{max}}{|F_1|_{max}}=\frac{A_1}{2}. \qquad (3.4.26'')$$

其次，使容器中流体的动能与等效质量的动能相等［即令方程(3.4.6″)的右端相等］，得

$$M^1_{pr}=\frac{1}{24A_1^2}\sqrt{\frac{2}{5}}\rho a^4\theta_0^2\omega^2\frac{1}{\tanh\frac{\sqrt{10}h}{a}}. \qquad (3.4.25')$$

使式 (3.4.26′)的右端与式(3.4.26″)的右端相等，求出 A_1，而将 A_1 值代入式 (3.4.25′)，即可求出 M^1_{pr}。将其结果写出如下：

$$\left.\begin{aligned}A_1&=\theta_0\frac{1}{\frac{\sqrt{10}h}{a}\tanh\frac{\sqrt{10}h}{a}},\\ M^1_{pr}&=M_l\left(\frac{\sqrt{10}}{12}\frac{a}{h}\tanh\frac{\sqrt{10}h}{a}\right).\end{aligned}\right\} \qquad (3.4.27)$$

M^1_{pr} 在容器底板以上的高度可从它所产生的力矩与由液体产生的力矩相等来决定。仅考虑侧壁上液动压力所产生的力矩（忽略底板上的压力），得到

$$Z^1_0=h\left(1-\frac{\cosh\frac{\sqrt{10}h}{a}-1}{\frac{\sqrt{10}h}{a}\sinh\frac{\sqrt{10}h}{a}}\right). \qquad (3.4.28)$$

当同时计及施加于底板上的压力时，高度为

$$Z^1_0=h\left(1-\frac{\cosh\frac{\sqrt{10}h}{a}-2}{\frac{\sqrt{10}h}{a}\sinh\frac{\sqrt{10}h}{a}}\right). \qquad (3.4.28')$$

如图 3.4.4 所示，流体在容器上之总影响与由容器、一个具有规定质量 M^0_{pr} 之质点以及弹簧-集中质量 M^1_{pr}、M^3_{pr} 等等所组成之系统是相同的。应注意到，对于更高的非对称($n=3, 5, \cdots$)振型公式，如果 a 用 a/n 来代替的话，则与第一振型的公式是相同的。

当容器遭受任意水平加速度时，图 3.4.4 中系统的反应可很容易计算。由于 M^1_{pr} 的运动，而使流体在基本振型中产生的振动可由方程 (3.4.27) 确定，它给出 A_1 和 θ_0 之间的关系。而水面的真实位移 d，则根据艾泼斯坦[16]，从下式计算：

$$d=\frac{A^*}{2ag}, \qquad (3.4.29)$$

式中，A^*是由晃动质量 M^1_{pr} 所产生的加速度，它可以由式 (3.4.22) 算出的周期，从地震反应谱曲线（图 2.4.1）上求得。

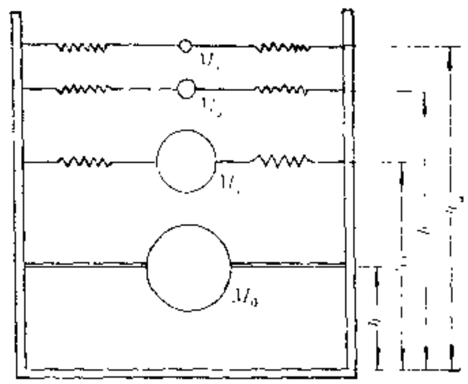


图 3.4.4

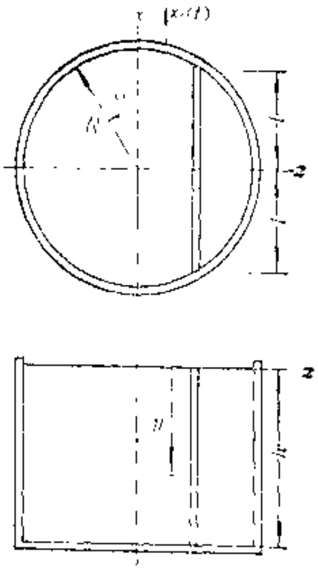


图 3.4.5

（三）圆柱形容器液动压力的计算

考虑如图 3.4.5 所示之圆柱形容器，它遭受水平加速度 $\ddot{x}_0$，且设流体被束缚于平行于 x 轴的固定薄膜之间。雅各布森（Jacobsen）[1]证明了，脉冲 $\ddot{x}_0$ 在流体中不产生速度分量 $\dot{w}$，因而，此时薄膜并不形成真实的约束。这样，各个流体薄片可以作为一狭窄的矩形容器来处理，而且可以应用上节的各个方程。

首先，我们仍然从脉冲压力开始。这时，从方程（3.4.4）和（3.4.5）分别得到作用于容器侧壁和底板上的液动压力$\left(\text{在圆柱形容器情形里，}l=\dfrac{a}{2}\right)$：

$$p^w=-\rho\ddot{x}_0h\left[\frac{y}{h}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{h}\right)^2\right]\sqrt{3}\tanh\left(\sqrt{3}\frac{R}{h}\cos\phi\right) \tag{3.4.30}$$

和

$$p^b=-\rho\ddot{x}_0h\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sinh\dfrac{\sqrt{3}\,x}{h}}{\cosh\dfrac{\sqrt{3}\,l}{h}}. \tag{3.4.31}$$

上列表示式对于计算由流体所产生的总液动压力是不方便的。对于 R/h 不大时，下列修正给出很精确的值，而当 R/h 较大时，给出稍微过高的压力：

$$p^w=-\rho\ddot{x}_0h\left[\frac{y}{h}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{h}\right)^2\right]\sqrt{3}\cos\phi\tanh\frac{\sqrt{3}\,R}{h}. \tag{3.4.30'}$$

从此表示式得到作用于侧壁上之合液动压力为

$$S=\int_0^h\int_0^{2\pi}p^w\cos\phi\,Rd\phi dy=-\rho\ddot{x}_0\pi R^2h\frac{\tanh\dfrac{\sqrt{3}\,R}{h}}{\sqrt{3}\dfrac{R}{h}}. \tag{3.4.32}$$

从此可以看出，所产生之力恰像一等效质量 M_{pr}^{0} 和贮液容器一起运动所产生的惯性力一样，这里

$$M_{pr}^{0}=M_{l}\frac{\tanh\frac{\sqrt{3}R}{h}}{\frac{\sqrt{3}R}{h}}. \tag{3.4.33}$$

为了得到一等于由流体在侧壁上的压力所产生的力矩，质量 M_{pr}^{0} 应固定在底板以上高度

$$Z_{c}^{0}=\frac{3}{8}h \tag{3.4.34}$$

处。如果需要包含由容器底板上液动压力所产生的力矩，则等效质量必须作用在

$$Z_{c}^{0}=\frac{3}{8}h\left[1+\frac{4}{3}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}R}{h}}{\tanh\frac{\sqrt{3}R}{h}}-1\right)\right] \tag{3.4.35}$$

处。

现在我们讨论对流压力。此时，流体的自由振动（第一振型）由方程（3.4.10）决定。对于圆柱形容器，

$$\left.\begin{aligned}&I_{z}=\frac{\pi R^{4}}{4},\quad k=\frac{2\pi}{27}R^{6},\ \sqrt{\frac{I_{z}}{k}}=\sqrt{\frac{27}{8}}\frac{h}{R},\\&\omega^{2}=\frac{g}{R}\tanh\left(\sqrt{\frac{27}{8}}\frac{h}{R}\right),\\&\theta=\theta_{0}\frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{27}{8}}\frac{h-y}{R}\right)}{\sinh\left(\sqrt{\frac{27}{8}}\frac{h}{R}\right)}\sin\omega t\quad .\end{aligned}\right\} \tag{3.4.36}$$

由方程（3.4.11），流体中的压力由

$$\left.\begin{aligned}&p=-\rho\frac{R^{3}}{3}\left(\frac{x}{R}-\frac{1}{3}\left(\frac{x}{R}\right)^{3}-\frac{1}{4}\frac{x}{R}\left(\frac{z}{R}\right)^{2}\right)\frac{\partial\ddot{\theta}}{\partial y},\\&\frac{\partial\ddot{\theta}}{\partial y}=-\left[\sqrt{\frac{27}{8}}\frac{1}{R}\frac{\cosh\sqrt{\frac{27}{8}}\frac{h-y}{R}}{\sinh\sqrt{\frac{27}{8}}\frac{h}{R}}\right]\theta_{0}\omega^{2}\sin\omega t\end{aligned}\right\} \tag{3.4.37}$$

给出。侧壁上之压力为

$$p^{w}=-\rho\frac{R^{3}}{3}\frac{\partial\ddot{\theta}}{\partial y}\left(1-\frac{\cos^{2}\phi}{3}-\frac{\sin^{2}\phi}{4}\right)\cos\phi. \tag{3.4.38}$$

作用于侧壁上之合液动压力为

$$S^{w}=-\frac{11}{48}\pi\rho\omega^{2}R^{4}\theta_{0}\sin\omega t=\frac{12}{11}M_{pr}^{1}g\theta_{0}\sin\omega t \tag{3.4.39}$$

此力与在水平平面中按

$$
\left.
\begin{aligned}
x_1 &= A_1\sin\omega t, \\
M_{pr}^1 &= M_l\frac{1}{4}\left(\frac{11}{12}\right)^2\sqrt{\frac{27}{8}}\frac{R}{h}\tanh\left(\sqrt{\frac{27}{8}}\frac{h}{R}\right), \\
A_1 &= \theta_0\frac{\frac{12}{11}h}{\sqrt{\frac{27}{8}}\frac{h}{R}\tanh\left(\sqrt{\frac{27}{8}}\frac{h}{R}\right)}.
\end{aligned}
\right\} \tag{3.4.40}
$$

振动的等效质量 M_{pr}^1 所产生的力是相同的。为了使得 M_{pr}^1 在壁上产生与流体压力相同的力矩，它应当加于底板以上

$$
Z_C^1 = h\left(1 - \frac{\cosh\left(\sqrt{\frac{27}{8}}\frac{h}{R}\right) - 1}{\sqrt{\frac{27}{8}}\frac{h}{R}\sinh\left(\sqrt{\frac{27}{8}}\frac{h}{R}\right)}\right) \tag{3.4.41}
$$

处。作用于容器底板上的压力为

$$
p^b = -\rho\omega^2\sqrt{\frac{3}{8}}\frac{R^2}{\sinh\left(\sqrt{\frac{27}{8}}\frac{h}{R}\right)}\left[\frac{x}{R} - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{R}\right)^3 - \frac{1}{4}\frac{x}{R}\left(\frac{z}{R}\right)^2\right]\theta_0\sin\omega t. \tag{3.4.42}
$$

由此产生关于绕 z 轴的力矩等于

$$
M^b = \frac{5}{32}\sqrt{\frac{3}{8}}\frac{\pi R^5\rho\omega^2}{\sinh\left(\sqrt{\frac{27}{8}}\frac{h}{R}\right)}. \tag{3.4.43}
$$

将此力矩包括在内，则当

$$
Z_C^1 = h\left(1 - \frac{\cosh\left(\sqrt{\frac{27}{h}}\frac{h}{R}\right) - 2.01}{\sqrt{\frac{27}{8}}\frac{h}{R}\sinh\left(\sqrt{\frac{27}{8}}\frac{h}{R}\right)}\right) \tag{3.4.44}
$$

时，就得到容器上的总力矩。

和矩形容器一样，流体在容器上的总影响与由容器、质量 M_{pr}^0 以及弹簧集中质量 M_{pr}^1、M_{pr}^3 等所组成的系统是相同的（如图 3.4.4 所示）。

根据艾泼斯坦[16]，容器在水平加速度 $\ddot{x}_0$ 的作用之下，液面的真实位移为

$$
d = 0.831\left(\frac{A^*}{g}\right)R. \tag{3.4.45}
$$

四、算例

假设在 9 度地震区有一圆柱形贮液容器，其半径 $R = 10$ 米，内存重油，其单位体积重量为 $r = 0.8$ 吨/米³，液面高度为 $h = 13$ 米。试用豪斯纳尔近似计算法求贮液之基本自振周期、最大脉冲压力及对流压力。

首先，从公式(3.4.36)得到此容器中贮液的基本自振周期为

$$
T_1 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\left[\frac{g}{R}\sqrt{\frac{27}{8}}\tanh\left(\sqrt{\frac{27}{8}}\frac{h}{R}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} =
$$

$$=\frac{2\times3.1416}{\sqrt{0.981\times1.837\times\mathrm{th}(1.837\times1.3)}}=4.69\ 秒.$$

再由公式(3.4.32)，得到作用于容器壁上之合液动压力为

$$S=c\gamma k\pi R^2h\frac{\tanh\frac{\sqrt{3}R}{h}}{\frac{\sqrt{3}R}{h}},$$

其中 c 为结构系数，取 $c=0.4$，k 为地震系数。对于 9 度地震，取 $k=0.4$。将容器及其中贮液的各种参量代入上公式，得到

$$S=0.4\times0.8\times0.4\times3.14\times10^2\times13\times\frac{\mathrm{th}\ 1.332}{1.332}=341.0\ (吨).$$

又由公式

$$M^w=SZ_c^0$$

得到作用于侧壁上之液动压力所产生的力矩

$$M^w=341\times\frac{3}{8}\times13=1662.4\ 吨\cdot米.$$

由公式(3.4.33)和(3.4.35)得到由作用于底板上之液动压力所产生的力矩为

$$M^b=c\gamma k\pi R^2h\cdot\frac{h}{2}\left(1-\frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{3}R}{h}\right)}{\frac{\sqrt{3}R}{h}}\right)$$

$$=0.4\times0.8\times0.4\times3.14\times10^2\times13\times\frac{13}{2}\left(1-\frac{\tanh 1.332}{1.332}\right)=1079.7\ (吨\cdot米).$$

将上面结果与用求解拉普拉斯方程的"精确方法"(第一节第四段的算例)所得到的结果相比较，可见用两种方法得到的脉冲压力及贮液基本自振周期是相当接近的。这充分说明了使用豪斯纳尔方法计算容器中液动压力的精确性。

现在，我们来求对流压力。首先，由公式(3.4.45)算得容器中由于液体晃动所产生的波高

$$d=0.831\left(\frac{A^*}{g}\right)R$$

$$=0.831\times\left|\frac{x_0}{g}\right|\times\left|\frac{A^*}{x_0}\right|\times R=0.831\,k\beta R=0.831\,\alpha R,$$

其中 β 为动力放大系数，α 为地震影响系数。由周期 $T=4.69$ 秒，从图 2.4.1 和表 3.4.1，得 $\alpha=0.2\times0.9=0.18$。于是，得波高为

$$d=0.381\times0.18R.$$

由式(3.4.39)得作用于容器侧壁上的合液动压力的最大值为

$$S^w=c\pi\frac{11}{48}\rho\omega^2R^4\times\frac{d}{R}$$

$$=0.4\times3.14\times\frac{11}{48}\times\frac{0.8}{9.8}\times\left(\frac{2\times3.14}{4.69}\right)^2\times10^4\times0.831\times0.18$$

$$=63\ (吨)$$

由公式(3.4.39)和(3.4.11)，得作用于容器侧壁上液动压力所产生的倾覆力矩为

$$M^w = S^w \cdot Z_c^1 = 63 \times h\left(1-\frac{\cosh\left(\sqrt{\frac{27}{8}}\frac{h}{R}\right)-1}{\sqrt{\frac{27}{8}}\frac{h}{R}\sinh\left(\sqrt{\frac{27}{8}}\frac{h}{R}\right)}\right)$$

$$= 63 \times 13 \times \left(1-\frac{\cosh 2.392-1}{2.392 \times \sinh 2.392}\right)$$

$$= 534 \text{（吨·米）}.$$

最后，从公式(3.4.63)算得作用于底板上之液动压力所产生的倾覆力矩为

$$M^b = \frac{5}{32}\sqrt{\frac{3}{8}}\frac{\pi R^5 \rho \omega^2}{\sinh\left(\sqrt{\frac{27}{8}}\frac{h}{R}\right)}$$

$$= \frac{5}{32}\sqrt{\frac{3}{8}}\frac{3.14 \times 10^5 \times \frac{0.8}{9.8} \times \left(\frac{2 \times 3.14}{4.69}\right)^2}{\sinh 2.392} = 801 \text{（吨·米）}.$$

二、弹性贮液容器的简化计算

在第二节中，我们已经对弹性贮液器的动力特性进行了详细分析。从该节的叙述可见，即使将贮液容器视为最简单的悬臂梁，精确计算结构物-贮液的耦联振动效应亦是非常繁复的。究其原因，乃是由于考虑到结构物的弹性时，作用于容器壁上的液动压力与容器的侧向振型形式有关，而精确方法需要从描述耦联振动效应的各种关系求解出这些振型。鉴于精确解法的复杂性，不少著者从工程实际出发，提出了若干简化计算方法。其中，大部分工作又是以预先给定贮液容器的振型形式为基础的。第二节的例题1表明，容器的满水振型与无水振型是异常接近的，这就为这些简化计算方法提供了理论上的依据。应用某一种具体简化计算方法所得结果的精确度，无疑与预先给定的容器振型密切相关。如果所选取的振型形式与容器的真实振型充分接近，则精确度高，反之则精确度差。这就要求设计者应具有丰富的实践经验和熟练的计算技巧。

为使读者对此课题的梗概有所了解，本小节中，我们拟介绍两种典型的简化计算方法。

（一）魏勒索斯(Veletsos)的简化方法[11]

魏勒索斯以乔波拉(Chopra)关于坝-库水系统动水压力耦联效应的研究(见第五章)为基础，对弹性圆柱形贮液容器的地震作用进行了详细考察。为了简单起见，他忽略了容器中贮液的表面重力波影响，并将系统考虑为一"单"自由度系统；此外，他更进一步假定变形期间容器的横断面形状可变，且在任何时刻容器均按预先给定的形式挠曲变形。下面，概略地对此方法作一介绍。

1. 基本运动方程的建立

考虑一挡水墙，假定其遭受水平加速度

$$\ddot{x}_0(z,t) = \psi(z)\ddot{x}_0(t) \tag{3.4.46}$$

的作用。式中，$\psi(z)$是一无量纲挠曲函数，它定义着墙的挠曲形状，在墙顶$z=0$处，$\psi(z)=1$；$\ddot{x}_0(t)$是墙顶部处的加速度。

假定液体为不可压缩理想流体(忽略粘性阻尼影响)，根据第五章第四节的结果，作用于

墙面上的液动压力由下式给出：

$$p(z,t)=\frac{4}{\pi}\gamma h\frac{\ddot{x}(t)}{g}\sum_{n=1}^{\infty}d_n\cos\left[(2n-1)\frac{\pi(z+h)}{2h}\right], \tag{3.4.47}$$

式中 γ 是液体的单位体积重量，d_n 由下式确定：

$$d_n=\frac{1}{(2n-1)h}\int_{-h}^{0}\psi(z)\cos\left[(2n-1)\frac{\pi(z+h)}{2h}\right]dz. \tag{3.4.48}$$

对于 $\psi(z)=1$ 和 $\psi(z)=\frac{z+h}{h}$，d_n 分别由

$$d_n=\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \tag{3.1.49}$$

和

$$d_n=\frac{2}{\pi}\frac{1}{(2n-1)^2}\left[(-1)^{n-1}-\frac{2}{(2n-1)\pi}\right] \tag{3.4.50}$$

给出。显然，$\psi(z)=1$ 相应于刚性墙的情形。图 3.4.6 中示出了三种假定的挠曲形式，图 3.4.7 中给出了相应于刚性墙和这三种挠曲形式的液动压力的量值及分布。

现在，考虑图 3.1.1 所示的圆柱形容器。假设此容器在 x 方向上作水平运动，其运动加速度沿容器高度按式(3.4.46)给出的规律变化。这时，作用于容器壁 $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ 的母线上的液动压力近似地由式(3.4.47)给出，而容器壁上任意一点$(z,\ \theta)$处的液动压力由式

$$p(a,\theta,z,t)=p(z,t)\sin\theta \tag{3.4.51}$$

给出，相应于容器的单位高度的液动压力为

$$S^0(z,t)=\int_0^{2\pi}p(z,t)\,a\,\sin^2\theta d\theta. \tag{3.4.52}$$

$$=\pi ap(z,t).$$

设 $x_0(t)$是任意时刻 t 的地面位移，而 $w(t)$是容器顶部横断面相对于地面的位移。于是，容器矩底板$(z+h)$处(注意：在图 3.11 所示的坐标系统里，z 为负值!)的绝对加速度可以表示为

$$\ddot{x}(z,t)=\ddot{x}_0(t)+\ddot{w}(z,t), \tag{3.4.53}$$

其中

$$w(z,t)=\psi(z)w(t). \tag{3.4.53'}$$

作用于容器上的外力有：a 相应于沿高度均匀分布的加速度 $\ddot{x}_0(t)$ 的惯性力 $[-m(z)\ddot{x}_0(t)]$ 和液动压力 S^0_u，b 相应于非均匀分布加速度 $\psi(z)\ddot{w}(t)$的惯性力$[-m(z)\,\psi\,(z)\ddot{w}(t)]$和液动压力 S^0_w。这里，

$$\left.\begin{aligned}S^0_u(z,t)&=8\gamma ah\frac{\ddot{x}_0(t)}{\pi g}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi(z+h)}{2h},\\ S^0_w(z,t)&=4\gamma ah\frac{\ddot{w}(t)}{g}\sum_{n=1}^{\infty}d_n\cos\frac{(2n-1)\pi(z+h)}{2h}.\end{aligned}\right\} \tag{3.4.52'}$$

式中 d_n 由式(3.4.48)确定。在这些外力作用之下，容器中所产生的内力有：(a)弹性力$\left(设容器作弯曲变形，其弹性恢复力矩为 EI(z)w(t)\frac{d^2\psi(z)}{dz^2}\right)$，$(b)$阻尼力 $c\psi(z)\ddot{w}(t)$。

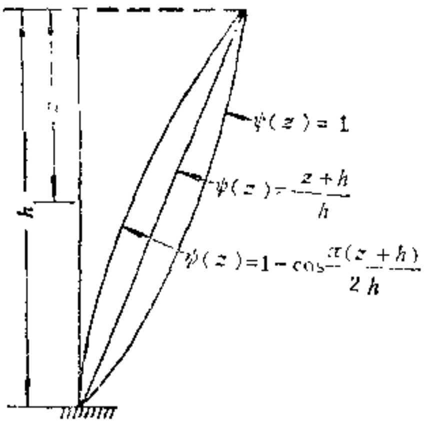


图 3.4.6

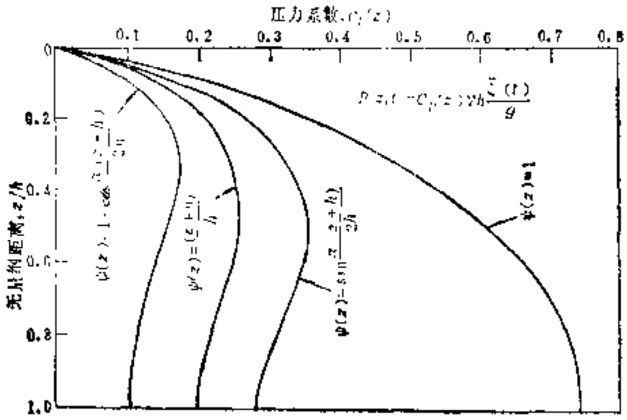


图 3.4.7

根据虚位移原理，可得容器的如下运动方程(详细推导可参阅第五章第四节)：

$$[m^*_{w,s}+m^*_{w,l}]\ddot{w}(t)+c^*\dot{w}(t)+k^*w(t)=-[m^*_{u,s}+m^*_{u,l}]\ddot{x}_0(t), \qquad (3.4.54)$$

式中

$$\left.\begin{aligned} m^*_{w,s}&=\int_{-h}^{0} m(z)\psi^2(z)dz,\\ m^*_{w,l}&=\int_{-h}^{0} S_w(z)\psi(z)dz,\\ m^*_{u,s}&=\int_{-h}^{0} m(z)\psi(z)dz,\\ m^*_{u,l}&=\int_{-h}^{0} S_u(z)\psi(z)dz, \end{aligned}\right\} \qquad (3.4.55)$$

$$\left.\begin{aligned} c^*&=\int_{-h}^{0} c\psi^2(z)dz,\\ k^*&=\int_{-h}^{0} EI(z)\left(\frac{d^2\psi(z)}{dz^2}\right)^2 dz, \end{aligned}\right\} \qquad (3.4.56)$$

$S_w(t)$和$S_u(z)$由下式确定：

$$\left.\begin{aligned} S_w(z)&=\frac{4\gamma a h}{g}\sum_{n=1}^{\infty} d_n\cos\frac{(2n-1)\pi(z+h)}{2h},\\ S_u(z)&=\frac{8\gamma a h}{\pi g}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi(z+h)}{2h}, \end{aligned}\right\} \qquad (3.4.57)$$

式中 d_n 由式(3.4.48)确定。

在以上各式中，$m(z)$ 是容器单位高度的质量密度，E 是容器材料的弹性模量，$I(z)$ 是距顶部 z 处容器横断面的惯性矩，c 是容器材料的阻尼系数。令

$$M^*_u=m^*_{u,s}+m^*_{u,l}, \quad M^*_w=m^*_{w,s}+m^*_{w,l}. \qquad (3.4.58)$$

M^*_u 表示相应于系统的刚体运动分量的等效质量 M^*_w 表示系统相应于容器按规定的 $\psi(z)$ 变形时的等效质量，而 c^* 和 k^* 则分别表示系统的等效阻尼系数和等效刚度系数。表 3.4.1 中列出了等效质量 M^*_u 和 M^*_w 相应于三种不同挠曲函数的值。表中，M_s 是容器的总质量，M_l 是容器中贮液的总质量。

表 3.4.1

挠曲函数	M_w^* 的分量		M_u^* 的分量	
$\psi(z)$	$m_{w,s}^*$	$m_{w,l}^*$	$m_{u,s}^*$	$m_{u,l}^*$
$\sin\frac{\pi(z+h)}{2h}$	$0.5\ M_s$	$0.178\frac{h}{a}M_l$	$\frac{2}{\pi}M_s$	$0.293\frac{h}{a}M_l$
$\frac{\pi(z+h)}{h}$	$0.33\ M_s$	$0.103\frac{h}{a}M_l$	$0.50\ M_s$	$0.217\frac{h}{a}M_l$
$1-\cos\frac{\pi(z+h)}{2h}$	$0.23\ M_s$	$0.050\frac{h}{a}M_l$	$0.36\ M_s$	$0.137\frac{h}{a}M_l$

现在，用 M_w^* 除方程(3.4.54)的两端，得

$$\ddot{w}(t)+2\,\xi\omega\dot{w}(t)+\omega^2 w(t)=-C\ddot{x}_0(t), \tag{3.4.59}$$

式中

$$C=\frac{M_u^*}{M_w^*} \tag{3.4.60}$$

称为参与因数，

$$\xi=\frac{c^*}{2\,M_w^*\omega},\quad \omega=\left(\frac{k^*}{M_w^*}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.4.61}$$

分别为系统的阻尼比和固有频率。方程(3.4.59)即是系统的基本运动方程。

2. 地震力的确定

从第二章第一节得知，在地面运动 $\ddot{x}_0(t)$ 作用下，具阻尼比 ξ 和固有频率 ω 的单自由度质点之运动微分方程为

$$\ddot{q}(t)+2\,\xi\omega\dot{q}(t)+\omega^2 q(t)=-\ddot{x}_0(t). \tag{3.4.62}$$

将式(3.4.59)和式(3.4.62)相比较，可见有

$$w(t)=Cq(t). \tag{3.4.63}$$

由此可见，应用反应谱理论以寻求容器-贮液系统对地面运动 $\ddot{x}_0(t)$的各反应值（位移、速度和加速度），可从具有与系统相同阻尼比和固有频率的单自由度质点对 $\ddot{x}_0(t)$ 的各相应反应值乘以参与因数 C而得到。

现在，设此单自由度质点对 $\ddot{x}_0(t)$的位移反应谱值为D、速度反应谱值为V、加速度反应谱值为A。则相应的容器-贮液系统相对位移、速度和加速度的最大反应值为：

$$\left.\begin{aligned}&W_{\max}=\frac{CA}{\omega^2},\ \dot{W}_{\max}=\omega W_{\max}=\frac{CA}{\omega},\\&\ddot{W}_{\max}=\omega^2 W_{\max}=CA,\end{aligned}\right\} \tag{3.4.64}$$

式中 $W_{\max}$、$\dot{W}_{\max}$、$\ddot{W}_{\max}$分别为容器-贮液系统的最大相对位移、速度和加速度值。容器距顶部为 z 的断面的最大相对位移值和加速度值分别为：

$$\left.\begin{aligned}&|W(z,t)|_{\max}=\psi(z)W_{\max}=\psi(z)\frac{CA}{\omega^2},\\&|\ddot{W}(z,t)|_{\max}=\psi(z)\ddot{W}_{\max}=\psi(z)CA.\end{aligned}\right\} \tag{3.4.65}$$

图 3.4.8 中用虚线示出了单自由度质点的反应谱曲线，用实线示出了相应的容器-贮液系统的反应谱曲线。

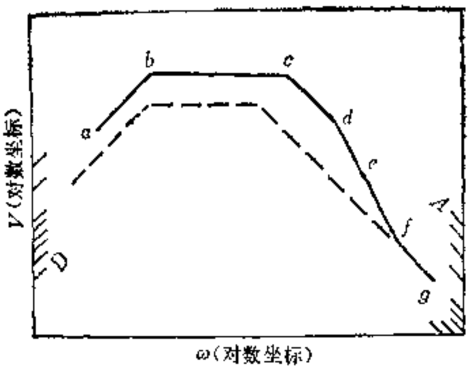


图 3.4.8

现在来确定作用于容器上的地震力（等效静力）。根据容器-贮液系统固有频率的不同，作用于容器上的地震力可以分别按照如下两种方案之一或其组合进行计算：

方案Ⅰ：地震力等于由结构变形所产生的最大惯性力与最大液动压力之和，即

$$Q_1(z)=Q_s(z)+Q_l(z), \tag{3.4.66}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&Q_s(t)=m(z)\psi(z)CA,\\&Q_l(z)=4\gamma ah\frac{CA}{g}\sum_{n=1}^{\infty}d_n\cos\frac{(2n-1)\pi(z+h)}{2h},\end{aligned}\right\} \tag{3.4.67}$$

d_n 由式(3.4.48)确定。

方案Ⅱ：地震力等于容器作刚体运动时所产生的惯性力及液动压力与容器变形振动时所产生的惯性力及液动压力之最大值的和。对于第一种力，应当用地面加速度 $\ddot{x}_0(t)$ 的最大值 $|\ddot{x}_0(t)|_{max}$ 来代替式(3.4.66)和(3.4.67)中之 CA，且式(3.4.67)中的系数 d_n 由式(3.4.49)给出；对于第二种力，应将式(3.4.66)和(3.4.67)中的加速度 CA 用 $C(A-|\ddot{x}_0(t)|_{max})$ 来代替。于是，相应于此方案的地震力为

$$Q_2(z)=Q^s(z)+Q^e(z), \tag{3.4.68}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&Q^s(z)=Q_{s,1}(z)+Q_{l,1}(z),\\&Q^e(z)=Q_{s,2}(z)+Q_{l,2}(z),\end{aligned}\right\} \tag{3.4.69}$$

$$\left.\begin{aligned}&Q_{s,1}(z)=m(z)|\ddot{x}_0(t)|_{max},\\&Q_{l,1}(z)=8\gamma ah\frac{|\ddot{x}_0(t)|_{max}}{\pi g}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi(z+h)}{2h},\end{aligned}\right\} \tag{3.4.70}$$

$$\left.\begin{aligned}&Q_{s,2}(z)=m(z)\psi(z)C(A-|\ddot{x}_0(t)|_{max}),\\&Q_{l,2}(z)=4\gamma ah\frac{C(A-|\ddot{x}_0(t)|_{max})}{g}\sum_{n=1}^{\infty}dn\cos\frac{(2n-1)\pi(z+h)}{2h},\end{aligned}\right\} \tag{3.4.71}$$

d_n 由式(3.4.48)确定。

对于具体容器，计算作用于其上的地震力时究竟采用哪种方案，可按魏勒索斯提出的如下建议进行：1)如果容器-贮液系统的自振频率大于相应于图 3.4.8 中 f 点的频率，则采用方案Ⅱ；2）如果系统的自振频率介于图 3.4.8 中 c 点和 e 点之间，则采用方案Ⅰ。这里，e点

位于 c 点和 f 点之间的三分之一距离处；3）如果系统的自振频率为大于相应 b 点的频率中除了上面两种情况而外的其它频率，则采用由方案Ⅰ和方案Ⅱ所得到的结果的平均值。应当指出的是，如果系统的自振频率大大小于相应于 b 点的频率，则系统的高次振型将起很大作用，将系统简化为"单"自由度系统不再合理，上述计算方法亦就不再适用了。幸运的是，对于实用目的说来，容器系统没有这样低的自振频率，因而上述简化计算法有着广泛的适用性。

3．最大基底剪力和倾覆力矩的确定

最大基底剪力和倾覆力矩可以从方案Ⅰ和方案Ⅱ所得到的地震力进行积分得出，相应于方案Ⅰ的最大基底剪力为

$$S_1 = m^*_{x,s} CA + S_{1,l}, \tag{3.4.72}$$

倾覆力矩为

$$M_1 = CA\int_{-h}^{0} m(z)\psi(z+h)dz + M_{1,l} + M_b, \tag{3.4.73}$$

式中 $m^*_{x,s}$ 由式(3.4.55)确定，而

$$S_{1,l} = \int_{-h}^{0} Q_l(z)dz, \quad M_{1,l} = \int_{-h}^{0} Q_l(z)(z+h)dz. \tag{3.4.74}$$

M_b 是作用于容器底板上之液动压力所产生的倾覆力矩，其值可以从豪斯纳尔关于刚性容器的结果（见本节第一小节）按下面公式近似求得：

$$M_b = 0.884\, P_0 a^3 \tag{3.4.75}$$

其中，P_0 为容器底板和侧壁交接处的最大液动压力。相应于本小节中所考虑的四种 $\psi(z)$ 函数，P_0 值可以从式(3.4.47)算得并列于表 3.4.2 中。

表 3.4.2

挠曲函数，$\psi(z)$	1	$\sin\frac{\pi(z+h)}{2h}$	$\frac{(z+h)}{h}$	$1-\cos\frac{\pi(z+h)}{2}$
$P_0(X\gamma h\ddot{x}(t)_{max}/g)$	0.743	0.282	0.200	0.103

注：对于 $\psi(z)=1$，$\ddot{x}(t)_{max}$ 应当用 $|\ddot{x}_0(t)|_{max}$ 来代替。

相应于方案Ⅱ的最大基底剪力和倾覆力矩分别为

$$\left.\begin{aligned} S_2 &= S_{2,st} + S_{2,dc}, \\ M_2 &= M_{2,st} + M_{2,dc}, \end{aligned}\right\} \tag{3.4.76}$$

式中 $S_{2,st}$ 和 $M_{2,st}$ 分别是最大基底剪力和倾覆力矩的刚体分量。其值由下式确定：

$$\left.\begin{aligned} S_{2,st} &= M_s|\ddot{x}_0(t)|_{max} + 0.542\frac{h}{a}M_l|\ddot{x}_0(t)|_{max}, \\ M_{2,st} &= |\ddot{x}_0(t)|_{max}\int_{-h}^{0} m(z)\psi(z+h)dz + 0.217\frac{h}{a}M_l|\ddot{x}_0(t)|_{max}. \end{aligned}\right\} \tag{3.4.77}$$

$S_{2,dc}$ 和 $M_{2,dc}$ 分别是由容器弹性所产生的最大基底剪力和倾覆力矩：

$$\left.\begin{aligned} S_{2,dc} &= m^*_{x,s} + C(A-|\ddot{x}(t)|_{max}) + S_{2,l}, \\ M_{2,dc} &= C(A-|\ddot{x}_0(t)|_{max})\int_{h} m(z)\psi(z)(z+h)dz + M_{2,l} + M_b, \end{aligned}\right\} \tag{3.4.78}$$

式中

$$S_{2,l}=\int_{-h}^{0}Q_{l,2}(z)dz,\quad M_{2,l}=\int_{-h}^{0}Q_{l,2}(z)(z+h)dz \tag{3.4.79}$$

表 3.4.3 中列出了对于 $\psi(z)=1$（相应于容器作刚体运动）和另外三种挠曲函数 $\psi(z)$ 算得的 $S_{1,l}$、$M_{1,l}$ 和 M_b 之值。对于这四种挠曲函数 $\psi(z)$，$S_{2,l}$、$M_{2,l}$ 可以从相应的 $S_{1,l}$、$M_{1,l}$ 用 $(A-|\ddot{x}_0(t)|_{max})$ 代替其中的 $|\ddot{x}_0(t)|_{max}$ 而得到。表中的 W_l 是容器中贮液的总重量。

表 3.4.3

$\psi(z)$	剪 力 $S_{1,l}$	力 矩 $M_{1,l}$	力 矩 M_b
1	$0.542\frac{h}{a}W_l\frac{\lvert\ddot{x}_0(t)\rvert_{max}}{g}$	$0.217\frac{h^2}{a}W_l\frac{\lvert\ddot{x}_0(t)\rvert_{max}}{g}$	$0.209\,aW_l\frac{\lvert\ddot{x}_0(t)\rvert_{max}}{g}$
$\sin\frac{\pi(z+h)}{2h}$	$0.294\frac{h}{a}W_l\frac{\lvert\ddot{x}_0(t)\rvert_{max}}{g}$	$0.315\frac{h^2}{a}W_l\frac{\lvert\ddot{x}_0(t)\rvert_{max}}{g}$	$0.079\,aW_l\frac{\lvert\ddot{x}_0(t)\rvert_{max}}{g}$
$\frac{(z+h)}{h}$	$0.218\frac{h}{a}W_l\frac{\lvert\ddot{x}_0(t)\rvert_{max}}{g}$	$0.103\frac{h^2}{a}W_l\frac{\lvert\ddot{x}_0(t)\rvert_{max}}{g}$	$0.036\,aW_l\frac{\lvert\ddot{x}_0(t)\rvert_{max}}{g}$
$1-\cos\frac{\pi(z+h)}{2h}$	$0.137\frac{h}{a}W_l\frac{\lvert\ddot{x}_0(t)\rvert_{max}}{g}$	$0.070\frac{h^2}{a}W_l\frac{\lvert\ddot{x}_0(t)\rvert_{max}}{g}$	$0.030\,aW_l\frac{\lvert\ddot{x}_0(t)\rvert_{max}}{g}$

4．振型和固有频率的确定

适用于给定挠形的函数 $\psi(z)$（即容器的振型）的形式与结构弯曲变形和剪切变形的相对量值有关，而这两种变形的量值又与容器的尺寸和其中的贮液重量有关。魏勒索斯推荐了如下选取 $\psi(z)$ 的步骤：1）任意设定 $\psi(z)$ 的一个试验形式，为了方便起见，它可以选取为等于图 3.4.6 中的函数之一；2）为了简单起见，令 $\ddot{x}_0(t)=g$ 并计算相应于上面设定的 $\psi(z)$ 的惯性力和液动压力，这里，液动压力可以直接从图 3.4.7 中相应于所给定的 $\psi(z)$ 的曲线求得；3）考虑到弯曲变形和剪切变形二者的影响，计算容器由第 2 步确定的力所产生的挠度；4）所求的 $\psi(z)$ 是第 3 步所确定的挠度关于 $z=0$ 处挠度的规范值。

系统的固有圆频率 ω 可以从雷利原理求得：

$$\omega^2=\frac{V_0}{T_0}, \tag{3.4.80}$$

式中 V_0 是第 2 步中算出的力与第 3 步中算出的挠度之乘积的积分；T_0 是系统的似动能，它由下式给出：

$$T_0=M_W^*W^2=(m_{W,s}^*+m_{W,l}^*)W^2, \tag{3.4.81}$$

其中 M_W^* 是与第 4 步中算出的挠曲函数 $\psi(z)$ 相关联的有效质量；W 是第 3 步中算出的 $z=0$ 处的挠度。

（二）伽辽金(Галёркин)法的应用[17]

在上面各节中，只考虑了环向波数等于 1 时的情形。但是，正如克拉夫(Clough)通过实测观察到的那样[18]，在水平地震扰动作用下，圆柱形容器的变形同样包括环向波数大于 1 的振型。另外，在考虑容器的弹性，用精确方法计算结构物与贮液的耦联振动效应时，由于解题过程过于繁复，往往把贮液表面重力波的影响略去；但是，因为缺乏包含表面重力波影响的解，从而不能估计忽略这一影响所带来的误差。本小节中，我们将对伽辽金法在贮液容器液动压力计算中的应用作一概略介绍。和上一小节一样，这里亦假定在任何时刻容器均按预先给定的形式挠曲变形。

对于不可压缩无粘性的理想流体，在圆柱坐标中，其速度势 $\Phi(z,\theta,r,t)$ 应满足拉普拉斯方程

$$D^2\Phi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0. \tag{3.4.82}$$

液体的速度由下式给出：

$$v_z=\frac{\partial\Phi}{\partial z},\quad v_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta},\quad v_r=\frac{\partial\Phi}{\partial r} \tag{3.4.83}$$

对于环向波数 m（m 为整数），假定容器的径向位移 u 可以按下式给出：

$$u=C\psi(z)\sin m\theta\sin\omega t, \tag{3.4.84}$$

式中 C 为任意常数；ω 为容器与液体共同振动的频率；$\psi(z)$ 为一预先给定的挠曲函数，对于它下式成立：

$$[\psi(z)]_{max}=1,\quad z\in[-h,0]. \tag{3.4.85}$$

这时，速度势 Φ 可以取如下形式：

$$\Phi=P(z,r)\sin m\theta\cos\omega t. \tag{3.4.86}$$

把式(3.4.86)代入式(3.4.82)，得到

$$AP(z,r)=\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r}-\frac{m^2}{r^2}P+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}=0, \tag{3.4.87}$$

其中 A 为下面形式的微分运算子：

$$A=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{m^2}{r^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

考虑图 3.1.1 所示的圆柱形容器，在图中给出的坐标系统的情况下，Φ 或 P 应满足下列边界条件：

$$v\Big|_{r=a}=\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{r=a}=\frac{\partial\Phi}{\partial r}\Big|_{r=a},$$

或

$$\frac{\partial P}{\partial r}\Big|_{r=a}=C\omega\psi(z);$$

$$p\Big|_{r=0}=-\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big|_{r=0}=0 \tag{3.4.88 a}$$

或

$$P\Big|_{r=0}=0; \tag{3.4.88 b}$$

$$v_z\Big|_{z=-h}=\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big|_{z=-h}=0$$

或

$$\frac{\partial P}{\partial z}\Big|_{z=-h}=0; \tag{3.4.88c}$$

关于液体表面的条件，分为如下两种情形：a）忽略表面重力波的影响，边界条件为

$$P\Big|_{z=0}=-\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big|_{z=0}=0,$$

或

$$P\Big|_{z=0}=0;\tag{3.4.88 d}$$

b）考虑表面重力波的影响，边界条件为

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\Big|_{z=0}+g\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big|_{z=0}=0,$$

或

$$\frac{\partial P}{\partial z}\Big|_{z=0}-\frac{\omega^2}{g}P\Big|_{z=0}=0.\tag{3.4.88 e}$$

现在我们利用伽辽金法在上述边界条件之下对方程(3.4.87)进行求解。为此目的，把P的解近似地表示为如下级数形式：

$$P\simeq P_n=\sum_{i=1}^{n}b_i\varphi_i(z,r),\tag{3.4.89}$$

式中函数$\varphi_i(z,r)(i=1,2,\cdots,n)$是一组预先选定的正交函数列，它们应满足上面的各边界条件。至于式中的系数b_n则按下面方法确定：将余数AP_n乘以权函数$\varphi_j(z,r)$（$j=1,2,\cdots,n$），经过整个容器区域积分并使之等于零，即

$$\int_D(AP_n)\varphi_j dD=\sum_{i=1}^{n}b_i\int_D(A\varphi_i)\varphi_j dD=0,\quad j=1,2,\cdots,n.\tag{3.4.90}$$

式中D是容器和液体表面所包围的区域。将式(3.4.90)的左端进行分部积分并计及边界条件式(3.4.88 a)、(3.4.88 b)和(3.4.88 c)，得到如下关系式：

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}b_i\Big[&-\int_D\frac{\partial\varphi_i}{\partial r}\frac{\partial\varphi_j}{\partial r}dD-\int_D\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}\frac{\partial\varphi_j}{\partial z}dD+\int_D\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_i}{\partial r}\varphi_j dD-\\&-\int_D\frac{m^2}{r^2}\varphi_i\varphi_j dD\Big]+\int_0^a\Big(\frac{\partial P_n}{\partial z}\varphi_j\Big)_{z=0}dr=\\&=-C\omega\int_{-h}^{0}\psi(z)\varphi_j(z,a)dz,\quad j=1,2,\cdots,n.\end{aligned}\tag{3.4.91}$$

方程(3.4.91)是一个以$b_i(i=1,2,\cdots,n)$为未知数的线性代数方程组，从它即可解出b_i。另外，此方程左端的第5个积分包含着自由液体表面边界条件式(3.4.88 d)或式(3.4.88 e)。下面分别对这两种边界条件情形进行讨论。

（一）忽略表面重力波影响时P_n的确定

将坐标函数$\varphi_i(z,r)$选取为如下一组正交函数：

$$\varphi_i(z,r)=I_m\Big(\lambda_i\frac{r}{a}\Big)\cos\Big(\lambda_i\frac{h+z}{a}\Big),\ i=1,3,5,\cdots,\tag{3.4.92}$$

式中

$$\lambda_i=\frac{i\pi a}{2h},\tag{3.4.93}$$

$I_m\Big(\lambda_i\frac{r}{a}\Big)$是修正的第一类$m$阶贝塞尔函数。从边界条件式(3.4.88 d)，得$\varphi_i(z,r)|_{z=0}=0$，故式(3.4.91)中的第5个积分为零。函数$\varphi_i(z,r)$的正交关系为

$$\int_D\varphi_i\varphi_j dD=\int_a^a I_m\Big(\lambda_i\frac{r}{a}\Big)I_m\Big(\lambda_j\frac{r}{a}\Big)dr\int_{-h}^{0}\cos\Big(\lambda_i\frac{z+h}{a}\Big)\cos\Big(\lambda_j\frac{z+h}{a}\Big)dz$$

$$
=\begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \dfrac{h}{2}\displaystyle\int_0^a I_m^2\left(\lambda_i \dfrac{r}{a}\right) dr, & i=j, \end{cases} \tag{3.4.94}
$$

函数 $I_m(y)$ 的定义由下式给出：

$$
\frac{d^2 I_m}{d y^2}+\frac{1}{y} \frac{d I_m}{d y}-\left(\lambda_i^2+\frac{m^2}{y^2}\right) I_m=0. \tag{3.4.95}
$$

将式(3.4.92)代入式(3.4.91)并利用式(3.4.94)和(3.4.95)，在进行一些繁复的计算之后，可求得系数 b_i，进而由式(3.4.89)得到如下表达式：

$$
P_n=\sum_{i=1,3,\cdots}^{2n+1} \frac{2 a \omega C \int_0^1 \psi(h \xi) \cos (i \pi \xi / 2) d \xi}{\lambda_i I_m'(\lambda_i)} I_m\left(\lambda_i \frac{r}{a}\right) \cos \left(\lambda_i \frac{z+h}{a}\right), \tag{3.4.96}
$$

式中

$$
\xi=\frac{z+h}{h}, \quad I_m'(\lambda_i)=\left.\frac{d I_m(y)}{d y}\right|_{y=\lambda_i} .
$$

因为所得到的解式(3.4.96)满足拉普拉斯方程和全部边界条件，故当 $n \to \infty$ 时，式(3.4.96)将表示问题的精确解。

现在，从式(3.4.86)、(3.4.88)和(3.4.96)即可得到作用于容器壁上的液动压力为

$$
\begin{aligned}
P &= -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\
&= \sum_{i=1,3,\cdots}^{2n+1} \frac{2 \rho a \omega^2 C I_m(\lambda_i)}{\lambda_i I_m'(\lambda_i)} \int_0^1 \psi(h \xi) \cos \left(i \frac{\pi}{2} \xi\right) d \xi \cos \left(\lambda_i \frac{z+h}{a}\right) \sin m \theta \sin \omega t .
\end{aligned} \tag{3.4.97}
$$

与容器径向位移相联系的惯性力由下式给出：

$$
-\rho_s \delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\rho_s \delta \omega^2 C \psi(z) \sin m \theta \sin \omega t, \tag{3.4.98}
$$

式中 ρ_s 为容器材料的质量密度，δ 为容器壁的厚度。作用在容器壁上的径向动荷载为惯性力式(3.4.98)和液动压力式(3.4.97)之和：

$$
\begin{aligned}
-\rho_s \delta \frac{\partial^2 u}{\partial t}+P=\rho_s \delta \omega^2 C\Bigg\{ \psi(z)+\frac{\rho_a}{\rho_s \delta} \sum_{i=1,3,\cdots}^{2n+1} \frac{I_m(\lambda_i)}{\lambda_i I_m'(\lambda_i)} \times \\
\times\left[2 \int_0^1 \psi(h \xi) \cos \left(i \frac{\pi}{2} \xi\right) d \xi\right] \cos \left(\lambda_i \frac{z+h}{a}\right) \sin m \theta \sin \omega t,
\end{aligned} \tag{3.4.99}
$$

式中 ρ 为贮液的质量密度，大括号中的第二项表示贮液对于容器结构-液体耦联振动的贡献。

从式(3.4.97)可以得到作用于容器侧壁每单位圆周长度上的合液动压力和倾覆力矩如下：

$$
\begin{aligned}
S^c &= \int_{-h}^0 P d z \\
&= \frac{4}{\pi} \rho a h \omega^2 C \sum_{i=1,3,\cdots}^{2n+1} \frac{I_m(\lambda_i)}{\lambda_i I_m'(\lambda_i)} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(i-1)}}{i} \int_0^1 \psi(h \xi) \cos \left(i \frac{\pi}{2} \xi\right) d \xi \sin m \theta \sin \omega t .
\end{aligned} \tag{3.4.100}
$$

$$M^c=\int_{-h}^{0}p(z+h)dz$$

$$=\frac{4}{\pi}\rho a h^2\omega^2 C\sum_{i=1,3,\cdots}^{2n+1}\frac{I_m(\lambda_i)}{\lambda_i I'_m(\lambda_i)}\left[\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(i-1)}}{i}-\frac{2}{\pi i^2}\right]\times$$

$$\times\int_0^1\psi(h\xi)\cos\left(i\frac{\pi}{2}\xi\right)d\xi\sin m\theta\sin\omega t. \quad (3.4.101)$$

下面，我们来确定液体的等效质量 ρ^*。这时，我们约定它沿着 z 轴方向的分布可以表示为如下形式：

$$\rho^*(\xi)=\rho_0^*[1+k\,\psi(h\xi)],\ \xi\in[0,1] \quad (3.4.102)$$

式中的两个参数 ρ^* 和 k 可以这样确定：使得每单位圆周长度上的附加惯性力的合力 P^* 等于 S^c，而每单位圆周长度上的附加合力矩 M^* 等于 M^c。此二条件为：

$$P^*=-\int_{-h}^{0}\rho^*\delta\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dz=S^c$$

$$=\rho_0^* h\,\delta\omega^2 C\int_0^1[1+k\,\psi(h\xi)]\psi(h\xi)\,d\xi\sin m\theta\sin\omega t \quad (3.4.103)$$

$$M^*=-\int_{-h}^{0}\rho^*\delta\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(z+h)dz=M^c$$

$$=\rho_0^* h^2\delta\omega^2 C\int_0^1[1+k\,\psi(h\xi)]\psi(h\xi)\xi\,d\xi\sin m\theta\sin\omega t. \quad (3.4.104)$$

将式(3.4.100)和式(3.4.101)给出的 S^c、M^c 代入式(3.4.103)和式(3.4.104)中，得到

$$\frac{\rho_0^*}{\rho_s}\int_0^1[1+k\,\psi(h\xi)]\psi(h\xi)\,d\xi=\frac{M_l}{M_s}\sum_{i=1,3,\cdots}^{2n+1}\frac{8}{\pi}\frac{I_m(\lambda_i)}{\lambda_i I'_m(\lambda_i)}\frac{(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{i}$$

$$\int_0^1\psi(h\xi)\cos\left(i\frac{\pi}{2}\xi\right)d\xi, \quad (3.4.105)$$

$$\frac{\rho_0^*}{\rho_s}\int_0^1[1+k\,\psi(h\xi)]\psi(h\xi)\xi\,d\xi=$$

$$=\frac{M_l}{M_s}\sum_{i=1,3,\cdots}^{2n+1}\frac{8}{\pi}\frac{I_m(\lambda_i)}{\lambda_i I'_m(\lambda_i)}\left[\frac{(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{i}-\frac{2}{\pi i^2}\right]\int_0^1\psi(h\xi)\cos\left(i\frac{\pi}{2}\xi\right)d\xi,$$

$$(3.4.106)$$

式中

$$M_l=\rho a^2\pi h,\qquad M_s=\rho_s\delta_2\pi a h \quad (3.4.107)$$

分别是贮液的总质量和容器侧壁的总质量。从方程(3.4.105)和(3.4.106)即可求出参数 ρ^* 和 k。应当提及，如果容器侧壁的侧向变形已知；即挠曲函数 $\psi(z)$ 已知，则方程(3.4.105)和(3.4.106)左端的积分可以直接积出，从而使求 ρ^* 和 k 变得极其方便。

（二）考虑表面垂力波影响时 P_n 的确定

考虑表面重力波影响时，解完全满足边界条件式(3.4.88 c)。这时，式(3.4.89)中的坐标函数 φ_i 可以设为

$$\varphi_i=I_m\left(\eta_i\frac{r}{a}\right)\cos\left(\eta_i\frac{z+h}{h}\right), \quad (3.4.108)$$

从而边界条件式(3.4.88 e)得到确定 η_i 的如下条件：

$$\eta_i \sin\eta_i = -C^* \cos\eta_i,\quad i=1,3,\cdots,2n+1, \tag{3.4.109}$$

式中

$$C^* = \omega^2(h/g).$$

应用牛顿法，可由超越方程(3.4.109)求得 η_i 的近似式如下：

$$\eta_i \approx \frac{i\pi}{2}\left(1+\frac{1}{C^*}\right)+\left[\frac{i\pi}{2}\left(1+\frac{1}{C^*}\right)+\frac{2}{i\pi}C^{*2}\right]^{1},\quad i=1,3,\cdots,2n+1. \tag{3.4.110}$$

对于石油化学工业的典型油罐，可采用 $500<C^*<1000$ 的 C^* 的估计值。

把式(3.4.108)代入式(3.4.91并应用坐标函数 ϕ_i 的正交条件式(3.4.91)和特征值条件式(3.4.109)，进行一些繁复的运算后，定出系数 b_i，从而由式(3.4.89)得到

$$P_n = \sum_{i=1,3,\cdots}^{2n+1} \frac{2a\omega\int_0^1 \psi(h\xi)\cos(\eta_i\xi)d\xi}{\eta_i I'_m(\eta_i)\left(1-\frac{\sin^2\eta_i}{C^*}\right)} I_m\left(\eta_i\frac{r}{a}\right)\cos\left(\eta_i\frac{z+h}{h}\right), \tag{3.4.111}$$

最后从式(3.4.86)、(3.4.89)和(3.4.111)得到作用于容器壁上的液动压力为

$$\begin{aligned} P &= -\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} \\ &= \sum_{i=1,3,\cdots}^{2n+1} \frac{2\rho a\omega^2 C I_m(\eta_i)}{\eta_i I'_m(\eta_i)}\left[\int_0^1 \psi(h\xi)\cos(\eta_i\xi)d\xi\Big/\left(1-\frac{\sin^2\eta_i}{C^*}\right)\times\right. \\ &\quad \times\cos\left(\eta_i\frac{z+h}{h}\right)\sin m\theta\sin\omega t. \end{aligned} \tag{3.4.112}$$

从式(3.4.110)和式(3.4.112)直接看出，在实际容器（例如 $C^*=500$）的液体-结构耦联振动问题中，表面重力波的影响只起到很小的作用，因此液体等效质量可以利用压力分布式(3.4.97)代替式(3.4.112)来加以计算。

得到作用于容器壁上的液动压力后，容器-贮液系统的振动频率和容器壁的侧向振型可以按照与魏勒索斯相同的方法进行计算。

参 考 文 献

[1] L. S. Jacobsen, "Impulsive Hydrodynamics of Fluid Inside a Cylindrical Tank and of Fluid Surrounding a Cylindrical Pier", Bull. Seism. Soc. Am., vol. 39, No. 3, 189—204, 1949.

[2] L. S. Jacobsen, and R. S. Ayre, "Hydrodynamic Experiments with Rigid Cylindrical Tanks Subjected to Tansient Motions", Bull. Seism. Soc. Am., vol. 41, No. 4, 313—346, 1951.

[3] G. W. Housner, "Dynamic Pressures on Accelerated Fluid Containers", Bull. Seism. Soc. Am., vol. 47, No1, 15—35, 1957.

[4] И. И. Гольденблат, Н. А. Николаенко, "Расчет конструкций на действие сейсмических и импульсивных сил", Госстройиздат, 1961.

[5] И. И. Гольденблат, Г. Н. Каринвадзе, ш. Г. Напетваридзе, Н. А. Николаенко,"Проектирование сейсмостойких гидротехнических, Транспортных и специальных сооружений, Раздел III, 1971.

[6] Д. Е. Охоцимский,"К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью", ПММ, том. xx, вып. 1, 3—21, 1956.

[7] 地震工程概论编写组，地震工程概论，科学出版社，1977.

[8] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. G. Tricomi, "Higher Transcendental Functions", Vol. 2, McGraw-Hill, 1953.

[9] P. W. Werner, and K. J Sundquist, "On Hydrodynamic Earthquake Effects" Transaction of

the American Geophysical Union, vol. 30, No. 5, 636—657, 1949.
[10] 居荣初、黄振平、杜瑞明，水中圆柱体结构的自由振动，地震工程研究报告集，第一集，科学出版社，1962 年。
[11] A. S. Veletsos, "Seismic Effects in Flexible Liquid Storage Tanks", Proc. 5 th World Conf. Earthq. Eng., Rome, 1973.
[12] M. Hamada, H. Izumi, and S. Sato, "Behavior of Underground Tanks During Earthquakes", Proc. of the 5 th Japan Earthq. Eng. Sym., 1975.
[13] A. T. Иммерман, "Расчет ортотропной круговой цилиндрической оболочки на поперечную нагрузку", расчет пространственных конструкций, вып. III, Госстройиздат, 1955.
[14] 钱培风，结构动力学，中国工业出版社，1966 年。
[15] 章在墉、居荣初、杜瑞明，关于标准加速度反应谱问题，地震工程研究报告集，第一集，科学出版社，1962 年。
[16] H. I. Epstein, "Seismic Design of Liquid-Storage Tanks", Journal of the Structural Division, Proc. of the ASCE, vol. 102, No. ST. 9, 1659—1674, 1976.
[17] D. Fischer. "Dynamic Fluid Effects in Liquid-Filled Flexible Cylindrical Tanks", Earthq. Engng. and Struct. Dynamics, vol. 7, No. 6, 587—601, 1979.
[18] D. P. Clough and R. W. Clough. "Earthquake Simulator Studies of Cylindrical tanks", Nucl. Engng. Design, vol. 46, 367—380, 1978.

第四章　构架式贮液器的抗震分析

在地震区的化工、石油、冶金等工业设施的设计中常常向设计人员提出有关构架式贮容器的抗震分析问题，搁置在构架上的贮液容器及高架水塔等均属于这种类型的容器。

以往，在计算这类型结构时，往往把容器中的流体作为附加于结构的固体质量来考虑，而不考虑流体在容器中的振动。这样简化的结果，往往导至计算所得的地震力大为增加。

本章中，我们把构架式容器简化为具有几个自由度的系统，容器内贮有液体，而容器本身则认为是刚性体，不计侧壁和底板的弹性变形。但是，容器中的液体不是简单地以某一质量形式附加于系统中。而考虑到构架在地震作用下发生振动时，从而引起容器中的液体亦发生振动；同时，此流体振动又通过容器壁和底板作用于构架上，即考虑结构与液体的"耦联振动"影响。

第一节　单层构架贮液容器

一、基本运动方程

图 6.1.1 上示出了单层构架式贮液容器结构在地震荷载作用下的计算模式。此时，我们把构架及容器简化为一个质量 m 的自由度系统，其基底处输入地面加速度 $\ddot{x}_0(t)$，而此集中质量上作用有容器中贮液在$\ddot{x}_0(t)$作用下所产生的液动压力。如果容器有 l 个、则第 i 个容器中液动压力作用于容器侧壁上之合力为 S_i，显然，作用于集中质量m上之总液动压力为

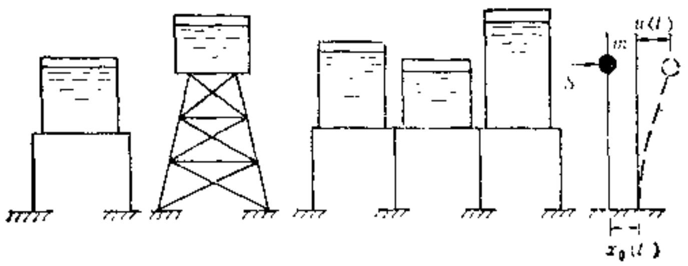


图 4.1.1

$$S=\sum_{i=1}^{l} S_i.$$

于是，质量m的运动方程为

$$m\ddot{u}+2\varepsilon\dot{u}+ku=-m\ddot{x}_0(t)+\sum_{i=1}^{l} S_i. \tag{4.1.1}$$

式中，ε 为构架系统之阻尼系数、k为刚度系数。需注意，在建立此运动方程时，我们仅考虑了构架上容器的前后水平运动，而忽略掉了其旋转运动的影响。

对于圆柱形容器，液动压力之合力用公式(3.1.27)确定；对于圆环形容器，此合力用公

式(3.1.67)确定；而对于矩形容器，则此合力用公式(3.1.105)确定。今后，为了讨论方便起见，如在第三章第三节中那样，将各种形状容器情形里的合液动压力公式统一写成为形式：

$$S=-M_l\left[\ddot{x}_0(t)+\ddot{u}(t)+\sum_{j=1}^{\infty}d_j s_j \ddot{q}_j(t)\right]. \tag{3.3.2}$$

在忽略液体阻尼的情况下，$q_j(t)$应满足

$$\ddot{q}_j(t)+\widetilde{\omega}_j^2 q_j(t)=-[\ddot{x}_0(t)+\ddot{u}(t)], \tag{3.3.3}$$

式中之s_j和$\widetilde{\omega}_j^2$由式(3.3.4)确定，而M_l、d_j对于圆柱形容器、矩形容器和圆环形容器分别用式(3.3.5)、(3.3.6)和(3.3.7)确定。此外，在目前情况下，容器处的加速度$\ddot{x}_0(t)+\ddot{u}(t)$相当于第三章中地上式容器情况下的地面加速度$\ddot{x}_0(t)$。

二、自由振动

众所周知，对于结构的抗震计算，必须知道结构的固有振动性质（周期和振型）。因此，在讨论单层构架式贮液器的抗震计算以前，我们首先在这里对其自振特性进行讨论。为此，我们忽略掉系统的阻尼影响，并先考虑仅由一个容器所组成的系统。此时，在方程(4.1.1)中，令$\ddot{x}_0(t)=0$，$\varepsilon=0$，从而得到

$$m\ddot{u}+ku=S. \tag{4.1.2}$$

对于稳态自由振动，

$$u=X(1)e^{i\omega t}$$

$$\ddot{u}=-\omega^2 X(1)e^{i\omega t},$$

$$q_j=X(j+1)e^{i\omega t},\ (j=1,\cdots)$$

于是，由式(3.3.3)得出

$$X(j+1)=\frac{\omega^2 X(1)}{\widetilde{\omega}_j^2-\omega^2},\ (j=1,\cdots) \tag{4.1.3}$$

$$\frac{\ddot{q}_j(t)}{\ddot{u}(t)}=\frac{X(j+1)}{X(1)}=\frac{\omega^2}{\widetilde{\omega}_j^2-\omega^2},\ j=1,\cdots \tag{4.1.3'}$$

再从方程(4.1.2)，得

$$X(1)[-m\omega^2+k]-M_l\omega^2\left[X(1)+\sum_{j=1}^{\infty}d_j s_j X(j+1)\right]=0. \tag{4.1.4}$$

将方程(4.1.3)和(4.1.4)联立，令其系数行列式等于零，即得到确定系数频率的方程为

$$-m\omega^2+k-M_l\omega^2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{d_j s_j\omega^2}{\widetilde{\omega}_j^2-\omega^2}-M_l\omega^2=0. \tag{4.1.5}$$

将M_l、d_j和s_j之值（式3.3.5）代入上式，对于圆柱形容器，经过整理后，可得

$$\frac{P-\delta}{N\delta^2}-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j}{\sigma_j-\delta\coth(\sigma_j h_0)}=0 \tag{4.1.5'}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&P=\frac{ka}{Mg},\quad N=\frac{a^3 p\pi}{M},\quad M=m+M_l,\\&\delta=\frac{\omega^2 a}{g},\quad c_j=\frac{2}{\sigma_j(\sigma_j^2-1)},\end{aligned}\right\} \tag{4.1.6}$$

P、N、δ是无量纲的参数。

从方程(4.1.5′)看出，参数 $(P-\delta)$ 等于零给出液体为刚性时系统之固有振动频率的平方；方程的第二项给出计及流体为非刚性时的修正。参数 δ 是佛洛得(Froude)数。

此外，从方程(4.1.5)或(4.1.5′)还可看出，与具有一个频率的刚性单质点系统不同，贮液器的单质点系统却具有无限多个固有频率。这可从方程(4.1.5)或(4.1.5′)关于ω^2之解有无限多个看出。造成这种情形的原因，在于除了结构本身的一个自由度，从而有一个固有频率而外，容器中的液体在振动时还有无限多个振型及其相应的固有振动频率。

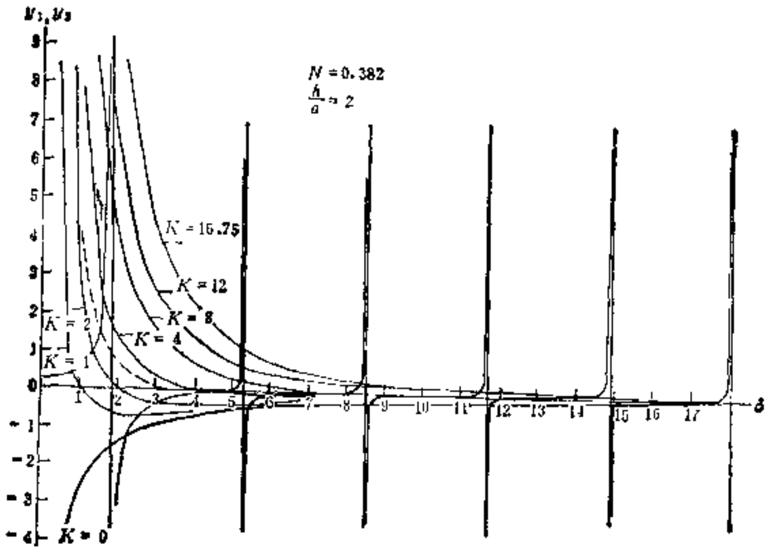


图 4.1.2

为了将方程(4.1.4)或(4.1.5′)对δ求解，我们令

$$y=\frac{P-\delta}{N\delta^2} \text{ 和 } y_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\sigma_n-\delta\coth(\sigma_n h_0)},$$

并分别对δ作图。y_1曲线和y_2曲线交点的δ坐标值即为方程(4.1.5)或(4.1.5′)的解。图 4.1.2 上对于$N=0.383$和$h_0=\frac{h}{a}=2$时的一系列P值作出了y_1和y_2的图形。曲线y_2具有无限多个垂直渐近线(见图 4.1.2)[1]，它们与δ轴交于点

$$\delta_n=\sigma_n\tanh(\sigma_n h_0).$$

在比值$h_0\geqslant 0.5$的情况下，对于y_2之级数，除第一项外，均可以取$\coth(\sigma_n h_0)\approx 1$ $(n=2,3,\cdots)$。这时，对于y_2，我们得到如下公式：

$$y_2=\frac{c_1}{\sigma_1-\delta\coth(\sigma_1 h_0)}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{c_n}{\sigma_n-\delta},\ (h_0\geqslant 0.5). \tag{4.1.7}$$

在比值$h_0\geqslant 1$的情况下，连级数之第一项亦可以近似地取为$\coth(\sigma_1 h_0)\approx 1$ [因为当$h_0=1$时，有$\coth(1.84)=1.05$]。这时，y_2可以近似地写为

$$y_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\sigma_n-\delta}. \tag{4.1.8}$$

公式（4.1.7）和（4.1.8）对于y_2的作图是方便的。

下面，我们来考查对于单自由度系统的一个例子。众所周知，将流体视为固体时，这种系统的固有振动周期为

$$T_t = 2\pi\sqrt{\frac{m+M_l}{K}}$$

计及容器中液体的可动性，由于在这种情形下引入了折算液体质量，故周期为

$$T_m = 2\pi\sqrt{\frac{m+\xi M_l}{K}}.$$

折算系数ξ与强迫振动频率有关，且可以在广泛的范围内变化（见第三章）。这时，T_m与T_t之比等于

$$\frac{T_m}{T_t} = \sqrt{\frac{1+\xi L}{1+L}}$$

其中

$$L = M_l/m$$

对于实际计算来说，一般折算系数ξ从0.6改变到1。在$\xi=0.6$时，L从1变化到10，周期之比则从0.9改变到0.8。由此可见，对于真实情况来说，质量比对于系统振动周期的改变影响是不大的。另一方面，如果将液体视为刚性固体，则$\xi=1$，从而周期比亦等于1。从这些估计看出，将液体作为刚性质量附加于系统所算得的基本固有周期的最大可能误差不超过20%，且随着折算系数向1趋近，此误差将减小。

如果框架支承有l个相同的圆形容器，则频率方程很容易用上面相同的方法得到，不过此时应将式（4.1.2）中的液动压力S乘以l。这时，得出频率方程为

$$\frac{P-\delta}{N\delta^2} - l\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\sigma_n - \delta\coth(\sigma_n h_0)} = 0. \tag{4.1.9}$$

P中的M_l为l个容器中贮液的总质量。

将对于矩形容器的M_l、d_j和s_j值（式3.3.61）代入式(4.1.5)，经过简单的整理，得到确定支承l个部份充液矩形容器的单层框架系统固有振动频率方程

$$\frac{P-\delta}{N_1\delta^2} - l\sum_{j=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{(j\pi)^3}\,\frac{1}{j\pi - \delta\coth(j\pi h_0)} = 0, \tag{4.1.10}$$

式中

$$N_1 = \frac{8\rho a^2 b}{M_l},$$

a——容器之宽度，b——容器之长度。

方程（4.1.10）用于决定框架在x轴方向上的频率（图4.1.3）。若要决定z轴方向上的频率，同样可以利用方程（4.1.10），此时，应将其中的a和b交换位置并采用框架的相应刚度。

方程（4.1.9）和（4.1.10）的特点与单个圆柱形容器的频率方程（4.1.5′）完全相同，因此，图4.1.3中的曲线对于l个圆柱形容器或矩形容器所组成的单层构架系统固有频率的

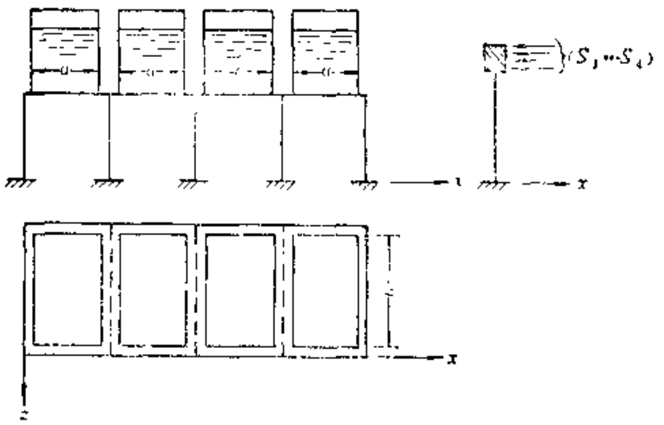


图 4.1.3

定性讨论仍然适用。

从方程 (4.1.5)、(4.1.9) 和 (4.1.10)确定出频率ω_j($j=1,2,\cdots$)之后，将各个ω_j代回方程 (4.1.3) 和(4.1.4)，解出$X(j)$，即得到系统相应于每个固有频率ω_j的振型形状。到此，我们就完全解决了具有贮液容器的单自由度系统的自振特性问题

三、地震力的确定

我们仍然从仅有一个贮液容器系统的讨论开始。这时，在地震地面加速度$\ddot{x}_0(t)$之下，系统之运动方程 (4.1.1)、(3.3.3) 在忽略掉系统阻尼的情况下，可以写为

$$(M_l+m)(\ddot{x}_0+\ddot{u})+Ku+M_l\sum_{j=1}^{\infty}d_js_j\ddot{q}_j=0 \tag{4.1.11}$$

$$\ddot{q}_j+\tilde{\omega}_j^2q_j=-[\ddot{x}_0+\ddot{u}],\quad j=1,\cdots \tag{4.1.12}$$

在方程(4.1.11)中，对于圆柱形容器圆环形容器，求和是按j从1，2，3，$\cdots$进行的，而对于矩形容器，求和则是按j从1，3，5，$\cdots$进行的。在方程 (4.1.12) 中，同样，对于圆柱形容器和圆环形容器，j从1，2，3，$\cdots$到无限，而对于矩形容器，j则从1，3，5，$\cdots$到无限。无论对于哪种容器，联立方程(4.1.11)和(4.1.12)均是一无限方程组，它与无限多自由度系统的振动形式是等价的。

为了讨论方便起见，我们将方程组(4.1.11)和(4.1.12)变换为多自由度系统的标准运动方程形式。首先讨论圆柱形容器，并只考虑液体的前N个振型，即将无限多个自由度的方程仅取出其前$N+1$个方程来加以近似。这时，我们令

$$\tilde{K}_j=M_ld_js_j\tilde{\omega}_j^2,\quad j=1,2,3,\cdots$$

将式(4.1.12)改写为

$$d_js_jM_l\ddot{q}_j+\tilde{K}_jq_j=-d_js_jM_l(\ddot{x}_0+\ddot{u}). \tag{4.1.12'}$$

再令

$$\left.\begin{aligned}&x_1=u\\&x_j=u+q_{j-1},\quad j=2,3,\cdots\end{aligned}\right\} \tag{4.1.13}$$

方程(4.1.11)和(4.1.12')化为

$$(M_l+m)(\ddot{x}_0+\ddot{x}_1)+Kx_1+M_l\sum_{j=2}^{\infty}d_{j-1}s_{j-1}(\ddot{x}_j-\ddot{x}_1)=0 \tag{4.1.14}$$

$$d_{j-1}s_{j-1}M_l\ddot{x}_j+\tilde{K}_{j-1}(x_j-x_1)=-d_{j-1}s_{j-1}M_l\ddot{x}_0,\quad j=2,3,\cdots \tag{4.1.15}$$

将式(4.1.15)代入式(4.1.14)，得到

$$M_l(\ddot{x}_0+\ddot{x}_1)+k_1x_1-\sum_{j=2}^{N+1}k_jx_j=0 \tag{4.1.14'}$$

同时，将式(4.1.15)改写为

$$M_j(\ddot{x}_0+\ddot{x}_j)+k_j(x_j-x_1)=0,\quad j=2,3,4,\cdots,N+1. \tag{4.1.15'}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&M_1=m+M_l\left(1-\sum_{j=1}^{N}d_js_j\right),\\&M_j=d_{j-1}s_{j-1}M_l,\ j=2,3,\cdots,N+1.\\&k_1=K+\sum_{j=2}^{N+1}\widetilde{K}_{j-1},\ k_j=\widetilde{K}_{j-1},\ j=2,3,4,\cdots,N+1.\end{aligned}\right\} \tag{4.1.16}$$

方程组(4.1.14′)、(4.1.15′)是标准的$N+1$个自由度系统的运动方程，其一般解法和性质已经在第二章中讨论过了。不过，为了应用反应谱理论，这里，我们简要地介绍振型分解法对这类问题的应用。首先，我们把方程(4.1.14′)和(4.1.15′)统一写为形式

$$M_i(\ddot{x}_0+\ddot{x}_i)+\sum_{j=1}^{N+1}k_{ij}x_j=0\quad i=1,2,\cdots,N+1, \tag{4.1.17}$$

式中 $k_{11}=k_1,k_{1j}=-k_j,\ j=2,3,\cdots,N+1,$
$k_{i1}=-k_i,\ k_{ii}=k_i,\ k_{ij}=0\ (i\neq j),i=2,3,\cdots,N+1,\ j=2,3,\cdots,N+1.$ (4.1.18)

众所周知，对于多自由度系统的运动微分方程运用振型分解法来进行求解，其优点在于将多自由度系统化为若干个独立的单质点振动方程，其个数等于多自由度系统之自由度数(见文献[2]和第三章关于弹性容器的讨论)。这样一来，问题可以得到大大简化。

按照振型分解法的原理，我们把x_i写为

$$x_i(t)=\sum_{n=1}^{N+1}p_n(t)X_n'(i),i=1,2,3,\cdots,N+1, \tag{4.1.19}$$

式中，$p_n(t)$是广义坐标，$X_n'(i)$是振型函数，它满足系统的自振方程

$$-\omega_n^2M_iX_n'(i)+\sum_{j=1}^{N+1}k_{ij}X_n'(j)=0,i,n=1,2,3,\cdots,N+1. \tag{4.1.20}$$

从方程(4.1.17)的推导过程及式(4.1.13)可见，方程(4.1.20)与(4.1.3)和(4.1.4)的联立方程组是等价的(如果振型$X_n'(i)$和$X_n(i)$之间用如下关系式作代换的话：$X_n'(1)=X_n(1)$，

$X_n'(j)=X_n(1)+X_n(j)$，$j=2,3,\cdots,N+1$)。可以证明，振型函数$X_n'(i)(n=1,2,3,\cdots,N+1)$乃是一正交系（详见第二章)，且存在有如下关系式：

$$\sum_{i=1}^{N+1}M_iX_j'(i)X_n'(i)=0,\quad j\neq i. \tag{4.1.21}$$

再将1作如下展开：

$$1=\sum_{n=1}^{N+1}\eta_nX_n'(i),i=1,2,3,\cdots,N+1, \tag{4.1.22}$$

式中η_n称为第n振型的参与系数。

利用振型的正交性(式 4.1.21)得到

$$\eta_j = \frac{\sum_{i=1}^{N+1} M_i X_j'(i)}{\sum_{i=1}^{N+1} M_i X_j'^2(i)}, \quad j=1,2,3,\cdots,N+1. \tag{4.1.23}$$

现在，将式(4.1.19)代入式(4.1.17)，得

$$M_i \sum_{n=1}^{N+1} \ddot{p}_n(t) X_n'(i) + \sum_{j=1}^{N+1}\sum_{n=1}^{N+1} k_{ij}' p_n(t) X_n'(j) + M_i \ddot{x}_0 = 0.\ i=1,2,3\cdots,N+1$$

利用展开式(4.1.22)和自振方程(4.1.20)，上面方程可以改写为

$$\sum_{n=1}^{N+1} [\ddot{p}_n(t) + \omega_n^2 p_n(t) + \eta_n \ddot{x}_0(t)] M_i X_n'(i) = 0, \quad i=1,2,\cdots,\ N+1$$

将上式两端同乘以 $X_j'(i)$，并对 i 从 1 到 $N+1$ 求和计及振型的正交关系式，从上式可以得出决定广义坐标 $p_j(t)$ 的如下 $N+1$ 个独立的微分方程：

$$\ddot{p}_j(t) + \omega_j^2 p_j(t) = -\eta_j \ddot{x}_0(t), \quad j=1,2,\cdots,\ N+1 \tag{4.1.24}$$

如果再设

$$p_j(t) = \eta_j \delta_j(t), \tag{4.1.25}$$

则由方程(4.1.24)得到

$$\ddot{\delta}_j(t) + \omega_j^2 \delta_j(t) = -\ddot{x}_0(t), \quad j=1,2,\cdots,\ N+1 \tag{4.1.26}$$

以上是对于无阻尼系统导出的方程，对于有阻尼系统，当阻尼不大时，可以近似地看到

$$\ddot{\delta}_j + 2\varepsilon_j \dot{\delta}_j(t) + \omega_j^2 \delta_j(t) = -\ddot{x}_0(t), \quad j=1,2,3,\cdots N+1 \tag{4.1.26'}$$

式中，ε_j 为第 j 振型的阻尼系数。从式(4.1.26)由零初始条件进行积分，得到

$$\ddot{\delta}_j(t) + \ddot{x}_0(t) = k\beta_j(t) g, \tag{4.1.27}$$

式中 k 为地震系数，$\beta_j(t)$ 为第 j 振型的动力放大系数：

$$\beta_j(t) = \omega_j' \int_0^t e^{-\varepsilon_j(t-\tau)} \ddot{x}_0(\tau) \sin\omega_j'(t-\tau)\, d\tau,$$

其中

$$\omega_j' = \sqrt{1-(\varepsilon_j/\omega_j)^2}\,\omega_j.$$

将式(4.1.27)代入(4.1.25)，再代入式(4.1.19)，即得到系统反应之绝对加速度：

$$\ddot{x}_0(t) + \ddot{x}_i(t) = kg \sum_{n=1}^{N+1} \eta_n \beta_n^{(t)} X_n'(i), \quad i=1,2,\cdots,N+1 \tag{4.1.28}$$

从而得到作用于系统上的总剪力

$$S_0(t) = \sum_{i=1}^{N+1} M_i(\ddot{x}_0 + \ddot{x})$$

$$= \sum_{i=1}^{N+1}\sum_{n=1}^{N+1} M_i kg \eta_n \beta_n(t) X_n'(i). \tag{4.1.29}$$

再由式(4.1.27)，(4.1.25)，(4.1.19)和(3.3.2)，得到作用于容器壁上的合液动压力

$$S(t) = -M_l\left[\ddot{x}_0(t) + \ddot{a}(t) + \sum_{i=1}^{N} d_i s_i \ddot{q}_i(t)\right]$$

$$=-M_i\left[(\ddot{x}_0+\ddot{x}_1)+\sum_{j=2}^{N+1}d_{j-1}S_{j-1}\left[(\ddot{x}_j+\ddot{x}_0)-(\ddot{x}_1+\ddot{x}_0)\right]\right]$$

$$=-M_i\left[\left(1-\sum_{j=1}^{N}d_js_j\right)\sum_{n=1}^{N+1}kg\eta_n\beta_n(t)X_n'(1)+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{N}d_jS_j\sum_{n=1}^{N+1}kg\eta_n\beta_n(t)X_n'(j+1)\right].$$

对于圆柱形容器，有

$$S(t)=-\rho\pi a^2h\sum_{n}^{N+1}kg\eta_n\beta_n(t)A_n, \tag{4.1.30}$$

式中

$$A_n=\left(1-\sum_{j=1}^{N}\frac{2\tanh(\sigma_jh_0)}{h_0\sigma_j(\sigma_j^2-1)}X_n'(1)+\sum_{j=1}^{N}\frac{2\tanh(\sigma_jh_0)}{h_0\sigma_j(\sigma_j^2-1)}X_n'(j+1)\right) \tag{4.1.31}$$

M_i、d_j 和 S_j 由式(3.3.5)和(3.3.4)确定。

依相同的途径，可以得到对于支承矩形容器单层框架的总剪力：

$$S_0(t)=\sum_{i=1,\cdots}^{N+1}\sum_{n=1,\cdots}^{N+1}M_ikg\eta_n\beta_n(t)X_n'(i) \tag{4.1.32}$$

而作用于容器壁上的合液动压力为

$$S(t)=-\rho abh\sum_{n=1,3,\cdots}^{2N+1}kg\eta_n\beta_n(t)A_n' \tag{4.1.33}$$

式中

$$A_n'=\left(1-\sum_{j=1,\cdots}^{N}\frac{8\tanh\frac{h_0}{(2j-1)\pi}}{(2j-1)^3\pi^3h_0}X'(1)+\sum_{j=1,\cdots}^{N}\frac{8\tanh\frac{h_0}{(2j-1)\pi}}{(2j-1)^3\pi^3h_0}X_n'(j+1\right) \tag{4.1.34}$$

其中 $X_n(j)$可由固有振动方程(4.1.3)和(4.1.4)确定，η_n 由式(4.1.23)确定，而 $\beta_n(t)$由运动方程(4.1.26)确定，不过此时应将这些方程中的参数(诸如 M_i、d_j、s_j、$\bar{\omega}_j^2$、ω_j 代以相应于矩形容器时的值。

在公式(4.1.28)、(4.1.30)、(4.1.32)和(4.1.33)中，出现有振型组合问题，在这里，我们仍然和在第三章的第三节中那样，采用平方和开方的方法来求作用于系统上的总剪力和容器上合液动压力的最大值。于是，我们得到：

对于圆柱形容器最大总剪力和最大合液动压力为

$$S_{0\max}=c\sum_{i=1}^{N+1}M_igk\sqrt{\sum_{n=1}^{N+1}[\eta_n\beta_{n,\max}X_n'(i)]^2}, \tag{4.1.29'}$$

$$S_{\max}=cM_ikg\sqrt{\sum_{n=1}^{N+1}(\eta_n\beta_{n,\max}A_n)^2}; \tag{4.1.30'}$$

对于矩形容器，最大总剪力和最大合液动压力为

$$S_{0\max}=c\sum_{i=1,3,\cdots}^{2N+1}M_{i}kg\sqrt{\sum_{n=1,\cdots}^{N+1}[\eta_n\beta_{n,\max}X'_n(i)]^2} \tag{4.1.32'}$$

$$S_{\max}=cM_{l}kg\sqrt{\sum_{n=1,\cdots}^{N+1}(\eta_n\beta_{n,\max}A'_n)^2} \tag{4.1.33'}$$

在这此式子中，$\beta_{n,\max}$ 为第 n 振型之动力放大系数的最大值。c 为结构系数，对于构架式容器，和第三章中对于贮液构筑物一样，取 $c=0.4$。

和第三章对于贮液构筑物的情形一样，在应用反应谱理论来分析构架式贮液容器时，由于液体的阻尼很小，因而在计算液体的振型时，动力放大系数应比工业与民用建筑抗震规范的规定大一倍，即地震影响系数之最大值 $\alpha_{\max}$ 应取表 3.3.2 给出的值；但在计算构架本身的振型时，动力放大系数则不必作此放大，$\alpha_{\max}$ 应取表 3.3.1 给出的值。

对于支承有 l 个相同圆柱形或矩形容器的单层构架系统，在地震地面运动下，作用于系统上的总地震荷载和作用于容器侧壁上的合液动压力的计算公式有与式(4.1.29)，(4.1.30′)及(4.1.32′)、(4.1.33′)相同的形式，不过这时 M_l 为 l 个容器中贮液的总质量。

第二节　多层构架贮液容器

与支承贮液容器的单层构架可简化为单自由度质点系统一样，支承具有部份贮液容器之多层构架的计算，亦可归结为具有 n 个质点的多自由度系统来考虑，此系统的质点上作用有相应层容器壁上的液动压力和构架自身质量所产生的地震惯性力。这种系统的计算在数学上是相当复杂的。这里，我们仅以二层构架系统（如图 4.2.1 示）作为例子，来说明地震荷载作用下多层构架式贮液器的计算方法。至于层数更多的情形，完全可以依照相同计算程序去进行，不过运算更加繁杂。

一、二层贮液构架系统的自由振动

为了讨论简单起见，我们仍然从每层构架上只有一个贮液容器开始。这时，将二层贮液构架系统简化为两个质点之二自由度系统，其无阻尼自由振动方程为

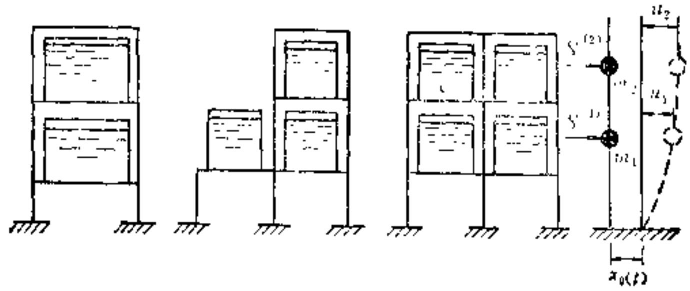


图 4.2.1

$$\left.\begin{aligned}m_1\ddot{u}_1+k_{11}u_1+k_{12}u_2=S^{(1)},\\ m_2\ddot{u}_2+k_{21}u_1+k_{22}u_2=S^{(2)}.\end{aligned}\right\} \tag{4.2.1}$$

式中 m_1 和 m_2 分别为第一层和第二层构架及贮液器的集中质量，$K_{ij}(i,j=1,2)$ 表示由于第 j 个质点上的单位位移在第 i 个质点上引起的弹性反力，而

$$S^{(i)}=-M_l^{(i)}\left[a_i+\sum_{j=1}^{\infty}d_j^{(i)}s_j^{(i)}\ddot{q}_j^{(i)}\right],i=1,2 \tag{4.2.2}$$

$M_i^{(i)}$ 分别是第一层和第二层贮液的质量，$d_j^{(i)}$、$s_j^{(i)}$ 分别由第一层和第二层贮液容器及其中液体的几何及物理参数，可按公式(3.3.4)、(3.3.5)（或(3.3.6)）确定，$\ddot{q}_j^{(i)}$ 则由各层的位移(u_1 或 u_2)按如下方程在适当初始条件下确定：

$$\ddot{q}_j^{(i)}+\bar{\omega}_j^{2(i)}q_j^{(i)}=-\ddot{u}_i,\quad j=1,\cdots;i=1,2 \tag{4.2.3}$$

对于稳态自由振动，我们设

$$\left.\begin{aligned}&u_1=X_1(1)e^{i\omega t},\ u_2=X_2(1)e^{i\omega t},\\&q_j^{(1)}=X_1(j+1)e^{i\omega t},\ q_j^{(2)}=X_2(j+1)e^{i\omega t},\quad j=1,\cdots\end{aligned}\right\} \tag{4.2.4}$$

将上式代入式(4.2.1)、(4.2.2)和(4.2.3)，得如下方程组：

$$\left.\begin{aligned}&(-m_1\omega^2+k_{11})X_1(1)+k_{12}X_2(1)=M_1^{(1)}\omega^2\left[X_1(1)+\sum_{j=1}^{\infty}d_js_j^{(1)}X_1(j+1)\right],\\&(-m_2\omega^2+k_{22})X_2(1)+k_{21}X_1(1)=M_1^{(2)}\omega^2\left[X_2(1)+\sum_{j=1}^{\infty}d_js_j^{(2)}X_2(j+1)\right],\\&(-\omega^2+\bar{\omega}_j^{2(1)})X_1(j+1)=\omega^2X_1(1),\quad j=1,\cdots\\&(-\omega^2+\bar{\omega}_j^{2(2)})X_2(j+1)=\omega^2X_2(1),\quad j=1,\cdots\end{aligned}\right\} \tag{4.2.5}$$

方程(4.2.5)是以无穷个 $x_i(j)(i=1,2;j=1,\cdots)$ 为未知数的联立方程组，其非零解可由其数列行列式等于零得到：

$$\begin{vmatrix}k_{11}-(m_1+m_{pr}^{(1)})\omega^2 & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}-(m_2+m_{pr}^{(2)})\omega^2\end{vmatrix}=0, \tag{4.2.6}$$

其中圆柱形容器：

$$m_{pr}^{(i)}=M_1^{(i)}\left[1+\frac{a_i^2\omega^2}{gh_i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\sigma_n-\dfrac{a_i\omega^2}{g}\coth\left(\sigma_n\dfrac{h_i}{a_i}\right)}\right],\quad i=1,2 \tag{4.2.7}$$

对于矩形容器：

$$m_{pr}^{(i)}=M_i^{(i)}\left[1+\frac{8a_i^2\omega^2}{g\pi^4h_i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\,\frac{1}{(2n-1)\pi-\dfrac{a_i\omega^2}{g}\coth\left(\dfrac{(2n-1)\pi h_i}{a_i}\right)}\right],$$

$$i=1,\ 2, \tag{4.2.8}$$

式中 a_i 和 h_i 分别为第一层和第二层的容器尺寸及贮液深度。

现在，我们将式(4.2.6)展示，即得到决定系统之固有频率的方程：

$$[K_{11}-(m_1+m_{pr}^{(1)})\omega^2][K_{22}-(m_2+m_{pr}^{(2)})\omega^2]-K_{12}K_{21}=0 \tag{4.2.9}$$

如果每层不是一个，而是第一层 s 个，第二层 l 个容器，则频率方程(4.2.9)具有形式

$$\left[K_{11}-\left(m_1+\sum_{n=1}^{s}m_{pr,n}^{(1)}\right)\omega^2\right]\left[K_{22}-\left(m_2+\sum_{n=1}^{l}m_{pr,n}^{(2)}\right)\omega^2\right]-K_{12}K_{21}=0 \tag{4.2.10}$$

其中 m_1 和 m_2 相应是第一层和第二层上整个结构单元的质量。

方程(4.2.9)和(4.2.10)之解很复杂，因为液体的折算质量 $m_{pr,n}^{(i)}$ 与频率 ω 有关。从所得到的方程(4.2.9)和(4.2.10)可见，它们与其刚体质量之频率方程的不同点在于应当用质量 $m_{(i)}+\sum m_{pr,n}^{(i)}$ 来代替质量 $m_{1,2}$。由于 $m_{pr,n}^{(i)}$ 与频率 ω 有关，因而如对于单层贮液构架系统一样，从式(4.2.9)和(4.2.10)之解将会得出无限多个频率。其原因在于，当在各个质量

上附加以液动压力的作用以后，其效果相当于除了 n 个质点振动所产生的 n 个固有频率外，还有贮液所产生的无限个固有频率。

由式（4.2.9）或（4.2.10）求出系统之频率后，代入方程（4.2.5），即可算得系统的振型。

二、地震力的确定

限于只考虑每层构架上仅有一个贮液容器的情形（因为每层上有多个容器的情形，可以按照与只有一个容器情形完全相同的方法进行计算，不过其中的参数有所不同而已），这时，对于两个自由度的无阻尼系统，在地面运动 $\ddot{x}_0(t)$ 作用下的强迫振动方程为

$$\left.\begin{aligned} m_1(\ddot{x}_0+\ddot{u}_1)+K_{11}u_1+K_{12}u_2&=-M_l^{(1)}\left[(\ddot{x}_0+\ddot{u}_1)+\sum_{j=1}^{\infty}d_j s_j^{(1)}\ddot{q}_j^{(1)}\right],\\ m_1(\ddot{x}_0+\ddot{u}_0)+K_{21}u_1+K_{22}u_2&=-M_l^{(2)}\left[(\ddot{x}_0+\ddot{u}_2)+\sum_{j=1}^{\infty}d_j s_j^{(2)}\ddot{q}_j^{(2)}\right].\end{aligned}\right\}\tag{4.2.11}$$

$$\left.\begin{aligned}\ddot{q}_j^{(1)}+\tilde{\omega}_j^{2(1)}q_j^{(1)}&=-(\ddot{x}_0+u_1),\quad j=1,2,3,\cdots\\ \ddot{q}_j^{(2)}+\tilde{\omega}_j^{2(2)}q_j^{(2)}&=-(\ddot{x}_0+u_2),\quad j=1,2,3,\cdots\end{aligned}\right\}\tag{4.2.12}$$

首先，令

$$\tilde{K}_j^{(1,2)}=M_l^{(1,2)}d_jS_j^{(1,2)}\tilde{\omega}_j^{2(1,2)},\quad j=1,2,3,\cdots\tag{4.2.13}$$

将式(4.2.12)改变为

$$\left.\begin{aligned}M_l^{(1)}d_jS_j^{(1)}\ddot{q}_j^{(1)}+\tilde{K}_j^{(1)}q_j^{(1)}&=-M_l^{(1)}d_jS_j^{(1)}(\ddot{x}_0+\ddot{u}_1),\quad j=1,2,3,\cdots\\ M_l^{(2)}d_jS_j^{(2)}\ddot{q}_j^{(2)}+\tilde{K}_j^{(2)}q_j^{(2)}&=-M_l^{(2)}d_jS_j^{(2)}(\ddot{x}_0+\ddot{u}_2),\quad j=1,2,3\end{aligned}\right\}\tag{4.2.12'}$$

和单自由度系统的处理办法一样，我们把无穷方程组(4.2.11)和(4.2.12′)用其前 $2(N+1)$ 个方程之方程组来代替，即除了构架所提供的两个自由度以外，每层构架中的液体仅考虑其前 N 个振型。这时，我们令

$$\left.\begin{aligned}&x_1=u_1,\quad x_j=q_{j-1}^{(1)}+u_1,\quad j=2,3,\cdots,N+1\\ &x_{N+2}=u_2,\quad x_j=q_{j-(N+2)}^{(2)}+u_2,\quad j=N+3,N+4,\cdots,2(N+1)\end{aligned}\right\}\tag{4.2.14}$$

可将式(4.2.11)和(4.2.12′)化为

$$\left.\begin{aligned}(m_1+M_l^{(1)})(\ddot{x}_0+\ddot{x}_1)+K_{11}x_1+K_{12}x_{N+2}&=-M_l^{(1)}\sum_{j=2}^{N+1}d_{j-1}S_{j-1}^{(1)}(\ddot{x}_j-\ddot{x}_1),\\ (m_2+M_l^{(2)})(\ddot{x}_0+\ddot{x}_{N+2})+K_{21}x_1+K_{22}x_{N+2}&=-M_l^{(2)}\sum_{j=N+3}^{2(N+1)}d_{j-(N+2)}S_{j-(N+2)}^{(2)}(\ddot{x}_j-\ddot{x}_{N+2}).\end{aligned}\right\}\tag{4.2.15}$$

$$\left.\begin{aligned}&M_l^{(1)}d_{j-1}S_{j-1}^{(1)}(\ddot{x}_0+\ddot{x}_j)+\tilde{K}_{j-1}^{(1)}(x_j-x_1)=0,\quad j=2,3,\cdots,N+1\\ &M_l^{(2)}d_{j-(N+2)}S_{j-(N+2)}^{(2)}(\ddot{x}_0+\ddot{x}_j)+\tilde{K}_{j-(N+2)}^{(2)}(x_j-x_{N+2})=0,\quad j=N+3,\cdots,2(N+1)\end{aligned}\right\}\tag{4.2.16}$$

将方程(4.2.16)代入(4.2.15)中，得

$$\left.\begin{aligned}&M_1(\ddot{x}_0+\ddot{x}_1)+k_{11}x_1+k_{1,N+2}x_{N+2}-\sum_{j=2}^{N+1}k_{1,j}x_j=0,\\ &M_{N+2}(\ddot{x}_0+\ddot{x}_{N+2})+k_{N+2,1}x_1+k_{N+2,N+2}x_{N+2}-\sum_{j=N+3}^{2(N+1)}k_{N+2,j}x_j=0.\end{aligned}\right\}\tag{4.2.15'}$$

同时，将方程(4.2.16)改写为

$$\left.\begin{aligned}&M_j(\ddot{x}_0+\ddot{x}_j)+k_{j,1}x_1+k_{j,j}x_j=0,\quad j=2,3,\cdots,N+1\\&M_j(\ddot{x}_0+\ddot{x}_j)+k_{j,N+2}x_{N+2}+k_{j,j}x_j=0,\quad j=N+3,\ N+4,\cdots,2(N+1)\end{aligned}\right\}\quad(4.2.16')$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&M_1=m_1+M_l^{(1)}=\left(1-\sum_{j=2}^{N+1}d_{j-1}S_{j-1}^{(1)}\right),\\&M_{N+2}=m_2+M_l^{(2)}\left(1-\sum_{j=N+3}^{2(N+1)}d_{j-(N+2)}S_{j-(N+2)}^{(2)}\right),\\&M_j=\begin{cases}M_l^{(1)}d_{j-1}S_{j-1}^{(1)},\quad j=2,3,\cdots,N+1\\M_l^{(2)}d_{j-(N+2)}S_{j-(N+2)}^{(2)},\quad j=N+3,\cdots,2(N+1)\end{cases}\\&k_{11}=K_{11}+\sum_{j=2}^{N+1}\widetilde{K}_{j-1}^{(1)},\quad k_{N+2,N+2}=K_{22}+\sum_{j=N+3}^{2(N+1)}\widetilde{K}_{j-(N+2)}^{(2)},\\&k_{1,N+2}=K_{12},\quad k_{N+2,1}=K_{21},\\&k_{j1}=-\widetilde{K}_{j-1}^{(1)}\ (j=2,3,\cdots,N+1),k_{j,N+2}=-\widetilde{K}_{j-(N+2)}^{(2)},[j=N+3,\cdots,2(N+1)],\\&k_{jj}=\begin{cases}\widetilde{K}_{j-1}^{(1)},\quad j=2,3,\cdots,N+1\\\widetilde{K}_{j-(N+2)}^{(2)},\quad j=N+3,N+4,\cdots,2(N+1)\end{cases}\end{aligned}\right\}$$

(4.2.17)

将方程(4.2.15′)和(4.2.16′)在适当初始条件下联立求解，即可获得在地震地面运动$\ddot{x}_0(t)$下，作用于二层构架式贮液器上之地震力及作用于容器壁上之液动压力。不过，为了应用反应谱理论方便起见，在这里，我们仍然如同在单层构架情形里所作的那样，将方程(4.2.15′)和(4.2.16′)写成$2(N+1)$个自由度系统之标准运动方程的形式：

$$M_i(\ddot{x}_0+\ddot{x}_i)+\sum_{j=1}^{2(N+1)}k_{ij}x_j=0,\quad i=1,2,\cdots,2(N+1)\qquad(4.2.18)$$

其中，除(4.2.17)中的k_{ij}外，其余的k_{ij}等于零

方程(4.2.18)和方程(4.1.17)完全相同，因而可以用相同的方法，最后得到作用于系统上的总地震荷载之最大值为

$$S_{0\max}=c\sum_{i=1}^{2(N+1)}M_igk\sqrt{\sum_{n=1}^{2(N+1)}[\eta_n\beta_{n,\max}X_n'(i)]^2},\qquad(4.2.19)$$

而作用于贮液容器之上合液动压力的最大值，对于圆柱形容器为

$$S_{\max}^{(i)}=cM_l^{(i)}kg\sqrt{\sum_{n=1}^{2(N+1)}[\eta_n\beta_{n,\max}A_n^{(i)}]^2}\quad i=1,2\qquad(4.2.20)$$

对于矩形容器为

$$S_{\max}^{(i)}=cM_l^{(i)}kg\sqrt{\sum_{n=1}^{2(N+1)}[\eta_n\beta_{n,\max}A_n^{(i)\prime}]^2}\qquad(4.2.21)$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
A_n^{(1)} &= \left(1-\sum_{j=1}^{N}\frac{2a^{(1)}\tanh\left(\frac{\sigma_j h^{(1)}}{a^{(1)}}\right)}{\sigma_j(\sigma_j^2-1)h^{(1)}}\right)X_n'(1)+\sum_{j=1}^{N}\frac{2a^{(1)}\tanh\left(\frac{\sigma_j h^{(1)}}{a^{(1)}}\right)}{\sigma_j(\sigma_j^2-1)h^{(1)}}X_n'(j+1),\\
A_n^{(2)} &= \left(1-\sum_{j=1}^{N}\frac{2a^{(2)}\tanh\left(\frac{\sigma_j h^{(2)}}{a^{(2)}}\right)}{\sigma_j(\sigma_j^2-1)h^{(2)}}\right)X_n'(N+2)+\sum_{j=1}^{N}\frac{2a^{(2)}\tanh\left(\frac{\sigma_j h^{(2)}}{a^{(2)}}\right)}{\sigma_j(\sigma_j^2-1)h^{(2)}}X_n'(j+N+2),
\end{aligned}\right\}
\tag{4.2.22}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
A_n^{(1)\prime} &= \left(1-\sum_{j=1}^{N}\frac{8a^{(1)}\tanh\left(\frac{h^{(1)}}{(2j-1)\pi a^{(1)}}\right)}{(2j-1)^3\pi^3h^{(1)}}\right)X_n'(1)+\\
&+\sum_{j=1}^{N}\frac{8a^{(1)}\tanh\left(\frac{h^{(1)}}{(2j-1)\pi a^{(1)}}\right)}{(2j-1)^3\pi^3h^{(1)}}X_n'(j+1),\\
A_n^{(2)\prime} &= \left(1-\sum_{j=1}^{N}\frac{8a^{(2)}\tanh\left(\frac{h^{(2)}}{(2j-1)\pi a^{(2)}}\right)}{(2j-1)^3\pi^3h^{(2)}}\right)X_n'(N+2)+\\
&+\sum_{j=1}^{N}\frac{8a^{(2)}\tanh\left(\frac{h^{(2)}}{(2j-1)\pi a^{(2)}}\right)}{(2j-1)^3\pi^3h^{(2)}}X_n'(j+N+2)
\end{aligned}\right\}
\tag{4.2.23}
$$

其中

$$X_n'(1)=X_{1n}(1),\quad X_n'(j)=X_{1n}(1)+X_{1n}(j),(j=2,3,\cdots,N+1)$$

$$X_n'(N+2)=X_{2n}(1),\quad X_n'(j+N+2)=X_{2n}(1)+X_{2n}(j).\ (j=2,3,\cdots,N+1)$$

到此为止，我们已对两层构架贮液容器系统的地震力计算问题进行了全面的讨论。与单层构架情形所得的公式相比较，其形式完全相似。因而可以估计，对于具 n 层的构架式贮液容器亦可以依据与此完全相同的过程进行计算，并得到上面相似的公式，只不过计算量更加繁复而已。

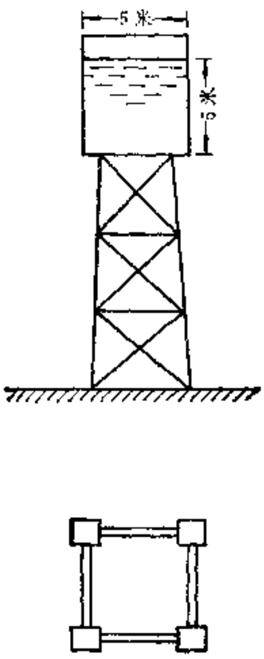


图 4.3.1

第三节　算　　例

设在9度地震区有一建筑在Ⅱ类地基上的构架式贮液器，构架设置有一个圆柱形贮液容器（如图 4.3.1 所示）。容器的半径为 $a=2.5$ 米，内中贮有水，其深度为 $h=5$ 米。构架及水柜之总重量为 $w=16$ 吨，构架之刚度系数 $K=425$ 吨/米，试求地震时作用于构架上的总地震荷载及作用于水柜壁上的合液动压力的最大值。

为了简单起见，只考虑水的第一振型。于是，由公式(3.1.17)求得水柜中水的第一自振频率为

$$\hat{\omega}_1=\sqrt{\frac{g}{a}\sigma_1\tanh\left(\sigma_1\frac{h}{a}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{9.8}{2.5}\times 1.84\times\tanh(1.84\times 5/2.5)}$$

$$=2.685/秒。$$

从而得到水的第一自振周期为

$$\widetilde{T}_1=\frac{2\pi}{2.685}=2.34\ 秒$$

由式(6.1.5)，其中之级数仅取其第一项，得

$$-(w+w_l)\omega^2+kg-w_l\omega^4\frac{2a\tanh(\sigma_1 h/a)}{(\hat{\omega}_1^2-\omega^2)\sigma_1^2(\sigma_1^2-1)h}=0,$$

式中 $w=mg=16$ 吨为构架及水柜之总重量，$w_l=M_lg=\pi a^2h=98.2$ 吨为水柜中水的重量。将各个参量之数代入上方程，得到如下频率方程：

$$\omega^4-54.22\,\omega^2+326.41=0.$$

将此方程求解，可得如下两个根

$$\omega_1^2=6.90,\quad T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}=2.4\ 秒,$$

$$\omega_2^2=47.4,\quad T_2=\frac{2\pi}{\omega_2}=0.912\ 秒.$$

将 ω_1 和 ω_2 之值代回式(4.1.3)和(4.1.4)，得如下两个振型：

$$X_1(1)=0.045;\quad X_1(2)=1,$$

和

$$X_2(1)=1;\quad X_2(2)=-1.18.$$

从而得到

$$X_1'(1)=0.043;\quad X'_1(2)=1,$$

$$X_2'(1)=1;\quad X_2'(2)=-0.18.$$

由式(4.1.16)算得

$$M_1=\left[16+98.2\left(1-\frac{2\times 2.5\times\tanh(1.84\times 5/2.5)}{1.84\times(1.84^2-1)\times 5}\right)\right]\Big/9.80=9.39\ 吨\cdot秒^2米;$$

$$M_2=98.2\times\frac{2\times 2.5\times\tanh(1.84\times 5/2.5)}{1.84\times(1.84^2-1)\times 5\times 9.8}=2.26\ 吨\cdot秒^2/米.$$

再由式(4.1.23)算得振型参与系数

$$\eta_1=\frac{9.39\times 0.043+2.26\times 1}{9.39\times 0.043^2+2.26\times 1^2}=1.18,$$

$$\eta_2=\frac{9.39\times 1-2.26\times 0.18}{9.39\times 1^2+2.26\times 0.18^2}=0.95.$$

由于 $T_1=2.4$ 秒是水在耦联影响下的第一自振周期，而 $T_2=0.912$ 秒是构架在耦联影响下的第一自振周期，由第二章的图 2.4.1 和表 3.3.1，得

$$\alpha_1=k\beta_1=0.2\times 2\times 0.9=0.36,$$

$$\alpha_2 = k\beta_2 = \frac{0.3\times0.9}{0.912} = 0.296.$$

于是，由式(4.1.29′)算得作用于构架系统上的总地震力为

$$S_{0\max} = 0.4\{9.39\times9.8\times[(1.18\times0.36\times0.043)^2+(0.95\times0.296\times1)^2]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+2.26\times9.8\times[(1.18\times0.36\times1)^2+(0.95\times0.296\times0.18)^2]^{\frac{1}{2}}\} = 14.15\text{ 吨}.$$

再由式(4.1.31)算得

$$A_1 = \left(1-\frac{2\times2.5\times\tanh(1.84\times5/2.5)}{1.84\times(1.84^2-1)\times5}\right)\times0.04+\frac{2\times2.5\times\tanh\ (1.84\times5/2.5)}{1.84\times(1.84^2-1)\times5}\times$$

$$\times1 = 0.257,$$

$$A_2 = \left(1-\frac{2\times2.5\times\tanh(1.84\times5/2.5)}{1.84\times(1.84^2-1)\times5}\right)\times1-\frac{2\times2.5\times\tanh(1.84\times5/2.5)}{1.84\times(1.84^2-1)\times5}\times$$

$$\times0.18 = 0.7333.$$

从而由式(4.1.30′)算得作用于水柜侧壁上合动水压力的最大值为

$$S_{\max} = 0.4\times98.2\times[(1.18\times0.36\times0.257)^2+(0.95\times0.296\times0.7333)^2]^{\frac{1}{2}} = 9.16\text{ 吨}.$$

从所得到的结果看出，不考虑水与结构的耦联影响时，水柜中水的第一自振周期 $\tilde{T}_1 = 2.34$ 秒，而当考虑到耦联影响时，水的第一周期变为 $T_1 = 2.4$ 秒。在将水考虑为刚性质量固定于容器上，构架之固有周期为 $\tilde{T} = 2\pi\Big/\sqrt{\frac{k}{m+m_t}} = 2\pi\Big/\sqrt{\frac{425\times9.81}{16+98.2}} = 1.04$ 秒，而当考虑到地震时容器中的水振动而与容器发生耦联作用，构架之固有周期为 $T = 0.912$ 秒。由此可见，由于耦联影响，水的固有周期略有增加，而构架之固有周期则有所减少。

参 考 文 献

[1] И.И Голбденьлат. Н. А. Николаенко. “Расчет конструкций на действие сейсмических и импульсивных сил”, Госстройиздат, 1961.

[2] 钱培风，结构动力学，中国工业出版社，1966

第五章　混凝土坝的动力计算

第一节　概　　述

水工建筑物，特别是水坝在遭遇到强烈地震后，如一旦发生毁坏或溃决，不仅使工程本身蒙受巨大损失，而且会造成难以估量的灾难。因此，对于水坝等水工建筑物的设计和施工决不能草率从事。近年来，各国在地震区修建的各类水坝、水闸等各类水工建筑物逐渐增多，仅就百米以上的高坝统计，修建在地震区的约占三分之一左右。特别应当指出的是，即使修建在非地震区或弱地震区的水库，也可能因库水或库区岩石机理上的变化而诱发水库地震。目前，世界各国对于水库诱发地震表现了强烈的关注，并正在进行系统的研究。据统计，各国水库地震的事例已达 70 个左右，而且在高度超过 100 米、库容大于 10 亿立方米的水库中，发生水库地震的约达 17 %。其中震级最大的印度柯依那(Koyna)水库地震达 6.5 级，这次地震使高度为 103 米的柯伊那重力坝本身蒙受损害[1]。在 1957 年英国劳勃洛(Loughborough)地震中，1900 年修建的黑溪重力坝 (Blackbrook，坝高 30.5 米)遭受 8 度强震，造成溢洪道上部拱顶有 6 处裂缝，下游坝面及坝内廊道漏水。至于混凝土拱坝，震害实例少见。

我国水利资源十分丰富，但又是一个多地震的国家。解放以来，兴修了大量各类水工建筑物，在经历了几次举世闻名的大地震，如邢台地震、海城地震和唐山地震后，绝大部分水工建筑物经受了考验，但也有受到不同程度损害的，因此，其中很多也存在着抗震问题。特别需要指出的是：1962 年 3 月 19 日广东省河源县新丰江水库区发生了一次 6.1 级的强烈地震，使高达 105 米的重力大头坝蒙受了损坏，在坝顶 108 米高程处，发生了一次贯穿上、下游的长达 80 余米的水平裂缝。对此，我国各有关科研、设计和教育等部门曾进行了大量的研究工作[2]，以探明地震的成因和寻求大坝破坏的科学解释。由于该坝在地震发生之前和之后均经过抗震补强加固，因此，在国际上也是一起颇为广大科研工作者所重视的典型震例。

由于混凝土坝遭受震害的实例较少，迄今为止，还没有因地震而造成溃坝的先例。这和一般工业与民用建筑迥然不同，或许这正是水工建筑物的抗震设计理论落后于工业及民用建筑物的原因。

目前，各国水工建筑物抗震设计的基本情况是：对抗震稳定和强度的校核都沿用静力原理进行分析，但对强度指标和安全系数等，则针对地震荷载的特殊情况而作适当调整。地震惯性力大多仍沿用静力理论确定，即把建筑物作为刚性结构处理。应当指出，静力理论的地震惯性力既不能反映地面运动的特征、也没有考虑建筑物本身的固有振动特性，因而不符合真实的地震反应情况，当然也就不能充分解释震害的宏观现象。近年来，随着强震观测、动力分析和试验工作的进展，各国的水工建筑物抗震设计有逐步向动力分析方向发展的趋势。例如 1972 年开始实行的苏联水工建筑物抗震设计规范，完全是按动力反应谱理论来确定地震荷载的。但是，多数国家还是采用拟静力法，即以动力分析为基础分析各类建筑物的地震反应，再加以适当的简化和概括为沿建筑物高度按一定规律分布的加速度图形，将此图形和

相应的分布质量或者集中质量相乘，即可得到惯性力的分布图，再按此进行抗震设计。

地震时，大体积水工建筑物的反应十分复杂，这不仅是由于水工建筑物本身的结构形式及边界条件很复杂，而且还由于坝体、库水和地基三者的相互影响；如果还要进一步考虑地震波沿坝轴向传播时相位差等的影响时，则问题将是极其繁复的。但也只有计入这些影响后，才能真正反映水工建筑物动力分析的特点，其中库水影响尤属重要。如果考虑了水体的可压缩性影响后，则库水也可作为弹性体考虑。因此。严格地讲，应当将建筑物、库水及地基三者作为一个综合的弹性振动体系来进行动力分析，这个体系可以直接应用有限单元法求解。这在电子计算技术已很发达的今天，计算方面已不是很困难的了。但是，对于如何确定地基范围及其边界条件与水域的有效影响范围等等问题，都还没有很好解决。另一种途径是将库水和地基的影响，分别作为作用在建筑物迎水面和基础面上的外力对待。这样做可以避免上述困难，且地基可作为半无限弹性体处理。其优点还在于能更清楚地阐明库水和地基等各项因素的影响。

本章将详细介绍在各种不同的条件下，混凝土坝的地震动水压力计算方法。

第二节　水平简谐运动时作用于刚性坝面的动水压力

一、简要回顾

无论是从地球物理学或从工程学观点来看，了解在地震作用下的动力压水效应，均具有重要的实践意义。

早在十九世纪中叶，有关贮液容器的振动问题，就已经引起了广大科学工作者们的兴趣。虽然，从表面上看，当时并没有和地震作用直接联系起来。1876年瑞利在所发表的一篇有关波动的文章中[3]，就已经在速度势理论基础上，阐述了由于振动而产生在封闭水域内液体的波动问题。特别应当提到的是韦斯特加德在1933年研究了具有直立上游面的刚性坝面在地震作用下的动水压力问题[4]。他把地震理想为简谐运动，并假定水库向上游无限伸展。于是，把问题归结为求解相应边界条件下的二维波动方程，求得了动水压力的解析表达式。应当承认，在韦斯特加德的著作中，作了很多简化假定，并已不断为尔后的研究者们所改进；但他的工作无疑是富有启发性的，后来这方面的文章日渐增多，与此是密切相关的。

这里，我们将再次引述韦斯特加德的研究结果，但不想直接重复他的推导，而是准备从更一般性的基础上导出他的结果。为了能使读者对二维波动方程的求解有一完整的概念，将作较详细的推导。

首先，我们将认为水库是无旋的理想液体，假定振动为小扰动情况，则一般性的欧拉方程，对于直角座标系可简化如下：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x}&=\frac{\gamma_0}{g}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2},\\ \frac{\partial p}{\partial y}&=\frac{\gamma_0}{g}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2},\\ \frac{\partial p}{\partial z}&=\frac{\gamma_0}{g}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2},\end{aligned}\right\}\tag{5.2.1}$$

对于可压缩性液体的连续性条件为

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial z}=\frac{p}{E}. \tag{5.2.2}$$

将(5.2.1)和(5.2.2)两式略加变换后，就可以导得我们所熟知的波动方程、三维情况为

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=\frac{1}{K^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \tag{5.2.3}$$

二维情况为

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=\frac{1}{K^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \tag{5.2.4}$$

式中E为水体的可压缩性系数(弹性体变模量，21.10^{7}公斤/米^2；g为重力加速度；γ_0为水体单位体积重量；$K=\sqrt{gE/\gamma_0}$为水中声波速度(约1430米/秒)；ξ，η和ζ为相应于坐标x，y和z方向水体质点的位移。

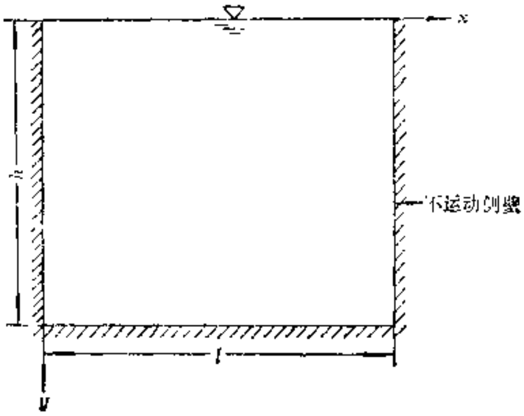


图 5.2.1

下面，我们先来研究矩形水槽二维流动的两种情况。

二、一壁运动、一壁固定(图5.2.1)

由于流动与坐标z无关，故此时相应于波动方程(5.2.4)。

假定水槽底部左侧壁受到水平位移扰动为

$$\xi_0=-\alpha g\frac{T^2}{4\pi^2}\cos\frac{2\pi t}{T},$$

式中T为扰动位移的周期(秒)，α为地震系数(无量纲)。需满足的边界条件为

$$当\ y=0\ 时，p=0； \tag{5.2.5}$$

$$当\ x=0\ 时，\frac{\partial p}{\partial x}=-\gamma_0\alpha\cos\frac{2\pi t}{T}; \tag{5.2.6}$$

$$当\ x=l\ 时，\frac{\partial p}{\partial x}=0； \tag{5.2.7}$$

$$当\ y=h\ 时，\frac{\partial p}{\partial y}=0. \tag{5.2.8}$$

从边界条件(5.2.5)可知，我们在这里略去了表面重力波的影响。在沃纳及森德奎斯特的著作中[5]，上述边界条件采用了位移条件，即应满足

$$p|_{y=0}=0, \qquad \xi|_{x=0}=\xi_0,$$

$$\xi|_{x=l}=0, \qquad \eta|_{y=h}=0.$$

但是，我们可以从下面的推导过程看出，直接采用压力及其法向导数表示的条件，将能简化推导。下面我们来求解在简谐运动作用下的波动方程(5.2.4)。若令

$$p(x,y,t)=\Phi(x,y)\cos\omega t, \tag{5.2.9}$$

把式(5.2.9)代入式(5.2.4)，则得

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\omega^2}{K^2}\Phi=0. \tag{5.2.10}$$

式中　ω为扰动位移的强迫振动频率。

对式(5.2.10)我们采用变量分离法：

令

$$\Phi(x,y)=X(x)Y(y), \tag{5.2.11}$$

把式(5.2.11)代入式(5.2.10)，经整理后可得

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\left(\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{\omega^2}{K^2}\right)=-\lambda^2, \tag{5.2.12}$$

式中 λ 为一任意常数。再令 $k^2=\lambda^2-\omega^2/K^2$，则式(5.2.12)可分解为如下两个方程：

$$Y''(y)+\lambda^2Y(y)=0, \tag{5.2.13}$$

$$X''(x)-k^2X(x)=0. \tag{5.2.14}$$

式(5.2.13)的解可表示为

$$Y(y)=A_1\cos\lambda y+A_2\sin\lambda y. \tag{5.2.15}$$

式(5.2.14)的解可表示为

$$X(x)=B_1\cos hkx+B_2\sin hkx. \tag{5.2.16}$$

上列两式中的 A_1，A_2，B_1 和 B_2 均为由边界条件确定的常数。下面，来求这些常数。

根据式(5.2.5)应有 $A_1=0$，由式(5.2.8)可以得到

$$A_2\lambda\cos\lambda y=0,$$

由于 $A_2\neq0$，故 $\cos\lambda_n y=0$，即

$$\lambda_n=\frac{(2n+1)\pi}{2h}. \quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{5.2.17}$$

根据解的线性性质，式(5.2.9)的解最终可表示为

$$p(x,\ y,\ t)=\sum_{n=0}^{\infty}(B_{1n}\cosh kx+B_{2n}\sinh kx)\sin\lambda_n y\cos\omega t, \tag{5.2.18}$$

由式(5.2.6)，并注意到可将1展为如下的正弦级数，即

$$1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{(2n+1)\pi}\sin\lambda_n y, \tag{5.2.18}$$

则得

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_{2n}k\sin\lambda_n y=a\gamma_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{(2n+1)\pi}\sin\lambda_n y, \tag{5.2.19}$$

比较上式左右两端同类项的系数，就可以得到

$$B_{2n}=a\gamma_0\frac{4}{(2n+1)\pi k}. \tag{5.2.20}$$

同理，由式(5.2.7)又可以求得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(B_{1n}k\sinh kl+B_{2n}k\cosh kl)\sin\lambda_n y=0. \tag{5.2.21}$$

把式(5.2.20)代入式(5.2.21)，得到

$$B_{1n}=-B_{2n}\frac{\cosh kl}{\sinh kl}=-\frac{4a\gamma_0}{(2n+1)\pi k}\frac{\cosh kl}{\sinh kl}. \tag{5.2.22}$$

再把式(5.2.20)和(5.2.22)代回式(5.2.18)，则可得到

$$p(x,y,t)=\frac{8\alpha\gamma_0 h}{\pi^2}\cos\omega t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\lambda_n^2K^2}}}\frac{\cosh k(l-x)}{\sinh kl}\sin\lambda_n y. \tag{5.2.23}$$

根据式(5.2.1),进行积分运算，不难求得

$$\xi=-\frac{agT^2}{\pi^3}\cos\omega t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\cdot\frac{\sinh k(l-x)}{\sinh kl}\sin\lambda_n y, \tag{5.2.24}$$

$$\eta=\frac{agT^2}{\pi^3}\cos\omega t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\lambda_n^2K^2}}}\cdot\frac{\cosh k(l-x)}{\sinh kl}\cos\lambda_n y. \tag{5.2.25}$$

由式(5.2.14)可知

$$k=\sqrt{\lambda^2-\frac{\omega^2}{K^2}}.$$

若令

$$\bar{\lambda}=\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\lambda_n^2K^2}}=\sqrt{1-\left[\frac{4h}{(2n+1)KT}\right]^2} \tag{5.2.26}$$

则得

$$k=\lambda\bar{\lambda}. \tag{5.2.27}$$

流动的稳定性将取决于分母($\sinh kl$)的数值，并根据 $\bar{\lambda}$ 为实数或虚数而有两种情况需加以区分。假使 $\bar{\lambda}$ 为实数，则得到 $h<KT/4$，即在所有条件下，流动是稳定的。若 $\bar{\lambda}$ 为虚数，则对某些 k 值分母将变为零，这意味着共振，并将使压力 p 和位移 η 变为无限大。

方程

$$\sinh kl=0 \tag{5.2.28}$$

的根为

$$kl=\mu\pi i, \tag{5.2.29}$$

式中 μ 为整数，$i=\sqrt{-1}$，把式(5.2.29)代入式(5.2.26)，并结合(5.2.27)经整理后可得

$$\left(\frac{4h}{KT}\right)^2-\left(\frac{2\mu h}{l}\right)^2=(2n+1)^2 \tag{5.2.30}$$

由(5.2.30)得到

$$h=\frac{(2n+1)KT}{4}\cdot\frac{l}{\sqrt{l^2-\left[\frac{\mu KT}{2}\right]^2}}.$$

a) 若 $\mu=0$，得 $h=(2n+1)KT/4$，或 $f=1/T=\frac{(2n+1)}{4h/K}=(2n+1)/T_0=(2n+1)f$，$T_0=1/f_0=4h/K$。这时 $\bar{\lambda}=0$，$\eta\to\infty$，这是竖向共振，物理意义是明显的。T_0 是水中声波通过 4 倍水柱高度的时间，经过 $4h$，位相改变 2π（如式 5.3.25 所示)。

b) 当 μ 为不等于 0 的正整数(仅取正整数就可以)，则当 h 与 l 满足(5.2.30)时，就有

$\sinh kl \to 0$，这时 $\xi \to \infty$，$\eta \to \infty$，是水平向和竖向的耦合共振。

当 $n=0$ 时，发生共振的 h 值为

$$h=\frac{KT}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\mu KT}{2l}\right)^2}}. \tag{5.2.31}$$

从式(5.2.31)可见，发生共振的条件将取决于水库长度 l。因此，如果不使

$$l \geqslant \mu\frac{KT}{2}, \tag{5.2.32}$$

则共振是不会发生的。还应当指出，使 p 和 η 变为无穷大的最小 μ 值为 0，当 $l=\infty$ 时，则 $h=KT/4$，这个数值和韦斯特加德所求得的假定水库为无限大时的结果相一致。

这样，在水库内任意点的动水压力值可按式(5.2.23)计算。而作用在运动侧壁上动水压力的总合力可由 $y=0$ 到 $y=h$ 积分求得。

$$R=\frac{16h^2}{\pi^3}\alpha\gamma_0\cos\omega t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3\bar{\lambda}}\coth kl. \tag{5.2.33}$$

水库长度和深度比值不同时，按式(5.2.23)和式(5.2.33)所求得的结果示于图 5.2.2 和图 5.2.3。

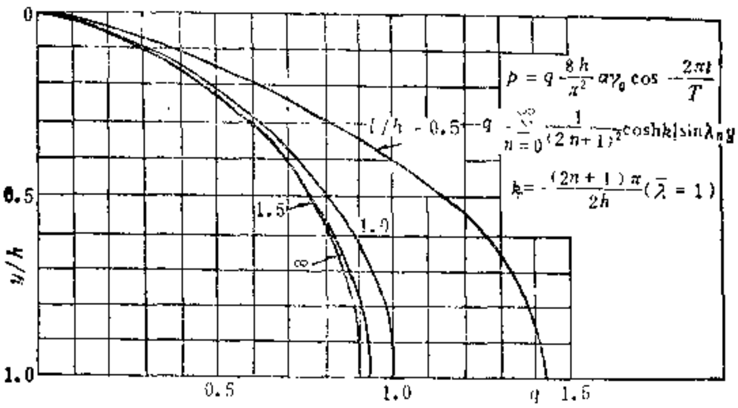


图 5.2.2

三、水库的两端侧壁同时运动(图 5.2.4)

当水库的两端侧壁同时运动时，则其所需满足的边界条件为

当 $y=0$ 时，$\quad p=0$； (5.2.34)

当 $x=0$ 时，$\quad \dfrac{\partial p}{\partial x}=-\alpha\gamma_0\cos\omega t$； (5.2.35)

当 $x=l$ 时，$\quad \dfrac{\partial p}{\partial x}=-\alpha\gamma_0\cos\omega t$； (5.2.36)

当 $y=h$ 时，$\quad \dfrac{\partial p}{\partial y}=0$. (5.2.37)

现在所需求解的问题仍将归结为解式(5.2.4)和相应的边界条件式(5.2.34)—(5.2.37)。与前面的推导相类似，不难求出新的积分常数。根据条件式(5.2.34)，可求得 $A_1=0$。根据条件式(5.2.37)又可得到

$$A_2\lambda\cos\lambda h=0. \tag{5.2.38}$$

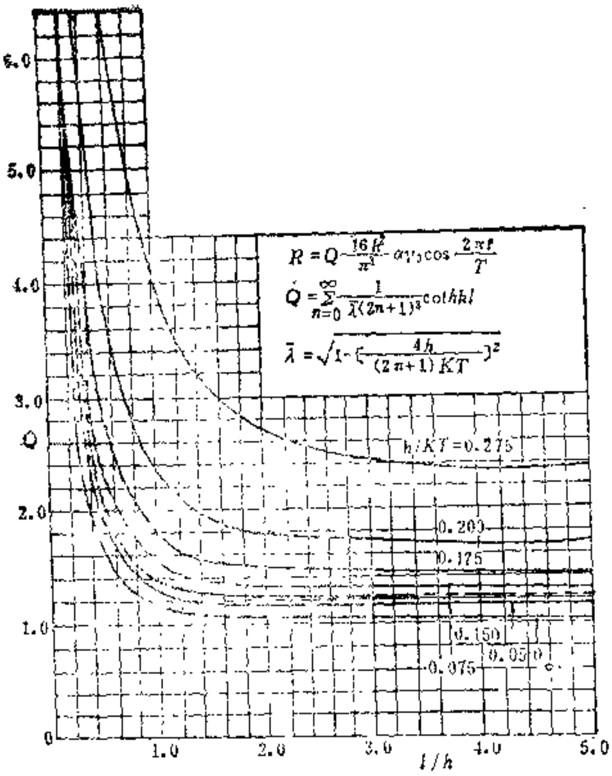


图 5.2.3

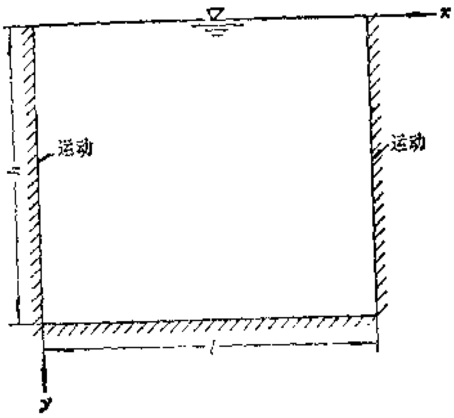


图 5.2.4

由于 $A_2 \neq 0$，故 $\cos\lambda h=0$，即

$$\lambda_n=\frac{(2n+1)\pi}{2h}.\quad (n=0,1,2\cdots) \tag{5.2.39}$$

根据条件式(5.2.35)，可以求得

$$B_{2n}=\alpha\gamma_0\frac{4}{(2n+1)\pi k}, \tag{5.2.40}$$

根据式(5.2.36)可以求得

$$B_{1n}=-\frac{4\alpha\gamma_0}{(2n+1)\pi k}\left[\frac{\cosh kl-1}{\sinh kl}\right]. \tag{5.2.41}$$

将式(5.2.40)和(5.2.41)代回式(5.2.23)，则可求得动水压力为

$$p(x,y,t)=\frac{8\alpha\gamma_0 h}{\pi^2}\cos\omega t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\lambda_n^2K^2}}}\times$$

$$\times\frac{\cosh kx-\cosh k(l-x)}{\sinh kl}\sin\lambda_n y\ . \tag{5.2.42}$$

根据式(5.2.1)进行积分，不难求得

$$\xi=-\frac{\alpha gT^2}{\pi^3}\cos\omega t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\cdot\frac{\sinh kx+\sinh k(l-x)}{\sinh kl}\sin\lambda_n y, \tag{5.2.43}$$

$$\eta=-\frac{\alpha gT^2}{\pi^3}\cos\omega t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\lambda_n^2K^2}}}\times$$

$$\times \frac{\cosh kx - \cosh k(l-x)}{\sinh kl} \cos \lambda_n y . \qquad (5.2.44)$$

容易看出，发生共振的条件仍将取决于水库长度 l。虽然式(5.2.24)、(5.2.25) 和(5.2.43)、(5.2.44)中的分母相同，但其分子不同。因此，可以证明，使 p 和 η 变为无穷大的最小 μ 值为 1，这和情况二有所不同。

若将式(5.2.42)对 $y=0$ 到 h 积分，即可得到作用于侧壁的动水压力合力为

$$R = \frac{16\,h^2}{\pi^3} \alpha \gamma_0 \cos \omega t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3 \sqrt{1-\frac{\omega^2}{\lambda_n^2 K^2}}} \tanh \frac{kl}{2}. \qquad (5.2.45)$$

当水库长度和深度比不同时，由式(5.2.42) 和式(5.2.45) 所得结果列于图 5.2.5 及图 5.2.6。为了了解水体可压缩性的影响，对式(5.2.42)按 $\bar{\lambda}=1$ 取值，而对式(5.2.45)则取不同的 $\bar{\lambda}$ 值。

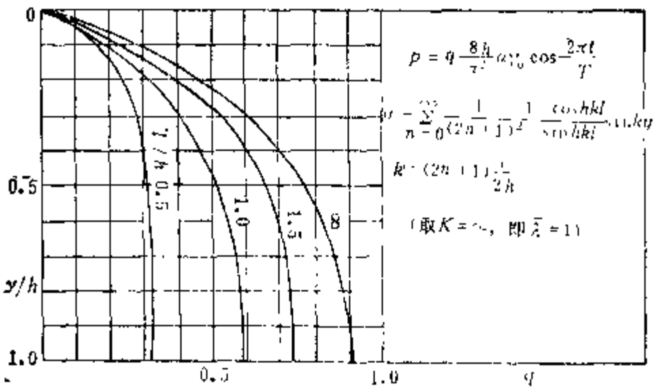


图 5.2.5

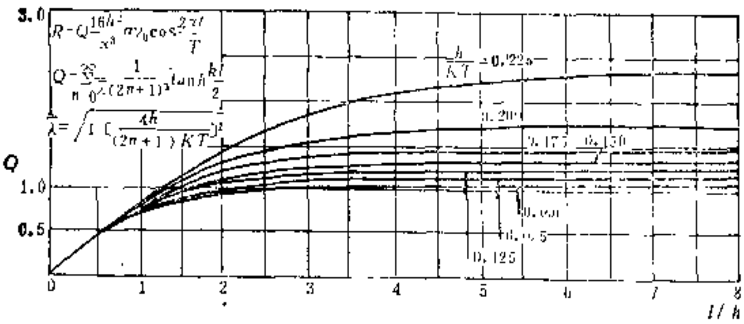


图 5.2.6

四、韦斯特加德解

在 1933 年韦斯特加德曾研究了在水平简谐振动加速度 $\alpha g\cos(2\pi t)/T$ 作用下刚性坝面上产生的动水压力的计算问题。他的基本假定为上游面水库为无限长，水为理想液体，振动是所谓小扰动情况(图 5.2.7)。但在计算中考虑了水体的可压缩性影响。所需求解的方程仍为式(5.2.4)

在上述定解问题中，所需满足的边界条件为

$$\text{当 } y=0 \text{ 时，} \qquad p=0; \qquad (5.2.46)$$

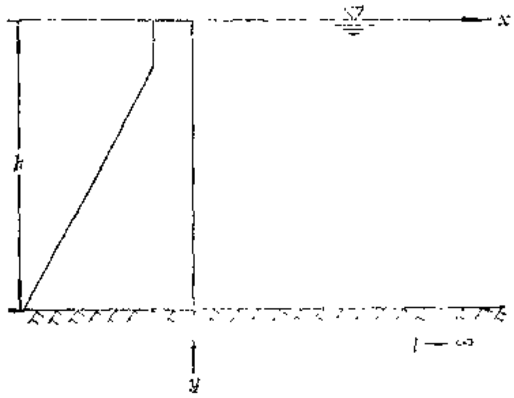


图 5.2.7

$$\text{当 } y=h \text{ 时,}\quad \frac{\partial p}{\partial y}=0\text{, 或 }\eta=0\text{;} \tag{5.2.47}$$

$$\text{当 } x=0 \text{ 时,}\ \frac{\partial p}{\partial x}=-\alpha\gamma_0\cos\omega t\text{;}$$

$$\text{或 }\xi=\frac{\alpha g T^2}{4\pi^2}\cos\omega t\text{;} \tag{5.2.48}$$

$$\text{当 } x\to\infty \text{ 时,}\ p=0\text{, 或 }\xi=0\text{.} \tag{5.2.49}$$

所求得的解为

$$p(x,y,t)=\frac{8\alpha\gamma_0 h}{\pi^2}\cos\omega t\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n^2c_n}e^{-q_n x}\sin\frac{n\pi}{2h}y, \tag{5.2.50}$$

$$\xi(x,y,t)=-\frac{\alpha g T^2}{\pi^3}\cos\omega t\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-q_n x}\sin\frac{n\pi}{2h}y, \tag{5.2.51}$$

$$\eta(x,y,t)=-\frac{\alpha g T^2}{\pi^3}\cos\omega t\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{nc_n}e^{-q_n x}\cos\frac{n\pi}{2h}y. \tag{5.2.52}$$

式中

$$q_n=\frac{n\pi c_n}{2h}, \tag{5.2.53}$$

$$c_n=\sqrt{1-\frac{16h^2}{\pi^2T^2K^2}} \tag{5.2.54}$$

前面已经介绍了矩形水库当一端壁运动而另一端壁固定及两端壁同时运动情况下的动水压力求解问题。不难看出，韦斯特加德解仅仅是我们前面所得结果的特殊情况。从式(5.2.23)可以看出，例如对于 $x=0$ 的端壁，当 $l\to\infty$ 时有

$$\lim_{l\to\infty}\frac{\cosh kl}{\sinh kl}=1. \tag{5.2.55}$$

因此，式(5.2.23)和式(5.2.50)完全等同。

在一般情况下，式(5.2.50)亦可以改写为

$$p(x,y,t)=\frac{8\alpha\gamma_0 h}{\pi^2}\cos\frac{2\pi t}{T}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n^2c_n}\times$$

$$\times\left(\cosh\frac{n\pi}{2h}c_nx-\sinh\frac{n\pi}{2h}c_nx\right)\sin\frac{n\pi}{2h}y. \tag{5.2.56}$$

当注意到式(5.2.55)和式(5.2.26)后，在 $l\to\infty$ 时，式(5.2.23)亦可以表示为

$$p(x,y,t)=\frac{8\alpha\gamma_0 h}{\pi^2}\cos\frac{2\pi t}{T}\sum_{n=0,1,2}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2c_n}\times$$

$$\times\left(\cosh\frac{(2n+1)\pi}{2h}c_nx-\sinh\frac{(2n+1)\pi}{2h}c_nx\right)\times$$

$$\times\sin\frac{(2n+1)\pi}{2h}y. \tag{5.2.57}$$

由此可见，式(5.2.56)和式(5.2.57)是完全相同的。所以韦斯特加德解仅是我们所研究的情况二或三的特殊情况。对其余的待求量亦不难作同样的验证。

韦斯特加德在对压力分布曲线作为近似的抛物线分布后导得的实用近似计算公式为

$$p=\frac{7}{8}k_c\gamma_0\sqrt{h_0y}. \tag{5.2.58}$$

这个公式虽然十分古老，但是它至今仍为许多国家的坝工抗震设计规范所沿用。例如日本的设计规范仍采用式(5.2.58)，印度则采用 $c\gamma_0k_ch_0$，苏联采用 $Dk_c\gamma_0h_0$，我国采用 $f_yk_c\gamma_0h_0$*。这些公式除了分布系数稍有不同外，形式上几乎完全相似，表 5.2.1 列出了各国规范中的动水压力值。

表 5.2.1　　各国规范中的动水压力值

国家(或人)名	压力强度	总压力	备注
日本	$\frac{7}{8}k_c\gamma_0\sqrt{h_0y}$	$0.584\,k_c\gamma_0h_0^2$	
印度	$Ck_c\gamma_0h_0$	$0.533\,k_c\gamma_0h_0^2$	刚性坝面 D为分布系数
苏联	$Dk_c\gamma_0h_0$	$0.543\,k_c\gamma_0h_0^2$	弯曲振动 坝[illegible]放大四倍
		$0.812\,k_c\gamma_0h_0^2$	
韦斯特加德		$0.542\,k_c\gamma_0h_0^2$	
保加利亚	$\frac{7}{8}k_c\gamma_0\sqrt{h_0y}$	$0.584\,k_c\gamma_0h_0^2$	水深 100 米
	$k_c\gamma_0\left[1-3.38\left(\frac{h_0}{1000}\right)^2\right]$	$0.590\,k_c\gamma_0h_0^2$	水深 50 米
中国	$k_c\gamma_0f_yh_0$	$0.640\,k_c\gamma_0h_0^2$	f_y 为分布系数

表中　h_0 为水的深度；k_c 为地震系数；γ_0 为水的单位体积重量。

---

* 大连工学院、水电部水工建筑抗震设计规范编制组，水工建筑物地震动水压力，1975 年 8 月。

第三节　水平地震时作用于刚性坝面的动水压力

一、简述

这一节将要研究当水平地震时作用于刚性坝面的动水压力问题。如所周知，地震时对坝体的影响分析，要求同时考虑坝体-库水体系的动力反应。但是，由于精确动力分析的实际困难，截至 1967 年以前[6,7]，研究工作大多只论及两个非耦联问题：① 忽略动水压力的地震反应，② 作用于刚性坝面的地震动水压力。假使相互作用影响是很小的，则由这两个独立的解，可以组合成坝体的总反应。

从式(5.2.23)可以看出，作用在坝面的动水压力和所作用的地面运动加速度是成正比的。这无疑等效于在坝面上作用了和坝体一起运动的附加质量所产生惯性力。该质量的大小将和谐振频率有关。通过对以往地震的富氏谱分析，证明实际地震波将在相当宽广的频段范围内有其重要分量。因此，采用和某个频率所相应的附加质量的概念，将不可能满意地描述地震动水压力。所以式(5.2.23)、(5.2.42)和(5.2.56)只适用于谐波周期远大于水库的基本周期的特殊情况。

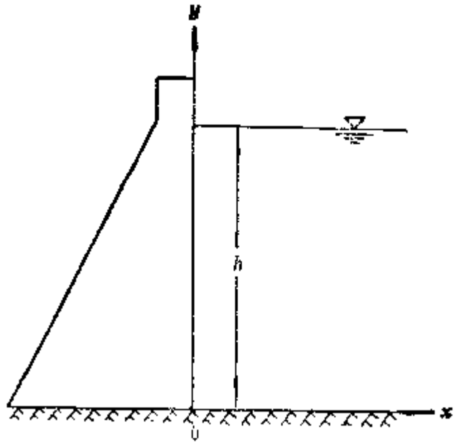


图 5.3.1

二、运动方程

现考虑一具有竖立上游面的刚性坝体（见图 5.3.1），仍假定水库上游方向为无限远，并忽略表面波的影响。所需满足的方程为

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\frac{1}{K^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}, \qquad (5.3.1)$$

式中　$\Phi(x,y,t)$ 为速度势函数，它在我们前面第三章求解液动压力时曾广为应用。应当说明，水体满足式(5.3.1)和满足式(5.2.4)是等价的。此外，速势 $\Phi(x,y,t)$ 还存在着如下关系

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \qquad (5.3.2)$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=-\frac{\partial\Phi}{\partial y}. \qquad (5.3.3)$$

式中　ξ，η 为水体在 x、y 方向的位移分量。动水压力为

$$P(x,y,t)=-\frac{\gamma_0}{g}\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \qquad (5.3.4)$$

相应的边界条件和初始条件为

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,0,t)=0, \qquad (5.3.5)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}(x,H,t)=0, \qquad (5.3.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)(0,y,t)=\ddot{a}g, \qquad (5.3.7)$$

$$\Phi(\infty,y,t)=0. \qquad (5.3.8)$$

当地震作用开始时，考虑水库为静止状态，故初始条件为

$$\left.\begin{aligned}&\Phi(x,y,0)=0,\\&\frac{\partial\Phi}{\partial t}(x,y,0)=0.\end{aligned}\right\}\tag{5.3.9}$$

求解式 (5.3.1) 在地震作用下最为合适的方法是采用复数频率反应并应用富氏积分；或采用单位脉冲反应并结合褶积积分。当然，这两种方法在数学关系上是互为富里叶变换，因而是异途同归的。在地震作用下后一种方法是大量采用的，但是在这里，我们将采用复数频率反应法，因为它提供了能和前面所介绍的韦斯特加德解的直接比较。

三、复数频率反应

如所周知，对于线性体系的一个基本性质，若外部扰动为稳态的简谐振动时，其反应也是同一频率的稳态谐振反应。反应的幅值和相位通常取决于扰动频率和系统的性质，且常用复数频率反应$H(\omega)$来描述幅频关系。并且有这样的性质，当扰动为 $e^{i\omega t}$ 的实数部分时，则反应亦为$H(\omega)e^{i\omega t}$的实数部分；若扰动为虚数部分时，则反应亦为其对应的虚数部分。

现令

$$\ddot{u}_g(t)=e^{i\omega t},\tag{5.3.10}$$

则式(5.3.1)的解可表示为

$$\Phi(x,y,t)=H_\Phi^x(x,y,\omega)e^{i\omega t}.\tag{5.3.11}$$

式中 $H_\Phi^x(x,y,\omega)$表示Φ的 x 向地面运动的复数频率反应。采用和上面相同的变量分离法，经过一系列运算后，求得

$$H_\Phi^x(x,y,\omega)=-\frac{4}{i\omega\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\sqrt{\lambda_n^2-\frac{\omega^2}{K^2}}}e^{-k_n x}\cos\lambda_n y,\tag{5.3.12}$$

$$\Phi(x,y,t)=-\frac{4}{i\omega\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\sqrt{\lambda_n^2-\frac{\omega^2}{K^2}}}e^{-k_n x}\cos\lambda_n y e^{i\omega t}.\tag{5.3.13}$$

$$p(x,y,t)=H_p^x(x,y,\omega)e^{i\omega t},\tag{5.3.14}$$

式中

$$\lambda_n=\frac{(2n-1)\pi}{2H}.$$

根据式 (5.3.4)、(5.3.11) 和 (5.3.12) 可以得到

$$H_p^x(x,y,\omega)=\frac{4\gamma_0}{\pi g}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\sqrt{\lambda_n^2-\frac{\omega^2}{K^2}}}e^{-\sqrt{\lambda_n^2-\frac{\omega^2}{K^2}}x}\cos\lambda_n y.\tag{5.3.15}$$

由式(5.3.15)可见，一般说来H_p^x为复数值函数，水库的自振圆频率为

$$\omega_n=\frac{(2n-1)\pi K}{2H}=\frac{2\pi}{T_n},(n=1,2,3,\cdots)\tag{5.3.16}$$

式中 T_n为相应的水库自振周期。

四、与韦斯特加德结果的比较

韦斯特加德所得到的结果为坝体在地面运动加速度 $\ddot{u}_g(t)=\alpha g\cos\omega t$ 作用下的动水压力值，在本章采用的符号下，其式可表示为

$$p^x(0,y,t)=\frac{-4\alpha\gamma_0}{\pi}\cos\omega t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\sqrt{\lambda_n^2-\frac{\omega^2}{K^2}}}\cos\lambda_n y. \quad (5.3.17)$$

根据式(5.3.14)和(5.3.15)取其实数部分，并乘以 αg，则同一扰动的压力反应为

$$p^x(0,y,t)=\frac{-4\alpha\gamma_0}{\pi}\Big[\sin\omega t\sum_{n=1}^{n_1-1}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\sqrt{\frac{\omega^2}{K^2}-\lambda_n^2}}\cos\lambda_n y+$$

$$+\cos\omega t\sum_{n=n_1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\sqrt{\lambda_n^2-\frac{\omega^2}{K^2}}}\cos\lambda_n y\Big] \quad (5.3.18)$$

上式中的 n_1，为使 $\lambda_n^2>\omega^2/K^2$ 时的最小值，若 $n_1=1$，即 $\lambda_1^2>\omega^2/K^2$ 或是 $\omega_1>\omega$，则式(5.3.18)中所包含的 $\sin\omega t$ 项将不复存在。这种事实说明，我们在第二节所导得的结果以及韦斯特加德解，仅适用于扰动频率小于坝-库体系的基本频率的情况。十分明显，当$\omega>\omega_1$ 时，$\sin\omega t$ 项不能消失，而是代表反应的一部分，并且它又和扰动加速度的相位是不同的。这时，动水压力就不能用附加质量代替。

五、单位脉冲反应

在第二章中，我们已经扼要地介绍了体系的单位脉冲反应，并指出可以利用它作为计算任意地震波作用时体系反应的基础。体系对扰动加速度 $\ddot{u}_g(t)=\delta(t)$ 的反应，称为单位脉冲反应，$\delta(t)$ 称为狄拉克函数。复数频率反应是单位脉冲反应的富氏转换式[8]。代表单位脉冲反应的富氏积分表达式为

$$h_p^x(x,y,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H_p^x(x,y,\omega)e^{i\omega t}d\omega, \quad (5.3.19)$$

利用式(5.3.15)与积分转换表可得

$$h_p^x(x,y,t)=\begin{cases}0; & \text{当 } t<\frac{x}{K}\text{时}\\ \frac{4\gamma_0K}{\pi g}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}J_0\left(\lambda_n\sqrt{(Kt)^2-x^2}\right)\cos\lambda_n y. & \text{当 } t>\frac{x}{K}\text{时}\end{cases} \quad (5.3.20)$$

式中 J_0 为第一类零阶贝塞尔函数。在坝面上的单位脉冲反应为

$$h_p^x(0,y,t)=\frac{4\gamma_0K}{\pi g}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}J_0(\lambda_nKt)\cos\lambda_n y. \quad \text{当 } t>0\text{ 时}$$

(5.3.21)

从式(5.3.21)及 J_0 的性质可以看出，虽然当水体考虑为理想的流体后，不存在阻尼而使能量耗散的机制，但单位脉冲反应仍将随时间衰减。

六、任意地面运动反应

假使作用于坝体的为任意地面运动 $\ddot{u}_g(t)$ 时，则作用在坝面上的动水压力可由叠加单位脉冲反应或由褶积积分求得[5]。

$$p^x(0,y,t)=\frac{4\gamma_0K}{\pi g}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}\cos\lambda_n y\int_0^t\ddot{u}_g(\tau)J_0\{\lambda_nK(t-\tau)\}d\tau. \quad (5.3.22)$$

对式(5.3.15)的 y 从 0 到 H 进行积分，就得到坝体侧向力的复数频率反应为

$$\frac{H_F^x(\omega)}{F_0}=\frac{32}{\pi^3 g}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2\sqrt{(2n-1)^2-\Omega^2}},\tag{5.3.23}$$

式中 $F_0=\gamma_0 H^2/2$ 为作用在坝面静水压力的合力；$\Omega=\omega/\omega_1$，$\omega_1=\pi K/2H$。

图 5.3.2 给出了式(5.3.23)的规一化后的总侧力随 Ω 的变化情形。图中表示的是 $H_F^x/F_0\cdot g$。

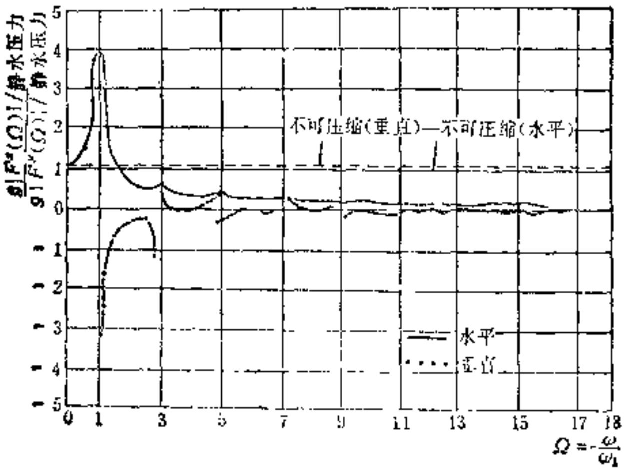


图 5.3.2

由图可见：

（一）当 Ω 接近于1,3,5,···时，侧向力骤然增大（相应于水库自振频率值），亦即此时达到共振，共振对于低值的 Ω 来说是十分明显的。但当 Ω 接近于5,7,9,···时，反应已增加很少。

（二）随着 Ω 的增大，反应将趋于减小。

（三）若水体作为不可压缩流体，即 $K\to\infty$ 时，则反应可以从式(5.3.23)取极值，此极值为

$$\frac{H_F^x(\omega)}{F_0}=\frac{32}{\pi^3 g}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}.\tag{5.3.24}$$

此时，作用在坝上的侧向力频率反应，就和扰动频率 ω 无关。式(5.3.24)也适用于当 $\omega\to 0$ 时可压缩性流体的解。

假使不考虑流体的可压缩性，相应的解用图上的水平线表示，说明它们和频率是无关的。从图上还可以看到不可压缩性流体的假定，在接近水库的自振频率时，反应没有放大，这显然改变了反应的动力特性。可以断言：在这种频率的区段时，会导致相当大的误差。此外，当采用不可压缩性假定后所得到的解，也不能阐明当 Ω 愈来愈大时反应的衰减。地震波是由频段分布很宽的诸谐波所组成，但是反应的主要贡献，为接近第一、第二自振频率时的谐波。因此，不可压缩性假定在某些特定的水库条件下，将对地震动水压力产生相当的误差。至于误差的大小，当然应根据实际地震记录和在压力的时程反应基础上加以讨论。

由复数频率反应 $H_F^x(\omega)$ 直接在频域内积分，即可得到侧向力 $F^x(t)$ 在任意地震作用下的反应

$$\frac{F^x(t)}{F_0}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A_g(\omega)H_F^x(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \tag{5.3.25}$$

式中

$$A_g(\omega)=\int_{t=-\infty}^{\infty}\ddot{u}'_g(t)e^{-i\omega t}dt=\int_0^s\ddot{u}_g(t)e^{-i\omega t}dt. \tag{5.3.25'}$$

$$u'_g=\begin{cases}\ddot{u}_g, & 当\ 0\leqslant t\leqslant s\\ 0, & 当\ t<0\ 和\ t>s\end{cases}$$

式(5.3.25)为 $A_g(t)$ 的富氏变换，s 为地面运动作用的时间。对于不可压缩流体，则 $H_F^x(\omega)$ 和 Ω 无关，故式(5.3.24)成为

$$\frac{F^x(t)}{F_0}=\left\{\frac{32}{\pi^3 g}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\right\}\ddot{u}_g(t)=1.0855\frac{\ddot{u}_g(t)}{g}. \tag{5.3.26}$$

式(5.3.26)表示在任何时间内的反应，可见当水体假定为不可压缩性流体时，其反应仅依赖于瞬时地面运动加速度。故由于任意地面运动时产生的动水压力，可以用附加于刚性坝面上的附加质量代替，即由于加速度所产生的附加质量的惯性力等效于动水压力。但当水体考虑为可压缩性流体时，则由式(5.3.22)可见，反应将依赖于地面运动作用时间的全部时程，因此所产生的动水压力就不能用附加质量代替。

第四节 水平地震时弹性坝体和水库体系的耦联振动

一、单自由度解法

（一）概述

前面，我们较详细地介绍了刚性坝体在简谐运动和地震作用下的动水压力问题。这样求解的一个明显疏忽之处，是忽略了坝体和水库体系相互作用的影响。当然，对于十分刚劲的矮胖结构，按坝体不变形假定(刚性坝面)所求得的动水压力，其误差是不大的。但是，对于高耸的重力坝、支墩坝以及拱坝等，若不考虑坝体变形的影响，那是不能允许的。不过，考虑了弹性变形的影响后，会使计算复杂得多。因为，这时问题就变成了耦联振动。但是，这个问题的求解将是十分繁复的。许多研究者致力于寻求既要保证精度又要简便易行的近似解。如果事先我们能预告结构受力后的变形形状，那么将会使问题的求解带来莫大的方便，而单自由度解法正可使我们求得问题的近似解。

为了以后叙述的方便，我们要用到广义坐标的概念。它在地震工程的文献中是广为应用的。为使读者对它有一较清晰的认识，我们将先对它作一概略性的介绍。

（二）广义坐标系统

在一般情况下，用虚位移原理来建立与广义坐标相联系的力的平衡关系，通常是比较方便的[9]。现在，用图 5.4.1 的重力坝作为实

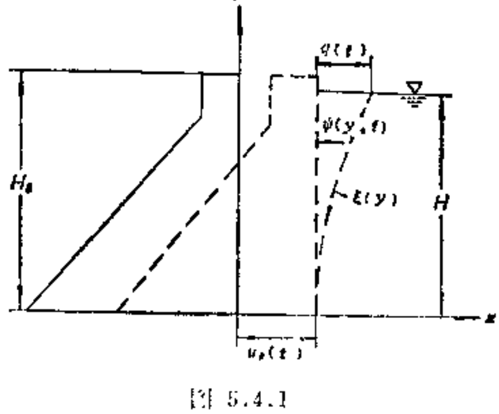


图 5.4.1

例，来说明用虚功原理建立起它的运动方程 根据这个原理，假若外加载荷在虚位移过程中所作的功，等于运动中抵抗力所作的功，那末，对应于虚位移的那些力就处于平衡状态。不失一般性，我们可以假设图 5.4.1 的重力坝为一悬臂的弯曲梁，具有任意的单位长度质量 $m(y)$和任意的弯曲刚度 $EI(y)$（若要考虑剪切、转动惯量等影响，其原理完全一样），承受一般的分布载荷 $P(y,t)$。

对于该系统进行"单"自由度分析时，首先必须以下列广义坐标和形状函数来近似地表示它的变位

$$\psi(y,t)=q(t)\xi(y), \tag{5.4.1}$$

式中，广义坐标 $q(t)$取为结构顶端的位移是方便的，$\xi(y)$是描述图 5.4.1 所示结构的假设的形状函数。在运动过程中，系统所产生的抗力可表示如下：

$$\left.\begin{aligned}
&\text{惯性力}\quad f(y,t)=m(y)\ddot{\psi}(y,t)=m(y)\ddot{q}(t)\xi(y),\\
&\text{弹性力矩}\quad M(y,t)=EI(y)\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=EI(y)q(t)\frac{d^2\xi(y)}{dy^2},\\
&\text{阻尼力}\quad f_c(y,t)=c\dot{\psi}(y,t)=c\dot{q}(t)\xi(y).
\end{aligned}\right\} \tag{5.4.2}$$

应用与广义坐标相对应的虚位移，使外部和内部的力所作的功相等，便可以得到系统的运动方程式。虚位移可表示为

$$\delta\psi(y,t)=\xi(y)\delta q(t) \tag{5.4.3}$$

那么在此位移过程中，外力所作的功为

$$\delta W_E=\int_0^H P(y,t)\delta\psi(y,t)dy=\delta q\int_0^H P(y,t)\xi(y)dy, \tag{5.4.4}$$

而惯性力、弹性力和阻尼力对系统所作的内功为

$$\delta W_I=\int_0^H f(y,t)\delta\psi(y,t)\,dy+\int_0^H M(y,t)\,\delta\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}dy+ +\int_0^H f_c(y,t)\delta\psi(y,t)dy \tag{5.4.5}$$

把式(5.4.2)代入式(5.4.5)，即得

$$\delta W_I=\ddot{q}\delta q\int_0^H m(y)[\xi(y)]^2dy+q\delta q\int_0^H EI(y)\left(\frac{d^2\xi}{dy^2}\right)^2dy+ +\dot{q}\delta q\int_0^H c[\xi(y)]^2dy, \tag{5.4.6}$$

使外功和内功相等，并除以任意的虚位移 δq，便得到下式：

$$\ddot{q}\int_0^H m(y)[\xi(y)]^2dy+\dot{q}c\int_0^H[\xi(y)]^2dy+ +q\int_0^H EI(y)\left[\frac{d^2\xi}{dy^2}\right]^2dy=\int_0^H P(y,t)\xi(y)dy. \tag{5.4.7}$$

最后引入下面广义性质的定义：

$$\left.\begin{aligned}
&\text{广义质量}\quad M^*=\int_0^H m(y)[\xi(y)]^2dy,\\
&\text{广义刚度}\quad K^*=\int_0^H EI(y)\left[\frac{d^2\xi}{dy^2}\right]^2dy,\\
&\text{广义阻尼系数}\quad c^*=\int_0^H c[\xi(y)]^2dy,\\
&\text{广义力}\quad P^*(t)=\int_0^H P(y,t)\xi(y)dy.
\end{aligned}\right\} \tag{5.4.8}$$

这样，得到广义坐标的运动方程为

$$\ddot{q}+2\zeta\omega^*\dot{q}+\omega^{2*}q=\frac{P^*(t)}{M^*}, \tag{5.4.9}$$

式中

$$\zeta=\frac{c^*}{2M^*\omega^*},\quad \omega^*=\left(\frac{K^*}{M^*}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

式(5.4.9)是当荷载直接作用到结构上的情况。如果结构受到地震作用时，则应求出等效的惯性力，此惯性力为

$$f_I(y)=m(y)\ddot{u}_t(y).$$

但注意到总加速度应等于地面运动加速度加上相对运动加速度，即

$$\ddot{u}_t(y)=\ddot{u}_g(t)+\ddot{u}(y)=\ddot{u}_g(t)+\ddot{q}\xi(y) \tag{5.4.10}$$

这样，和惯性力相应的内部虚功为

$$\delta\overline{W}_I=\ddot{q}\delta q\int_0^H m(y)[\xi(y)]^2dy+\ddot{u}_g\delta q\int_0^H m(y)\xi(y)dy. \tag{5.4.11}$$

上式第二项代表等效力所作的功，故等效广义力可以表示为

$$P^*_{eff}(t)=-\ddot{u}_g(t)\int_0^H m(y)\xi(y)dy=-\ddot{u}_g(t)A, \tag{5.4.12}$$

式中

$$A=\int_0^H m(y)\xi(y)dy. \tag{5.4.13}$$

和式(5.4.9)相似，可以得到

$$\ddot{q}+2\zeta\omega^*\dot{q}+\omega^{*2}q=\frac{P^*_{eff}}{M^*}. \tag{5.4.14}$$

这就是受到地震作用时单自由度广义系统运动方程。

（三）谐波（复频）反应

乔波拉[10]曾根据上述原理，分析了重力坝在四种不同情况下的位移和动水压力反应。

1．空库坝

当作用地面运动加速度为 $\ddot{u}_g(t)$时，空库坝的变形为

$$\psi_s(y,t)=q_s(t)\xi(y). \tag{5.4.15}$$

仿照式(5.4.14)，则运动方程可表示为

$$M^*\ddot{q}_s+c^*\dot{q}_s+K^*q_s=-A\ddot{u}_g(t). \tag{5.4.16}$$

上式中的 M^*,c^*,K^* 和 A 的定义同前。但 ω^* 应代以坝的空库自振圆频率 ω_s，

$$\omega_s^2=\frac{M^*}{K^*}. \tag{5.4.17}$$

设坝体对谐波地面运动加速度 $\ddot{u}_g(t)=e^{i\omega t}$ 的定常反应有如下形式：

$$q_s=H_{q_s}(\omega)e^{i\omega t}. \tag{5.4.18}$$

其中 $H_{q_s}(\omega)$是 q_s 的复数频率反应函数。将式(5.4.18)代入(5.4.16)，并消去两端的 $e^{i\omega t}$，则得到

$$H_{q_s}(\omega)=\frac{-A}{-\omega^2M^*+i\omega c^*+K^*}. \tag{5.4.19}$$

式(5.4.19)是坝体位移的复数频率反应函数。

2．忽略相互作用的坝-库系统

这种情况相当于弹性坝体受到地面运动加速度 $\ddot{a}_g(t)$和动水压力 $P_1(y,t)$的作用。而动水压力 $P_1(y,t)$是在刚性坝面的假设下，由解库水的二维波动方程求得。如果坝体的位移反应为

$$\psi_u(y,t)=q_u\xi(y), \tag{5.4.20}$$

则运动方程为

$$M^*\ddot{q}_u+c^*\dot{q}_u+K^*q_u=-A\ddot{a}_g(t)-\int_0^H P_1(y,t)\xi(y)dy. \tag{5.4.21}$$

考虑到谐波地面运动加速度 $\ddot{a}_g=e^{i\omega t}$，故刚性坝面产生的动水压力为

$$P_1(y,t)=H_{P_1}(y,\omega)e^{i\omega t}. \tag{5.4.22}$$

式中动水压力的复数反应函数为

$$H_{P_1}(y,\omega)=\frac{2\gamma_0}{gH}\sum_{n=1,2}^{\infty}\frac{I_{1n}}{\sqrt{\lambda_n^2-\frac{\omega^2}{K^2}}}\cos\lambda_n y. \tag{5.4.23}$$

为了以后计算的方便，引入如下符号

$$I_{mn}=\int_0^H f_m(y)\cos\lambda_n y dy, \tag{5.4.24}$$

$$f_1(y)=1,\ f_2(y)=\xi(y),$$

$$\lambda_n=\frac{(2n-1)\pi}{2H}. \tag{5.4.25}$$

坝体的定常反应为

$$q_u=H_{q_u}(\omega)e^{i\omega t}. \tag{5.4.26}$$

将式(5.4.26)代入(5.4.21)，两边消去 $e^{i\omega t}$后，得到

$$H_{q_u}(\omega)=\frac{A+B_1(\omega)}{-\omega^2M^*+i\omega c^*+K^*}. \tag{5.4.27}$$

式中

$$B_1(\omega)=\int_0^H H_{P_1}(\omega)\xi(y)dy. \tag{5.4.28}$$

坝面上的侧向动水压力为 $F_u(t)$，将式(5.4.22)沿坝高 0—H 积分，即可求得

$$F_u=H_{F_u}(\omega)e^{i\omega t}. \tag{5.4.29}$$

式中

$$H_{F_u}(\omega)=\int_0^H H_{P_1}(\omega)dy=\frac{2\gamma_0}{gH}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(I_{1n})^2}{\sqrt{\lambda_n^2-\frac{\omega^2}{k^2}}}. \tag{5.4.30}$$

这样，式(5.4.27)和式(5.4.30)，给出了忽略相互作用影响后坝体位移和侧向合力的复数频率反应。

3. 考虑相互作用的坝-库系统

当考虑库水和坝体的相互作用时，坝的变形表示为

$$\psi_c(y,t)=q_c(t)\xi(y). \tag{5.4.31}$$

而坝体上游面的动水压力表示为 $P_c(y,t)$，故坝的运动方程就可表示为

$$M^*\ddot{q}_c+c^*\dot{q}_c+K^*q_c=-A\ddot{a}_g(t)-\int_0^H P_c(y,t)\xi(y)dy. \tag{5.4.32}$$

对谐波地面运动加速度 $\ddot{a}_g(t)=e^{i\omega t}$ 的反应有

$$\left.\begin{aligned} q_c&=H_{q_c}(\omega)e^{i\omega t},\\ p_c&=H_{p_c}(y,\omega)e^{i\omega t}.\end{aligned}\right\} \tag{5.4.33}$$

式中 $H_{q_c}(\omega)$和 $H_{p_c}(y,\omega)$分别为坝体的位移和动水压力的复频反应。这两个函数显然存在着下列关系：

$$H_{p_c}(y,\omega)=H_{p_1}(y,\omega)-\omega^2H_{q_c}(\omega)H_{p_2}(y,\omega). \tag{5.4.34}$$

式中 $H_{p_1}(y,\omega)$ 由式（5.4.23）给出，$H_{p_2}(y,\omega)$ 为弹性变形动水压力，由于已知变形形状为 $\xi(y)$，所以它的求导可以仿照式（5.4.23）求得。结合式（5.4.25）可表示为

$$H_{p_2}(y,\omega)=\frac{2\gamma_0}{gH}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_{2n}}{\sqrt{\lambda_n^2-\dfrac{\omega^2}{K^2}}}\cos\lambda_n y. \tag{5.4.35}$$

将式（5.4.33）、(5.4.34）代入式（5.4.32）得到

$$H_{q_c}(\omega)=\frac{A+B_1(\omega)}{-\omega^2\{M^*+\mathrm{Re}[B_2(\omega)]\}+i\omega\{c^*-\mathrm{Im}\omega[B_2(\omega)]\}+k^*} \tag{5.4.36}$$

$$B_2(\omega)=\int_0^H H_{p_2}(y,\omega)\,\xi(y)\,dy. \tag{5.4.37}$$

上式中 $\mathrm{Re}[B_2(\omega)]$ 和 $\mathrm{Im}[B_2(\omega)]$ 分别代表 $B_2(\omega)$ 的实部和虚部。将式（5.4.23）代入式（5.4.28），式（5.4.35）代入式（5.4.37），并利用式（5.4.24）所采用的表示，则得

$$B_m(\omega)=\frac{2\gamma_0}{gH}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_{mn}I_{2n}}{\sqrt{\lambda_n^2-\dfrac{\omega^2}{K^2}}},\quad m=1,2. \tag{5.4.38}$$

式（5.4.36）给出了考虑坝体和库水相互作用后坝体位移的复数频率反应。比较式(5.4.27）和（5.4.36），可以明显看出，由于附加质量的影响，相互作用将导至坝体频率的降低。作用在坝上的动水压力的合力 $F_c(t)$，可由式（5.4.33）、(5.4.34）沿库水深度积分得到

$$F_c(t)=H_{F_c}(\omega)e^{i\omega t}, \tag{5.4.39}$$

式中

$$H_{F_c}(\omega)=H_{F_\omega}(\omega)-\omega^2H_{q_c}(\omega)H_{F_2}(\omega), \tag{5.4.40}$$

$H_{F_G}(\omega)$和 $H_{q_c}(\omega)$ 可分别从（5.4.30)和式（5.4.36）给出

$$H_{F_2}(\omega)=\int_0^H H_{p_2}(y,\omega)\,dy=\frac{2\gamma_0}{gH}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_{1n}I_{2n}}{\sqrt{\lambda_n^2-\dfrac{\omega^2}{K^2}}}. \tag{5.4.41}$$

应当指出，当激振频率 $\omega=(2n-1)\pi k/2H$ 时，则 $B_1(\omega)$，$B_2(\omega)$，$H_{F_\omega}(\omega)$和 $H_{F_2}(\omega)$为无穷大，而对于这个 ω 值，反应值$H_{q_c}(\omega)$ 和 $H_{F_c}(\omega)$ 是有限的。这可以应用熟知的罗必塔法则加以证明。

4．忽略水的可压缩性，但考虑坝—库的相互作用

若令坝体的位移反应为

$$\psi_s(y,t)=q_s\xi(y), \tag{5.4.42}$$

那么，仿照上面类似的推导，可得运动方程为

$$[M^*+B_2(\omega)|_{k\to\infty}]\ddot{q}_i+c^*\dot{q}_i+k^*q_i=[A+B_1(\omega)|_{k\to\infty}]\ddot{u}_g(t). \tag{5.4.43}$$

将上式和空库情况的式（5.4.16）相比可以看出，如果忽略了水的压缩性后，库水的作用等价于一个附加质量和一个附加激振项。式（5.4.43）中的自振圆频率为

$$\omega_i=\left[\frac{M^*}{M^*+B_2(\omega)|_{k\to\infty}}\right]^{\frac{1}{2}}\omega_s. \tag{5.4.44}$$

式中 ω_s 为空库坝的自振频率，见式（5.4.17）。q_i 的复数频率反应可直接由式（5.4.43）求得：

$$H_{q_i}(\omega)=-\frac{A+B_1(\omega)_{k\to\infty}}{-\omega^2[M^*+B_2(\omega)|_{k\to\infty}]+i\omega c^*+k^*}. \tag{5.4.45}$$

通过以上分析，已从理论上解决了各种不同情况下的谐波反应。但是，问题还在于如何选取 $\xi(y)$，严格说来 $\xi(y)$ 应是有水振型。但是从第三章和第六章中所介绍的求解有水自振特性的过程可以看到，计算是非常繁复的。因此，在工程应用上，常常用无水振型代替有水振型，这样，就使问题大大简化。一般说来，所带来的误差是不大的。

（四）地震波反应

线性振动系统在任意的地震波 $X(t)$ 作用下的反应 $Y(t)$，可在时间域上进行褶积积分求得：

$$Y(t)=\int_0^t X(\tau)h(t-\tau)d\tau, \tag{5.4.46}$$

或者可以从复数频率反应的富氏积分得到，即

$$Y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)X(\omega)e^{i\omega t}d\omega. \tag{5.4.47}$$

式（5.4.46）、(5.4.47）中的 $h(t)$ 和 $H(\omega)$ 分别是系统的单位脉冲反应和复数频率反应，而 $X(\omega)$ 是 $X(t)$ 的富氏变换

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}X(t)e^{-i\omega t}dt. \tag{5.4.48}$$

式（5.4.47）是反应的富里叶积分变换的映象，即 $Y(t)$ 是

$$Y(\omega)=H(\omega)X(\omega) \tag{5.4.49}$$

的富里哀逆变换。

当用快速富里叶积分代替通常的积分方法时，积分方程（5.4.46）和（5.4.47）的数值计算在时间方面会大大缩短，而计算式（5.4.47）的工作量又大大小于计算式（5.4.46）所需的工作量。步骤是先计算 $X(t)$ 的富里叶变换，利用式（5.4.49）计算 $Y(\omega)$，然后，再计算 $Y(\omega)$ 的富里叶逆变换。

顺便指出：式（5.4.46）和式（5.4.47）中的 $X(t)$，可以是加速度也可以是位移。单位脉冲反应 $h(t)$ 和复数频率反应 $H(\omega)$ 之间互为富里叶变换恒成立。

（五）算例

图 5.4.2 所示的典型混凝土重力坝，所采用的基本物理参数为：

混凝土弹性模量 $E=2.4\times10^5$ 公斤/厘米²；泊松比 $\mu=0.17$；混凝土的容重 $\gamma=2400$ 公斤/米³；水的容重 $\gamma_0=1000$ 公斤/米³；水中声速 $K=1430$ 米/秒；坝高 $H=155$ 米；阻尼比

$\xi_s=0.05$。

利用有限单元法求得该坝的空库第一自振周期 $T_s=0.3$ 秒，水库的第一自振周期 $T=4H/K=0.43$ 秒。比值 $Ts/T=0.7$。相应的库水深度 $H/H_s=0.976$，几乎是满库情况。满库第一自振周期为 0.45 秒。满库的基本振型，按有限元法所得结果用最小二乘法求得其近似表达式为：

$$\xi(y)=0.181\left(\frac{y}{H_s}\right)+0.819\left(\frac{y}{H_s}\right)^2.$$

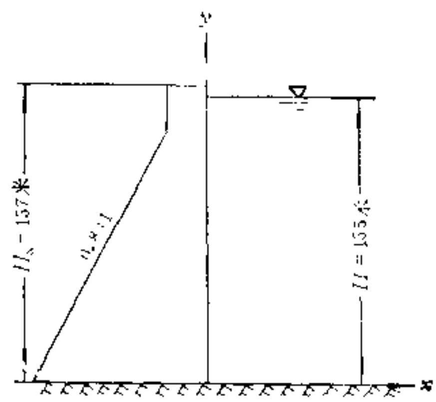


图 5.4.2

上述坝-库系统在 1952 年塔夫特 (Taft) 地震作用下 (图 5.4.3)，其反应 $q_s(t)$、$q_u(t)$、$q_c(t)$、$F_1(t)$ 和 $F_c(t)$ 的完整时程曲线，用前几节所述的方法进行数值积分，分析的结果列于图 5.4.4 和图 5.4.5。

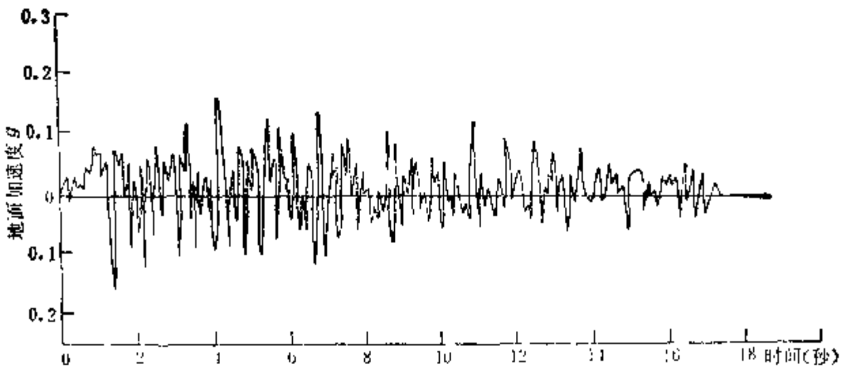


图 5.4.3

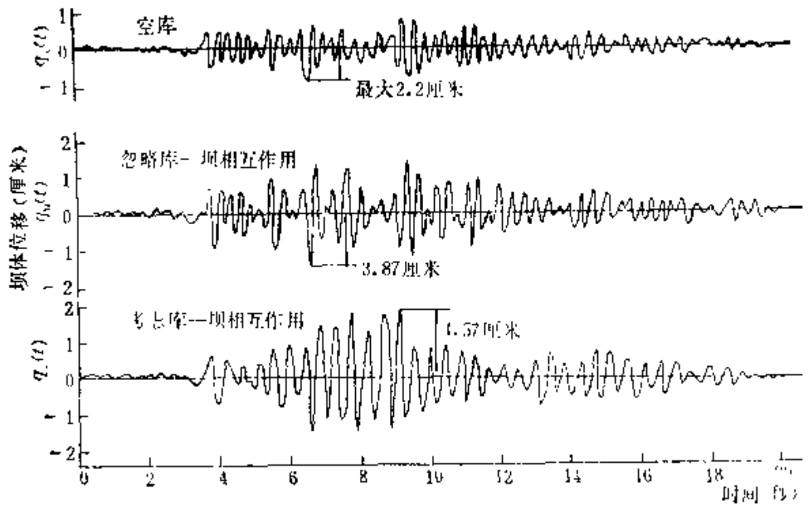


图 5.4.4

坝顶的广义位移反应如图 5.4.4 所示。函数 $q_s(t)$ 是空库坝的位移反应，它的最大值为 2.2 厘米。显然，坝的自振周期就是反应的卓越周期；函数 $q_u(t)$ 是忽略坝体和库水之间相

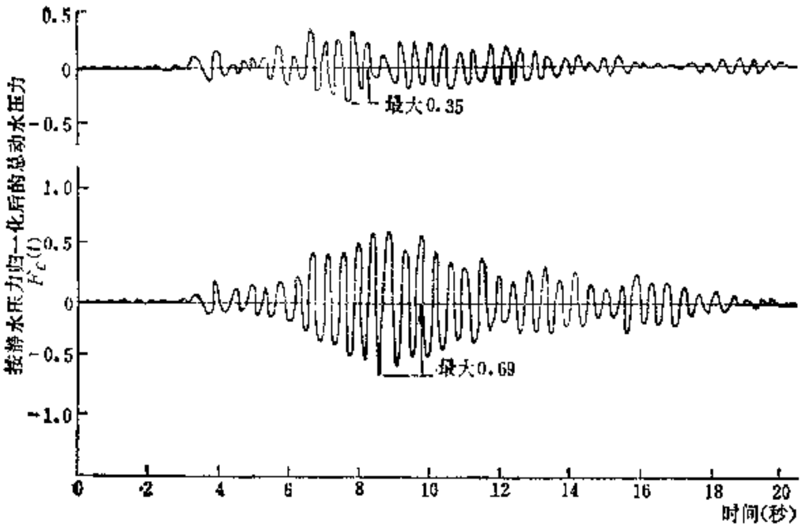


图 5.4.5

互作用影响后的位移反应，其最大值为 3.87 厘米。卓越周期为 0.3 秒；考虑坝体和库水相互作用影响后的反应为 $q_c(t)$，其最大反应为 4.57 厘米，这个反应值对应的卓越周期为 0.45 秒，正是坝-库体系的自振周期。比较 $q_s(t)$ 和 $q_c(t)$ 可以看出，库水对坝体的影响是不容忽视的。

作用于坝体的动水压力的总合力示于图 5.4.5。$F_1(t)$ 是忽略相互作用影响后的总和力(已和静水压力归一化)，它的最大值为 0.35。考虑相互作用影响后的最大值 $F_c(t)$为 0.69。说明相互作用的影响是重要的。

1. q_c 和 q_s 的比较

任何反应过程最具有重要性的是地震时所达到的最大值。对于七个 T_s/T 值及四个 T_s 值时满库反应 q_c 和空库反应 q_s 之比，列于表 5.4.1。由表可见，除了一种情况 ($T_s/T=0.7$，

表 5.4.1　　最大反应 q_c/q_s 之比

$\frac{T_s}{T}$	T_s——秒			
	0.1	0.2	0.3	0.4
0.7	2.31	1.82	2.07	0.98
0.8	1.42	1.60	1.28	1.13
0.9	1.66	1.38	1.30	1.12
1.0	1.36	1.41	1.54	1.7?
1.2	1.22	1.22	1.14	1.23
1.4	1.10	1.11	1.07	1.12
1.6	1.06	1.06	1.04	1.07

$T_s=0.4$) 外，库水的存在均增大了坝体的反应。

2. q_u 和q_c 的比较

比较地震时 q_u 和q_c 的最大值，就是对忽略相互作用所引起误差的简单度量，这个误差列于表 5.4.2。显然，坝体最大位移的误差依赖于 T_s/T 和 T_s 值。误差可正可负，亦即这个

误差表现为无规律的变化，对所研究的情况，最大误差达到46%。T_s/T 越大，即当水库的影响较小时，误差就小。当 $T_s/T>1.2$ 时，误差小于10%。

3．q_j 和 q_c 的比较

比较地震时 q_j 和 q_c 的最大值，就可以作为对忽略水体可压缩性后所产生误差的简单度量。对各种不同水库情况在塔夫特地震作用下的计算结果列于表5.4.3。但是，从这里还不能得到一个普通的规律，因为误差正负交替，但和系统性质有关。对于大的 T_s/T 值的误差就越小，当 $T_s/T\geqslant1.2$ 时，则误差小于10%。

表 5.4.2　　忽略相互作用坝体反应误差%

$\frac{T_s}{T}$	T_s——秒			
	0.1	0.2	0.3	0.4
0.7	−26	−17	−15	46
0.8	1	−15	2	9
0.9	−16	5	6	36
1.0	2	8	−8	−18
1.2	−9	−11	−1	−11
1.4	−5	−4	−1	−5
1.6	−2	−2	0	−3

表 5.4.3　　忽略水体可压缩性坝体反应误差%

$\frac{T_s}{T}$	T_s——秒			
	0.1	0.2	0.3	0.4
0.7	−13	−12	−30	18
0.8	25	5	37	60
0.9	−13	8	17	51
1.0	−1	−3	−19	16
1.2	−4	−5	−4	−6
1.4	−1	−2	−1	−2
1.6	−1	−1	−0.5	1

二、振型分解法

前面几节在介绍动水压力的计算方法中，我们均考虑了水体的可压缩性影响。当考虑水体压缩性影响后，动水压力和扰动加速度之间将发生相位差，因而也就不可能采用振型分解的方法来求解动水压力或地震反应。就作者所知，考虑压缩性影响后弹性结构和液体的耦联振动问题，直至目前为止，尚未完满解决。上面所介绍的预先假定位移按基本振型近似的方法，无疑是有条件的。即对于基本振型占主导地位的结构，这个方法是可行的；但如果高振型的影响也很重要时，这个方法将会带来很大的误差，甚至是不能允许的。然而，可以注意到当不考虑水体的可压缩性影响时，满库情形下所产生的动水压力，等价于一个附加质量和附加的激振项(见式5.4.43)。

日本对藤原坝和田子仓坝所进行的地震动水压力的实际观测表明[11]，动水压力的大小和不考虑可压缩性但考虑坝体的弹性变形的计算结果相近。同时，在塚原、藤原坝的实际观

测中，曾在预计的水库共振频率值的范围内，用不同的激振频率激发坝的振动，观测相应的动水压力的变化，结果并未观测到动水压力的共振峰值及其与惯性力之间的相位差现象。畑野正等曾在钢制水槽内测得了动水压力的峰值，它与计算所得的共振频率相符，但在槽底或侧面铺设细砂后，共振峰就不再出现。可以认为动水压力共振峰的出现，是由于压力波在边界面上往复反射相互迭加的结果， 当在槽底铺设细砂以后， 压力波到达时被吸收而不再反射，因而不再出现共振现象。而天然水库都有淤积，压力波不能完全反射。因而，不少人认为，忽略水体的可压缩性影响是可以允许的。这样一来，我们就可以采用在地震工程中广为应用的振型分解法，并结合标准反应谱的概念求解地震动水压力。此时流速势 ψ 和动水压力P将满足拉普拉斯方程（坐标系见图 5.3.1）和相应的边界条件

$$\nabla^2 p=0，或\nabla^2\psi=0. \tag{5.4.50}$$

所应满足的边界条件为：

$$当\ y=H\ 时，\quad p=-\frac{\gamma_0}{g}\frac{\partial\psi}{\partial t}=0; \tag{1}$$

$$当\ y=0\ 时，\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial y}=0; \tag{2}$$

$$当\ x=0\ 时，\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{\gamma_0}{g}[\ddot{u}_g(t)+\ddot{\xi}(y,t)], \tag{3}$$

或

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=[\dot{u}_g(t)+\dot{\xi}(y,t)];$$

$$当\ x\to\infty 时，p=\psi=0. \tag{4}$$

式中 $\ddot{u}_g(t)$ 为地基所受到的地震加速度，$\ddot{\xi}(y,t)$ 代表坝面给定点的弹性振动加速度。根据问题的线性性质可以将 ψ 或 p 分解成两部分：

$$\left.\begin{aligned}\psi&=\psi_0+\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k,\\ p&=p_0+\sum_{k=1}^{\infty}p_k.\end{aligned}\right\} \tag{5.4.51}$$

这两部分均应满足式（5.4.50）。前一部分满足条件（1）、（2）和（4），并在坝面满足 $\partial p/\partial x=-\frac{\gamma_0}{g}\ddot{u}_g(t)$ 或 $\partial\psi/\partial x=\dot{u}_g(t)$；后一部分满足式（5.4.50）和条件（1）、（2）和（4）. 但在坝面满足条件 $\partial p/\partial x=-\gamma_0/g\ddot{\xi}$ 或 $\partial\psi/\partial x=\dot{\xi}$。式中 $\dot{u}_g$ 和 $\dot{\xi}(y,t)$ 分别代表地面运动速度和坝面的弹性变形速度。和坝面的弹性振动变形相应，p_k 和 ψ_k 分别相应于第 k 振型的振型动水压及振型流速势。如所周知，坝体的弹性变形 $\xi(y,t)$ 可按下式展开：

$$\xi(y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}q_k(t)\xi_k(y), \tag{5.4.52}$$

式中 q_k 为相应于第 k 振型的广义坐标；

$\xi_k(y)$ 为相应于第 k 振型的位移矢量。由此可见，p_k 或 ψ_k 所应满足的方程和边界条件又可进一步表示为

$$\nabla^2 p_k=0，或\nabla^2\psi_k=0. \tag{5.4.50$'$}$$

当 $y=H$ 时，
$$p_k=-\frac{r_0}{g}\frac{\partial\psi_k}{\partial t}=0; \tag{1$'$}$$

$y=0$ 时，
$$\frac{\partial p_k}{\partial y}=\frac{\partial\psi_k}{\partial y}=0; \tag{2$'$}$$

$x=0$ 时，
$$\frac{\partial p_k}{\partial x}=-\frac{r_0}{g}\ddot{q}_k\xi_k; \tag{3$'$}$$

$$\text{或}\frac{\partial\psi_k}{\partial x}=\ddot{q}_k\zeta_k;$$

$$x\to\infty\text{时，}\ p_k=\psi_k=0. \tag{4$'$}$$

式中 $\ddot{q}_k\xi_k(y)$ 代表地震时坝面某点相应于第 k 振型弹性振动加速度。此外，又由于广义坐标 q_k 又可以表示为

$$q_k=\eta_k\delta_k, \tag{5.4.53}$$

式中

δ_k 为单质点振子的位移反应：

$$\delta_k=\frac{1}{\omega'_k}\int_0^t\ddot{u}_g(\tau)e^{-\varepsilon_k\omega_k(t-\tau)}\sin\omega_k(t-\tau)d\tau, \tag{5.4.54}$$

η_k 为满库振型参与系数：

$$\eta_k=\frac{\int_0^H m(y)\xi_k(y)dy+\int_0^H p_k(y)dy}{\int_0^H m(y)\xi_k^2(y)dy+\int_0^H p_k(y)\xi(y)dy}. \tag{5.4.55}$$

ε_k 代表第 k 振型的阻尼比，ω_k 和 ω'_k 分别代表坝体有水时第 k 振型的无阻尼与有阻尼的圆频率。p_k 代表满库时第 k 振型的动水压力。

坝面任一点的绝对加速度，应为地面运动加速度和弹性振动加速度之和[12]：

$$a(y,t)=\ddot{u}_g(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\ddot{q}_k\xi(y)\cong\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k\xi_k(y)a_k(t). \tag{5.4.56}$$

其中

$$a_k(t)=\omega_k'\int_0^t\ddot{u}_g(\tau)e^{-\varepsilon_k\omega_k(t-\tau)}\left\{\sin\omega'_k(t-\tau)+2\varepsilon_k\cos\omega'(t-\tau)\right\}d\tau, \tag{5.4.57}$$

$a_k(t)$称为单质点振子的加速度反应。

求解 p_0 或 ψ_0 将不会有太大困难，而且由于当不考虑水体的可压缩性影响时，动水压力仅依赖于瞬时地面运动加速度。参照式（5.3.15）并置 $k=\infty$，$x=0$ 可得

$$p_0^x(0,y,t)=\frac{8\gamma_0 H}{\pi^2 g}\ddot{u}_g\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\cos\lambda_n y. \tag{5.4.58}$$

为了能和弹性动水压力具有统一的表达形式，上式又可表示为（见 5.4.23）

$$p_0^x(0,y,t)=\frac{4\gamma_0}{\pi g}\ddot{u}_g\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_{1n}}{(2n-1)}\cos\lambda_n y. \tag{5.4.58$'$}$$

侧向动水压力的总合力（按静水压规一化）见式（5.3.26）为

$$\frac{F_0^x(t)}{F_0}=1.0855\frac{\ddot{u}_g}{g}. \tag{5.4.59}$$

地震作用下弹性振动时的振型动水压力，仿照式(5.4.58)′为

$$p_k^x(0,y,t)=\frac{4\gamma_0}{\pi g}\ddot{q}_k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_{2n,k}}{(2n-1)}\cos\lambda_n y, \tag{5.4.60}$$

式中

$$I_{mn,k}=\int_0^H f_m(y)\cos\lambda_n y dy.$$

若 $m=1$，$f_1(y)=1$；$m=2$，$f_2(y)=\xi_k(y)$.将各振型动水压力叠加后，即得总的弹性振动动水压力为

$$p_{弹}^x=\frac{4\gamma_0}{\pi g}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\ddot{q}_k\frac{I_{2n,k}}{(2n-1)}\cos\lambda_n y. \tag{5.4.61}$$

作用于坝面的动水压力的总合力为式（5.4.61）沿坝高积分

$$F^x(0,t)=\int_0^H p_{弹}^x\ dy=\frac{4\gamma_0}{\pi g}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\ddot{q}_k\frac{I_{1n}I_{2n,k}}{(2n-1)}. \tag{5.4.62}$$

若将上式按静水压力 $F_0=\gamma_0H_2/2$ 规一化后，即得

$$\frac{F^x(0,t)}{F_0}=\frac{8}{H^2\pi g}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\ddot{q}_k\frac{I_{1n}I_{2n,k}}{(2n-1)}. \tag{5.4.63}$$

从式（5.4.61）可知，只要我们已经求得了满库情况下振型、频率和振型参与系数等值，则满库情形下的各项反应亦不难求解。但是，从第六章我们可看到，要严格地求解满库自振特性是十分繁复的。作为一种近似，通常用无水振型代替有水振型。这一假定所引起的误差，一般认为是不大的[13]。国外对于某一拱坝所作的模型试验结果表明[14]，在第二振型以上空库和满库振型基本没有多少差别，但是基本振型则有所不同。总之，目前对于这一问题还缺乏足够严格的论证，还有待于今后作进一步的研究。

如设满库振型等于空库振型，则坝体在作自由振动时，满库与空库的最大位能应该互等，据此可以导出满库与空库频率间的关系式为[13]

$$\omega_k^2=\bar{\omega}_k^2\frac{\int_0^H m(y)\xi_k^2(y)dy}{\int_0^H m(y)\xi_k^2(y)dy+\int_0^H p_k\xi_k(y)dy}, \tag{5.4.64}$$

式中 ω_k 代表满库频率，$\bar{\omega}_k$ 代表空库频率，p_k 为第 k 振型的振型动水压力，可使式(5.4.60）中的 $\ddot{q}_k$ 用ω_k^2代替求得。

这样，我们就可以根据式（5.4.55)、(5.4.60)、(5.4.61）等来解地震时弹性振动动水压力，而无需精确求解满库自振特性。从式（5.4.61）可见 $\ddot{q}_k$ 为 q_k 对时间 t 的二次导数，它是一个随地震过程而反复交变的函数。因此，这样求得的动水压力也是随时间变化的函数。

但是，值得注意的是，如果我们无需分别了解刚性动水压力和弹性动水压力，而只对其最大幅值感兴趣，则由式（5.4.56)，再应用式（5.4.61）的类比关系，可求得任意点的动水压力为

$$p(0,y,t)=\frac{4\gamma_0}{\pi g}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k a_k\frac{I_{2n,k}}{(2n-1)}\cos\lambda_n y. \tag{5.4.65}$$

结构上任意点的动水压力和地震力的合力为

$$q(0,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k a_k(t)\left[m(y)\xi_k(y)+\frac{4\gamma_0}{\pi g}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_{2n,k}}{(2n-1)}\cos\lambda_n y\right]. \tag{5.4.66}$$

式（5.4.66）可以求出结构上某点合力的时程反应。

若按标准反应谱理论，$a_k(t)$的最大绝对值为

$$a_k=K_c\beta_k g,$$

式中 K_c为地震系数，β_k为结构的动力放大倍数，则式（5.4.65）可以表达为

$$p(0,y)=K_c g\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k\beta_k S_k. \tag{5.4.65'}$$

式中

$$S_k=\frac{4\gamma_0}{\pi g}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_{2n,k}}{(2n-1)}\cos\lambda_n y.$$

按地震工程中熟知的平方和开方的组合方法，我们可以求得动水压力的最大反应为

$$p_{最大}(0,y)=K_c g\sqrt{\sum_{k=1}^{n}[\eta_k^2\beta_k S_k^2]}. \tag{5.4.67}$$

式（5.4.67）就是按振型分解原理，再结合标准反应谱和弹性振动动水压力的解析式（5.4.35）(但不考虑水的可压缩性)所导得的地震作用下的动水压力。

动水压力一经求得，结构的其余反应就不难仿无水情况求出。这里就不再赘述。

三、有限单元法

目前，在对连续体结构进行离散化的计算方法中，以有限单元方法应用最广泛，这主要是由于有限单元法具有方便、灵活、表达统一和适应性强的优点，特别是能极其方便地处理材料非均质、非线性和方便地表达边界条件。因此它十分成功地应用于土木建筑、造船、航空和机械等各种结构和部件的应力分析。结合现代电子计算机技术，有限单元法更显示了它强大的生命力。此外，有限单元法在诸如流体力学和热传导等领域内也获得了愈来愈广泛的应用。在这一节里我们准备介绍它在求解动水压力方面的具体应用。如前所述，当流体由于地震波的作用而受到扰动后，流场内任一点的压力或流速势均应服从二维或三维的波动方程。如果不考虑水体的可压缩性影响，则服从二维或三维的拉普拉斯方程。这里，为了叙述方便，我们仍然认为水体是不可压缩的，对混凝土重力坝情况，流体必须服从二维拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=0. \tag{5.4.68}$$

在流体的边界面上或者压力 p 是已知的（例如在流体表面上 $p=0$），或者和以某种规律运动的界面相接触（如水与坝体、容器等的接触面），这时边界条件可表示为

$$\frac{\partial p}{\partial n}=-\frac{\gamma_0}{g}\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}=-\frac{\gamma_0}{g}\ddot{a}_n, \tag{5.4.69}$$

式中 u_n 是边界位移的法向分量，n 是界面的法线，其正向指向流体外部。$\ddot{u}_n$ 是加速度分量。求解式（5.4.68）也可以采用变分解法[16]。与其相对应的泛函为

$$\chi=\iint_R \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2\right]dxdy. \tag{5.4.70}$$

当问题具有如式（5.4.69）形式的边界条件时，要在泛函 χ 中加一项（附加项）

$$\int\left(\frac{\gamma_0}{g}\ddot{u}_n\right)pds, \tag{5.4.71}$$

则边界条件便自动满足。应当注意，式（5.4.71）中的积分，仅限定于以式（5.4.69）所规定的边界区域。当有其它类型的边界条件时，附加项形式会有所不同。

这样，求解动水压力 p 的问题，就等价于求泛函 χ 的极小值问题，即

$$\chi=\iint_R \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2\right]dxdy+\int_S\left(\frac{\gamma_0}{g}\ddot{u}_n\right)pds=\text{极小}. \tag{5.4.72}$$

如果我们所考虑的为三维情况，则亦不难写出

$$\chi=\iiint_R \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz+\iint_s\left(\frac{\gamma_0}{g}\ddot{u}_n\right)pds=\text{极小}. \tag{5.4.73}$$

现在设各单元内的压力分布为

$$p=[N_iN_j\cdots]\begin{Bmatrix}p_i\\p_j\\\vdots\end{Bmatrix}=[N]\{p\}^e, \tag{5.4.74}$$

其中 p_i，$p_j\cdots$ 是各节点处的压力，是标量，N_i，$N_j\cdots$ 是表示压力分布的形函数。它们的选择与位移形函数相似，应使得在节点 i，$j\cdots$ 处，p 应分别等于 p_i，$p_j\cdots$ 等。对典型的三角形，四边形单元的形函数拟在后面再予介绍。

由于全区域已划分成单元，所以泛函 χ 可以写为

$$\chi=\sum_e\chi^e \tag{5.4.75}$$

其中 $\sum_e$ 表示对所有的单元求和，而

$$\chi^e=\iint_{R^e}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2\right]dxdy+\int_{S^e}\left(\frac{\gamma_0}{g}\ddot{u}_n\right)pds. \tag{5.4.76}$$

由式（5.4.74）、(5.4.75)和(5.4.76)可见，在一定的单元划分下，泛函 χ 完全决定于节点处的压力值。因此，式(5.4.72)的极值条件成为

$$\frac{\partial\chi}{\partial p_i}=\sum_e\frac{\partial\chi^e}{\partial p_i}=0.(i,j,m,\cdots) \tag{5.4.77}$$

在应用式(5.4.77)时，可以先对一个典型的单元求出 $\partial\chi^e/\partial p_i$，再把与节点 i 有关的所有单元的这种项相加，然后令相加之和等于零。

将式（5.4.76）先对 p_i 求导数，得到

$$\frac{\partial\chi^e}{\partial p_i}=\iint_{R^e}\left[\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\right]dxdy+\int_{s^e}\left(\frac{\gamma_0}{g}\ddot{u}_n\right)\frac{\partial p}{\partial p_i}ds.$$
$$(i,\ j,m,\cdots) \tag{5.4.78}$$

把P的表达式（5.4.74）代入式（5.4.78），并注意到$\{P\}^e$是节点处的压力，不随坐标而变，即

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\left[\frac{\partial N_i}{\partial x}\ \frac{\partial N_j}{\partial x}\cdots\right]\{p\}^e,\quad (x,\ y)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)=\frac{\partial N_i}{\partial x},\quad (x,\ y)$$

$$\frac{\partial p}{\partial p_i}=N_i\quad (i,\ j,\ m\cdots)$$

故可以得出

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial p_i}=\iint_{R^e}\left\{\left[\frac{\partial N_i}{\partial x}\ \frac{\partial N_j}{\partial x}\ \cdots\right]\frac{\partial N_i}{\partial x}+\left[\frac{\partial N_i}{\partial y}\ \frac{\partial N_j}{\partial y}\ \cdots\right]\frac{\partial N_i}{\partial y}\right\}\{P\}^e dxdy+$$

$$+\int_{s^e}\left(\frac{\gamma_0}{g}\ddot{u}_n\right)N_i ds. \tag{5.4.79}$$

利用相同的运算法则求出$\partial\chi^e/\partial p_j$，…等，再将它们合并写成矩阵形式

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial \{p\}^e}=[h]\{p\}^e-\{\overline{F}\}^e, \tag{5.4.80}$$

其中　矩阵$[h]$中的诸元素为

$$h_{rs}=\iint_{R^e}\left[\frac{\partial N_r}{\partial x}\frac{\partial N_s}{\partial x}+\frac{\partial N_r}{\partial y}\frac{\partial N_s}{\partial y}\right]dxdy. \tag{5.4.81}$$

$$(r=i,\ j,\ m\cdots;\ S=i,\ j,\ m\cdots)$$

$\{\overline{F}\}^e$中的诸元素为

$$\overline{F}_i^e=-\int_{s^e}\left(\frac{r_0}{g}\ddot{u}_n\right)N_i ds.\quad (i,\ j,\ m\cdots) \tag{5.4.82}$$

按照通常方法，对于每一个节点把有关的项相加起来，并令其为零，即得全区域的极值方程为

$$\frac{\partial x}{\partial\{P\}}=[H]\{p\}-\{\overline{F}\}=0, \tag{5.4.83}$$

其中

$$H_{ij}=\sum_e h_{ij},\qquad \overline{F}_i=\sum_e \overline{F}_i^e.$$

式（5.4.83）是由极值条件导出的各节点处压力p_i，p_j…等的线性方程组，由此可以解出各节点处的压力

将式（5.4.83）改写为

$$[H]\{p\}=\{\overline{F}\}. \tag{5.4.84}$$

容易看出，求解动水压力问题与求解弹性力学问题极为相似，这里的$[H]$相当于刚性矩阵，$\{p\}$相当于节点位移，$\{\overline{F}\}$相当于节点载荷。因此，对于动水压力问题，在建立了单元“刚度”矩阵$[h]$并求得等效节点载荷以后，便可以用通常的方法求各节点处的动水压力。

下面，将以平面问题为例，详细介绍三角形单元和矩形单元的“刚度”矩阵、边界处理和载荷移置等的具体求法。

（一）单元“刚度”矩阵

1. 三角形单元（图 5.4.6）

对三角形单元，压力分布函数可采用与位移形函数相同，即

$$[N]=[N_i\ N_j\ N_m].\tag{5.4.85}$$

因为在每一个节点只有一个未知数，所以在 N_i 之前不必再乘以单位阵 I。单元的压力分布可表示为

$$P=[N_i\ N_j\ N_m]\begin{Bmatrix} p_i \\ p_j \\ p_m \end{Bmatrix},\tag{5.4.86}$$

其中

$$N_i=(a_i+b_ix+c_iy)/2\Delta,\ (i,\ j,\ m)$$

而系数

$$a_i=x_jy_m-x_my_j;\ \ b_i=y_j-y_m=y_{jm};\ \ c_i=x_m-x_j=x_{mj},\ (i,\ j,\ m)$$

$$\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}.$$

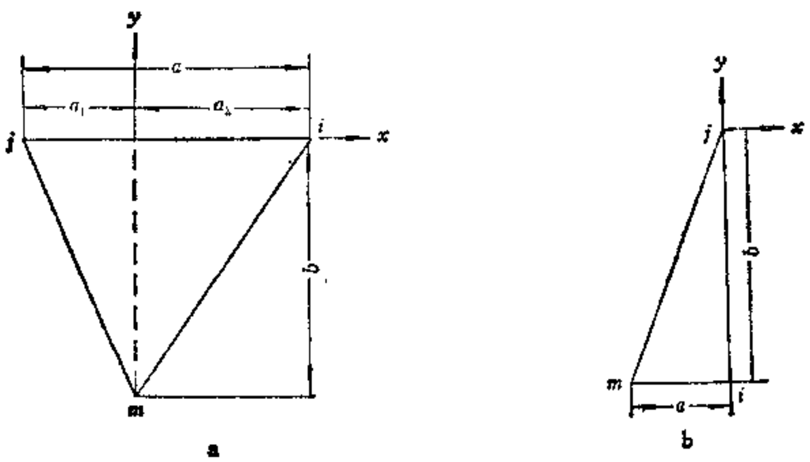


图 5.4.6

按照几何原理，Δ 等于三角形 $i\ j\ m$ 的面积。为了得出的面积不致成为负值，$i,\ j,\ m$ 的次序必须是逆时针转向，如图 5.4.6 所示。

单元的"刚度"矩阵

$$[h]=\begin{bmatrix} h_{ii} & h_{ij} & h_{im} \\ h_{ji} & h_{jj} & h_{jm} \\ h_{mi} & h_{mj} & h_{mm} \end{bmatrix},\tag{5.4.87}$$

其中各元素为

$$h_{rs}=\iint_{\Delta}\left[\frac{\partial N_r}{\partial x}\frac{\partial N_s}{\partial x}+\frac{\partial N_r}{\partial y}\frac{\partial N_s}{\partial y}\right]dxdy.\tag{5.4.88}$$

---

* 公式后面有 $(i,\ j,\ m)$，表示这个公式实际上代表三个公式，其余两个公式由其中的角码 $i,\ j,\ m$ 轮换而得。

因为 $\frac{\partial N_r}{\partial x}=\frac{b_r}{2\Delta}$, $\frac{\partial N_s}{\partial x}=\frac{b_s}{2\Delta}$, $\frac{\partial N_r}{\partial y}=\frac{c_r}{2\Delta}$, $\frac{\partial N_s}{\partial y}=\frac{C_s}{2\Delta}$,

所以 $h_{rs}=(b_r b_s+c_r c_s)/4\Delta \quad (r=i,\ j,\ m,\ s=i,j,m)$。

式(5.4.85)中的 x_i, $y_i\cdots$为三角形有关节点的横坐标和纵坐标。这样,对于三角形类型①有

$$N_i=\frac{1}{ab}(a_i+b_i x+c_i y);$$

$$N_j=\frac{1}{ab}(a_j+b_j x+c_j y);$$

$$N_m=\frac{1}{ab}(a_m+b_m x+c_m y);$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial x}=\frac{1}{ab}b_i;\quad \frac{\partial N_j}{\partial x}=\frac{1}{ab}b_j;\quad \frac{\partial N_m}{\partial x}=\frac{1}{ab}b_m,$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y}=\frac{1}{ab}c_i,\quad \frac{\partial N_j}{\partial y}=\frac{1}{ab}c_j;\quad \frac{\partial N_m}{\partial y}=\frac{1}{ab}c_m.$$

根据式(5.4.88)得到

$$h_{ii}=\frac{1}{a^2b^2}\int_{-b}^{0}\int_{-a_1}^{a_2}[(b_i)^2+(c_i)^2]dxdy=\frac{1}{a^2b^2}\int_{-b}^{0}\int_{-a_1}^{a_2}[(y_j-y_m)^2+(x_m-x_j)^2]dxdy$$

$$=\frac{1}{a^2b^2}\int_{-b}^{0}\int_{-a_1}^{a_2}[a_1^2+b^2]dxdy=\frac{1}{2ab}[a_1^2+b^2];$$

$$h_{ij}=\frac{1}{a^2b^2}\int_{-b}^{0}\int_{-a_1}^{a_2}[(b_ib_j)+(c_ic_j)]dxdy=\frac{1}{a^2b^2}\int_{-b}^{0}\int_{-a_1}^{a_2}[(y_j-y_m)(y_m-y_0)+$$

$$+(x_m-x_j)(x_i-x_m)]dxdy=\frac{1}{a^2b^2}[-b^2+a_1a_2]\frac{ab}{2}$$

$$=\frac{1}{2ab}[-b^2+a_1a_2];$$

$$h_{im}=\frac{1}{a^2b^2}\int_{-b}^{0}\int_{-a_1}^{a_2}[(b_mb_i)+(c_mc_i)]dxdy=\frac{1}{a^2b^2}\int_{-b}^{0}\int_{-a_1}^{a_2}[(y_i-y_j)(y_j-y_m)+$$

$$+(x_j-x_i)(x_m-x_j)]dxdy=\frac{1}{a^2b^2}[-a_1(a_1+a_2)]\frac{ab}{2}=\frac{1}{2ab}[-a_1a];$$

…………………

余类推。故单元"刚度"矩阵为

$$[h^{(1)}]=\frac{1}{2ab}\begin{bmatrix} b^2+a_1{}^2 & -b^2+a_1a_2 & -aa_1 \\ & b^2+a_2^2 & -aa_2 \\ \text{对称} & & a^2 \end{bmatrix}. \tag{5.4.89}$$

同理,对于三角形单元②,我们不难由式(5.4.89)经坐标转换求得其单元"刚度"矩阵

$$[h^{(2)}]=\frac{1}{2ab}\begin{bmatrix} b^2+a^2 & -a^2 & -b^2 \\ & a^2 & 0 \\ \text{对称} & & b^2 \end{bmatrix}. \tag{5.4.90}$$

2. 矩形单元

下面,我们来详细推导如图5.4.7所示的矩形单元的"刚度"矩阵。

对矩形单元的压力分布函数可选择为与位移形函数相同形式,即

$$[N]=[N_i\ N_j\ N_l\ N_m],$$

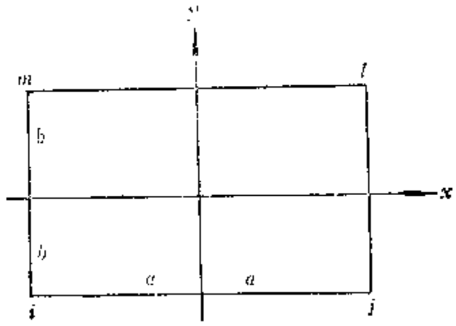


图 5.4.7

单元的压力分布可表示为

$$P=[N]\{P\}^e=[N_i\ \ N_j\ \ N_l\ \ N_m]\begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \\ P_l \\ P_m \end{Bmatrix} \tag{5.4.91}$$

其中

$$N_i=\frac{1}{4ab}(a-x)(b-y),\quad N_j=\frac{1}{4ab}(a+x)(b-y),$$

$$N_l=\frac{1}{4ab}(a+x)(b+y),\quad N_m=\frac{1}{4ab}(a-x)(b+y).$$

单元的“刚度”矩阵

$$[h]=\begin{bmatrix} h_{ii} & h_{ij} & h_{il} & h_{im} \\ h_{ji} & h_{jj} & h_{jl} & h_{jm} \\ h_{li} & h_{lj} & h_{ll} & h_{lm} \\ h_{mi} & h_{mj} & h_{ml} & h_{mm} \end{bmatrix} \tag{5.4.92}$$

其中各元素仍为

$$h_{rs}=\iint\limits_{\Box}\left[\frac{\partial N_r}{\partial x}\frac{\partial N_s}{\partial x}+\frac{\partial N_r}{\partial y}\frac{\partial N_s}{\partial y}\right]dxdy. \tag{5.4.93}$$

$$(r=i,j,l,m,\ \ s=i,j,l,m)$$

且

$$\frac{\partial N_i}{\partial x}=\frac{1}{4ab}[-(b-y)],\quad \frac{\partial N_j}{\partial x}=\frac{1}{4ab}[(b-y)],$$

$$\frac{\partial N_l}{\partial x}=\frac{1}{4ab}[(b+y)],\quad \frac{\partial N_m}{\partial x}=\frac{1}{4ab}[-(b+y)],$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y}=\frac{1}{4ab}[-(a-x)],\quad \frac{\partial N_j}{\partial y}=\frac{1}{4ab}[-(a+x)],$$

$$\frac{\partial N_l}{\partial y}=\frac{1}{4ab}[(a+x)],\quad \frac{\partial N_m}{\partial y}=\frac{1}{4ab}[(a-x)].$$

由式(5.4.93)就可以求得

$$h_{ii}=\frac{1}{16a^2b^2}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}[(b-y)^2+(a-x)^2]dxdy=\frac{1}{6ab}[2a^2+2b^2];$$

$$h_{ij}=\frac{1}{16a^2b^2}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}[-(b^2-y^2)+(a^2-x^2)]\,dx\,dy=\frac{1}{6ab}[a^2-2b^2];$$

$$h_{il}=\frac{1}{16a^2b^2}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}[-(b^2-y^2)-(a^2-x^2)]\,dx\,dy=\frac{1}{6ab}[-a^2-b^2];$$

$$h_{im}=\frac{1}{16a^2b^2}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}[(b^2-y^2)-(a^2-x^2)]\,dx\,dy=\frac{1}{6ab}[-2a^2+b^2];$$

$$h_{ii}=h_{ll}=h_{mm}=\frac{1}{6ab}[2a^2+2b^2];$$

……

故矩形单元的单元刚度矩阵为

$$[h]=\frac{1}{6ab}\begin{bmatrix}2(a^2+b^2) & a^2-2b^2 & -(a^2+b^2) & -2a^2+b^2\\ & 2(a^2+b^2) & -2a^2+b^2 & -(a^2+b^2)\\ & & -2(a^2+b^2) & a^2-2b^2\\ \text{对称} & & & 2(a^2+b^2)\end{bmatrix}\tag{5.4.94}$$

有了单元“刚度”矩阵之后，组合成“总刚度阵”$[H]$，可按一般方法进行。

（二）边界单元上的节点载荷

现在来求解边界单元节点载荷$\{F\}^e$。假设$\partial p/\partial n$在节点ij之间呈线性分布，动水压力p亦呈线性分布，则附加项

$$\int_e\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)p^e ds \tag{a}$$

可计算如下。令

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)&=q_j+\left(\frac{q_i-q_j}{l}\right)s,\\ p^e&=p_j+\left(\frac{p_i-p_j}{l}\right)s.\end{aligned}\right\}\tag{b}$$

将(b)代入(a)，则得

$$\begin{aligned}\int\left[q_j+\left(\frac{q_i-q_j}{l}\right)s\right]\left[p_j+\left(\frac{p_i-p_j}{l}\right)s\right]ds&=\int\left[q_jp_j+\frac{q_j(p_i-p_j)}{l}s+\right.\\ &\left.+\frac{p_j(q_i-q_j)}{l}s+\frac{q_i(p_i-p_j)-q_j(p_i-p_j)}{l^2}s^2\right]ds\\ &=q_jp_jl+\frac{1}{2}(q_jp_i-q_jp_j)l+\frac{1}{2}(p_jq_i-p_jq_j)l+\frac{1}{3}(q_ip_i-q_ip_j-\\ &-q_jp_i+p_jq_j)l=\frac{l}{6}(q_jp_i+q_ip_j)+\frac{l}{3}(q_ip_i+q_jp_j).\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\int\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)p^e ds\right)=\frac{l}{3}\left(q_j+\frac{1}{2}q_i\right)=\frac{l}{3}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_j+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_i\right],\tag{c}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\int\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)p^e ds\right)=\frac{l}{3}\left(q_i+\frac{1}{2}q_j\right)=\frac{l}{3}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_i+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_j\right].\tag{d}$$

设流体在固体边界上的i点有法向加速度a_n，如图5.4.8所示。则作用在i点的等效节点载荷为

$$\overline{F}_i^e = -\int_{s^e}\left(\frac{\gamma_0}{g}a_n\right)N_i ds.$$

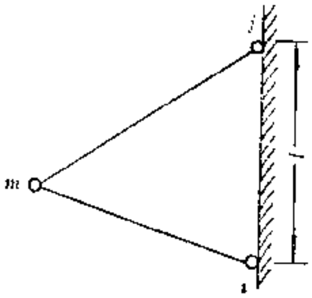


图 5.4.8

因为在 ij 边界上，假设 a_n 和 N_i 均按线性规律变化，并且在 i 点 $N_i=1$，在 j 点 $N_i=0$，所以上式的积分可以用简单的图乘法求出。该荷载分配到 i 点的 $\overline{F}_i^e$ 为

$$\overline{F}_i^e = -\frac{1}{3}\frac{\gamma_0}{g}a_n l; \tag{e}$$

分配到 j 点的 $\overline{F}_j^e$ 为

$$\overline{F}_j^e = -\frac{1}{6}\frac{\gamma_0}{g}a_n l. \tag{f}$$

同理，可以求得当在 j 点有法向加速度 a_n 作用则在 i 点和 j 点所产生的荷载。

从式(c)和(d)就可以知道，(e)和(f)的结果无疑是正确的。在以上两式中 l 代表边界长度。

求得流体边界单元的节点载荷 $\overline{F}^e$ 后，就可以对边界上各节点求和（代数和）而得到边界节点载荷 $\overline{F}$。然后由式(5.4.84)解出各节点处的动水压力 p 的值。其中典型节点 i 处的方程为

$$\sum_e \sum_{s=i,j,m,\cdots} h_{is}p_s^e = \sum_e \overline{F}_i. \tag{5.4.96}$$

在水平地震力作用下，水库底部附加的项为零。

如果我们将各有关单元对某一点的微商加以综合、整理以后，就可得到节点动水压力的极其简略的计算公式。设有如图 5.4.9 所示的典型内部节点和界面节点

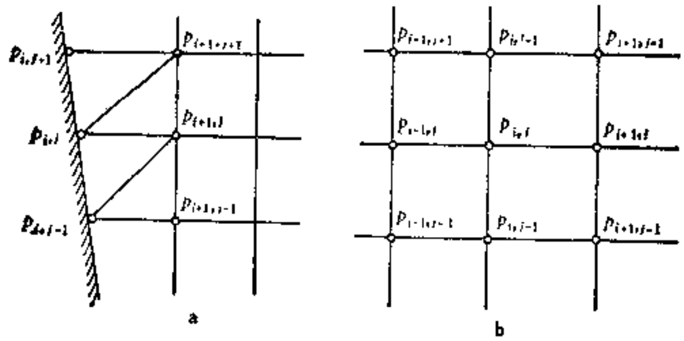


图 5.4.9

对于内部节点有

$$p_{ij} = A_1 p_{i+1,j} + A_2 p_{i+1,j+1} + A_3 p_{i,j+1} + A_4 p_{i-1,j+1} + A_5 p_{i-1,j} + \\ + A_6 p_{i-1,j-1} + A_7 p_{i,j-1} + A_8 p_{i+1,j-1}, \tag{5.4.97}$$

式中 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_8$ 为常数。在 $a=b$ 的正方形单元的情况下，不难求得 $A_1=A_2=\cdots=A_8=1/8$。

对于坝面节点如 i,j 则有

$$p_{i,j} = a_1 p_{i+1,j} + a_2 p_{i+1,j+1} + a_3 p_{i,j+1} + a_4 p_{i,j-1} + a_5\left[2\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_{i,j} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_{i,j+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_{i,j-1}\right]l. \tag{5.4.98}$$

式(5.4.98)适用于边界面具有相同坡度的情况，如果边界面上有二个以上的折坡时，则还应当考虑到作用力之间的投影关系。

（三）影响矩阵

从以上分析可知，如果坝面的加速度或位移值是已知的，则可根据以上的分析方法，求出包括坝面节点在内的任意一点的动水压力 p。但是，如果结构的运动量是未知的，这时我们就不可能求出动水压力的具体数值，而要事先推导出一个"影响矩阵"，以便通过它把作用在结构物上的动水压力与未知加速度量联系起来。

设有某挡水结构，在它与水体的接触面上取 n 个节点，如图 5.10.10 所示。为了用 1 至 n 这些点的加速度 $\ddot{v}_1\ddot{u}$，$\cdots\ddot{u}_n\ddot{v}_n$ 等来表示作用在 1 至 n 点上的动水压力，可令挡水结构上的

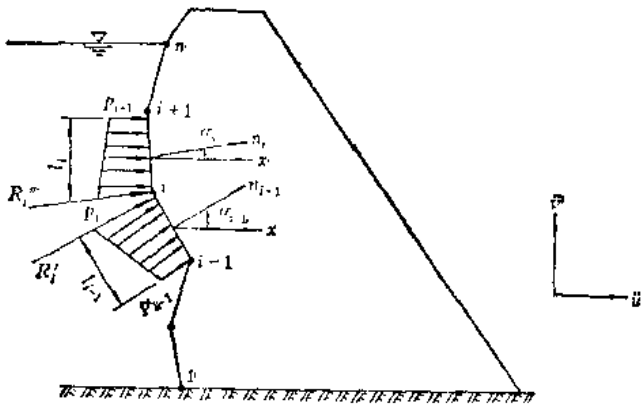


图 5.4.10

各点分别有加速度 $\ddot{u}_1=1$，$\ddot{v}_1=1\cdots\ddot{u}_n=1$，$\ddot{v}_n=1$，解出与各单位加速度相应的动水压力之值，并将最终结果表示为

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{Bmatrix} = [M_0] \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{v}_1 \\ \vdots \\ \ddot{u}_n \\ \ddot{v}_n \end{Bmatrix}, \tag{5.4.99}$$

或者简写为

$$\{p\}=[M_0]\{\ddot{\delta}\}. \tag{5.4.99'}$$

其中矩阵$[M_0]$表示各节点的单位加速度对动水压力的影响，故称为影响矩阵。如果$\{p\}$是一个 $n\times1$ 的列阵，$\{\ddot{\delta}\}$是一个 $2n\times1$ 的列阵，则$[M_0]$是一个 $n\times2n$ 的矩阵。

动水压力$\{P\}$是在节点处的值，这些压力沿单元体的边界线上假定呈线性分布。由这些分布压力造成的节点力为

$$\{R_p\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{Bmatrix} = [A][M_0] \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{v}_1 \\ \vdots \\ \ddot{u}_n \\ \ddot{v}_n \end{Bmatrix} = [M_p]\{\ddot{\delta}\}, \tag{5.4.100}$$

其中[A]为与结构的几何形状有关的载荷分配矩阵。现在考虑如图 5.4.10 上的 $i-1$，i 和 $i+1$ 三个节点，根据这三个点上的动水压力 p_{i-1}，p_i 和 p_{i+1}，可以按前面所介绍的方法求得作用于点 i 上的等效荷载为

$$\left.\begin{aligned} R_i' &= \frac{l_{i-1}d}{3}\left(p_i+\frac{1}{2}p_{i-1}\right), \\ R_i'' &= \frac{l_i d}{3}\left(p_i+\frac{1}{2}p_{i+1}\right). \end{aligned}\right\}$$

式中 l_{i-1}，l_i 为单元的边长，d 为单元厚度，R_i'，R_i'' 分别为与作用在边界 $\overline{i-1,i}$ 及 $\overline{i,i+1}$ 上的动水压力相应的等效荷载。由于 R_i' 及 R_i'' 分别垂直于它们作用的边界，应将它们投影到 x，y 方向上，然后相加，以得出节点的全荷载

$$\{R_i\}=\begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \end{Bmatrix}=\frac{l_{i-1}d}{3}\left(p_i+\frac{1}{2}p_{i-1}\right)\begin{Bmatrix} \cos\alpha_{i-1} \\ \sin\alpha_{i-1} \end{Bmatrix}+$$

$$+\frac{l_i d}{3}\left(p_i+\frac{1}{2}p_{i+1}\right)\begin{Bmatrix} \cos\alpha_i \\ \sin\alpha_i \end{Bmatrix}. \tag{5.4.101}$$

由式(5.4.100)和(5.4.101)就可以得出矩阵[A]的显式。因为各节点处的等效载荷只与三个相邻节点处的动水压力有关，所以矩阵[A]中的每一行，只有三个元素不为零。对于第 $2i-1$ 行，这三个不为零的元素为

$$a_{2i-1,i-1}=\frac{l_{i-1}d}{6}\cos\alpha_{i-1},$$

$$a_{2i-1,i}=\frac{l_{i-1}d}{3}\cos\alpha_{i-1}+\frac{l_i d}{3}\cos\alpha_i,$$

$$a_{2i-1,i+1}=\frac{l_i d}{6}\cos\alpha_i,$$

对于第 $2i$ 行，三个不为零的元素为

$$a_{2i,i-1}=\frac{l_{i-1}d}{6}\sin\alpha_{i-1},$$

$$a_{2i,i}=\frac{l_{i-1}d}{3}\sin\alpha_{i-1}+\frac{l_i d}{3}\sin\alpha_i,$$

$$a_{2i,i+1}=\frac{l_i d}{6}\sin\alpha_i.$$

需要指出的是，上面所列举各行元素的计算式，只适用于自 $i=2,\cdots,n-1$ 各项的相应元素，对结构的底部和顶部各节点对应于矩阵[A]中相应项的元素，例如对于图 5.4.10 中的 1 和 n 两点，其相应项元素为

$$a_{1,1}=\frac{l_1 d}{3}\cos\alpha_1; \quad a_{1,2}=\frac{l_1 d}{6}\cos\alpha_1;$$

$$a_{2,1}=\frac{l_1 d}{3}\sin\alpha_1; \quad a_{2,2}=\frac{l_1 d}{6}\sin\alpha_1;$$

$$a_{2n-1,n-1}=\frac{l_{n-1}d}{6}\cos\alpha_{n-1}; \quad a_{2n-1,n}=\frac{l_{n-1}d}{3}\cos\alpha_{n-1};$$

$$a_{2n,n-1}=\frac{l_{n-1}d}{6}\sin\alpha_{n-1}; \quad a_{2n,n}=\frac{l_{n-1}d}{3}\sin\alpha_{n-1}$$

下面我们具体考察一个计算影响矩阵的算例。设有如图 5.4.11 a 所示的刚性挡水墙，该墙受有向右的地震加速度 a_n 的作用。求坝面和库底的动水压力。

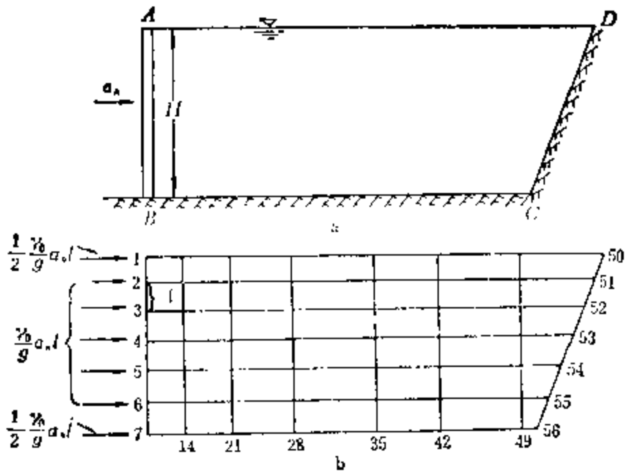


图 5.4.11

在本例中沿水库的自由面 AD 动水压力 $p=0$。在远离墙面的斜边界 DC 上，设动水压力也为零。在水库的底面 BC 上，各点的动水压未知，但由于地震加速度为水平作用，BC 上各点的法向加速度为零，故该面上各节点处的荷载为零，即

$$\overline{F}=0.$$

沿墙面和水体的接触面上，有指向水体内部的法向加速度 $a_n(\ddot{u}_n=-a_n)$。由于节点 1 和节点 2 的法向加速度所引起节点 1 处的荷载为

$$\overline{F}_1=-\frac{1}{3}\frac{\gamma_0}{g}(-a_n)l-\frac{1}{6}\frac{\gamma_0}{g}(-a_n)l=\frac{1}{2}\frac{\gamma_0}{g}a_nl.$$

由节点 1,2 和 3 的法向加速度所引起节点 2 处的荷载为

$$\overline{F}_2=2\left[-\frac{1}{3}\frac{\gamma_0}{g}(-a_n)l-\frac{1}{6}\frac{\gamma_0}{g}(-a_n)l\right]=\frac{\gamma_0}{g}a_nl.$$

同理，可以求出其它各节点的荷载（如图 5.4.11 b 所示）。这样处理边界条件以后，就可以对未知压力的节点建立如式(5.4.96)形式的方程，从而求得未知压力 p 的值。如果我们欲求解在任意加速度分布时，在点 1 至 56 产生的压力，则这些压力可列成依赖于点 1 至 7 的加速度的矩阵，这样变成

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_7 \\ p_{14} \\ p_{21} \\ p_{28} \\ p_{35} \\ p_{42} \\ p_{56} \end{Bmatrix}=[M_0]\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_7 \end{Bmatrix}, \tag{5.4.102}$$

式中矩阵$[M_0]$是从逐个依次给予邻接于所求点的边界部分以一个单位加速度，造成荷载$\frac{\gamma_0}{g}\frac{l}{2}$，$\frac{\gamma_0}{g}l\cdots\frac{\gamma_0}{g}l$，$\frac{\gamma_0}{g}\frac{l}{2}$被依次逐个施加于1至7所求得的影响矩阵。表5.4.1列出了墙面上的影响矩阵。

表 5.4.1　　　　墙面各点影响矩阵

	1	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0.7249	0.3685	0.2466	0.1963	0.1743	0.0840
	3	0	0.3685	0.9715	0.5648	0.4210	0.3644	0.1744
$[M_0]$	4	0	0.2466	0.5648	1.1459	0.7329	0.5954	0.2804
	5	0	0.1963	0.4210	0.7329	1.3203	0.9292	0.4210
	6	0	0.1744	0.3644	0.5954	0.9292	1.5669	0.6489
	7	0	0.1680	0.3488	0.5667	0.8420	1.2977	1.1459

表中的元素a_{ij}，其物理意义就表示在j点施加一个单位加速度时，在i点所产生的动水压力值。

假使作用的加速度是均匀的或按线性变化，则其压力计算结果绘于图5.4.12。

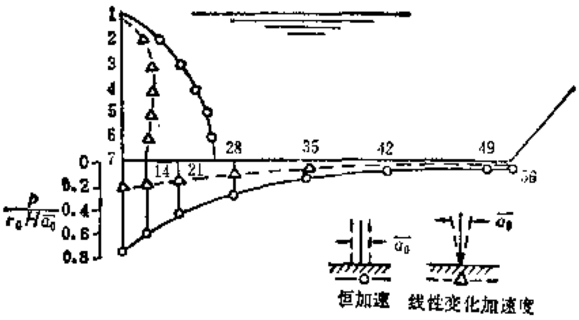


图 5.4.12

影响矩阵对求解动水压力提供了方便的途径。因为如果墙面受到振动，一般其加速度是未知的。从式(5.4.102)我们可以写出点1至7的压力。取表5.4.1中的数值作为p_1—p_7的影响矩阵$[M_0]$，则

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_7 \end{Bmatrix} = [M_0] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_7 \end{Bmatrix} = [M_0]\{a\}. \tag{5.4.103}$$

这些压力所构成的节点荷载为式(5.4.100)

其中

$[A]$是荷重分配矩阵，

$\{a\}$代表墙面节点加速度，　　(5.4.104)

$[M_p]$可称为附加质量矩阵。

(四) 坝-库水系统地震动力反应分析

混凝土重力坝-库水系统地震动力反应采用有限单元法分析时，一般均作为平面问题处理。由于三角形单元比较灵活且易逼近坝体的复杂几何形状，故对坝体部分常采用三角形单元。库水部分可按四边形单元划分，如图 5.4.13 所示。库水范围一般应大于三倍以上坝高。库水与坝体的接触面上单元体的节点应一致。

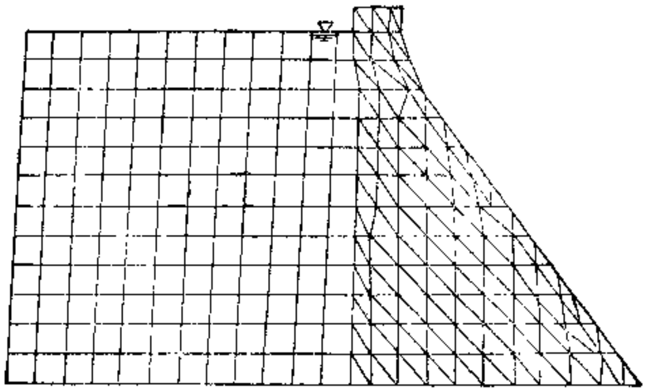


图 5.4.13

空库时坝体的运动方程为

$$[M]\{\ddot{\delta}\}+[C]\{\dot{\delta}\}+[K]\{\delta\}=-[M][G]\{\ddot{\delta}_g\}, \tag{5.4.104}$$

其中$[M]$、$[C]$及$[K]$，分别为坝体的 $2n\times 2n$ 维的质量、阻尼及刚度矩阵，其中$[M]$既可以采用一致质量矩阵，也可以采用凝聚质量矩阵。通过很多的计算表明，采用后者不仅使矩阵本身成为对角线型，运算方便，而且也不会过份有损于解的精度。$\{\delta\}$、$\{\dot{\delta}\}$及$\{\ddot{\delta}\}$分别为结点的相对位移、相对速度及相对加速度的 $2n$ 维向量。

如将$\{\delta\}$写为展开形式

$$\{\delta\}^T=\{u_1v_1u_2v_2\cdots u_nv_n\}.$$

$[G]$为实现从平面笛卡尔座标系到节点座标空间转换之 $2n\times 2$ 维矩阵，其形式为

$$[G]=[E_xE_y],$$

其中

$$\{E_x\}^T=\{1,\ 0,\ 1,\ 0,\cdots 1,\ 0\},$$
$$\{E_y\}^T=\{0,\ 1,\ 0,\ 1,\cdots 0,\ 1\}.$$

$\{\ddot{\delta}_g\}$为坝基地面运动加速度向量.

$$\{\ddot{\delta}_g\}=\begin{Bmatrix}a_g\\ \ddot{V}_g\end{Bmatrix},$$

$\{\ddot{\delta}\}+[G]\{\ddot{\delta}_g\}=\{a\}$为坝体节点的绝对加速度向量。

当满库时，坝体上游面各节点将受到库水中动水压力的作用。根据前面所述，上游坝面的动水压力可以表示成上游面各节点的加速度$\{a\}$的线性函数，即

$$\{R\}=-[M_p]\{a\}. \tag{5.4.105}$$

可以把式(5.4.105)中的$\{a\}$视为整个坝体全部节点的加速度向量，仅需填充以适当的零元素。将$[M_p]$扩展到 $2n\times 2n$ 维，将$\{R\}$扩展为 $2n$ 维。此时就可以将式(5.4.105)所表示的动水压力荷载项加到式(5.4.104)的右端，即可得出满库时坝-库水系统地震动力反应的方

程

$$([M]+[M_p])\{\ddot{\delta}\}+[C]\{\dot{\delta}\}+[K]\{\delta\}$$
$$=-([M]+[M_p])[G]\{\ddot{\delta}_g\}. \qquad (5.4.106)$$

上式与空库时坝体运动方程(5.4.104) 相比，其形式完全相似，只是把质量矩阵 $[M]$ 改为 $[M]+[M_p]$，$[M_p]$体现了坝体上所作用的动水压力对运动的影响，故$[M_p]$称为附加质量矩阵。

根据式 (5.4.104) 和式 (5.4.106) 即可求得空库与满库时坝体的地震动力反应。若令式(5.4.106)和(5.4.106)的右端项为零，即分别代表空库及满库时坝体的自由振动方程，按照熟知的求解特征值和特征向量的方法，就可以求出坝体的自振频率和振型。

关于坝体的地震反应分析，仍有两种途径可以遵循，一是根据坝址所在的具体场地条件及设防烈度，选择几条具有不同特点的地震加速度记录作为输入。然后用振型分解法或用逐步积分法求出坝体的地震反应时程，从而求得坝体各个部位的最大加速度、最大应力和基底总剪力。另一种方法，就是目前规范上所建议的标准反应谱途径。设计反应谱可按现行有关的规定采用。虽然按照这种方法只能给出结构的最大反应值而不能给出反应的时间历程，但是由于反应谱本身已具有一定的统计特征，因此，作为工程设计的定量依据，由于标准反应谱方法的简便易行，人们还是普遍地乐于采用。

第五节 竖向地面运动时的计算

一、概述

在垂直地震力作用下对动水压力的计算问题，迄今为止还研究得比较少。这一方面固然是由于问题本身的复杂性，同时也因为有些研究者认为可以忽略竖向分量对动水压力的影响。苏联的诺别特瓦里杰(Ш.Г.Напетварцзе)[17]和陈振诚[18]曾指出，在计算动水压力时，地面运动可以理想为通常的水平分量而忽略其竖向分量，将不会产生过大的误差。然而，近几年齐波拉通过研究[6]发现竖向地面运动将会产生很高的动水压力。他在研究中考虑了水的可压缩性，并认为库壁和库底为刚性体，水库为棱柱状的矩形体。在上述假定之下，他发现在一高为 30 米的高坝上，在 1940 年埃尔森特罗(Elcentro) 地震竖向分量作用下，其最大动水压力的合力和倾覆力矩将比在重力作用下相应的静力值大三倍以上。当然这样高的数值是难于令人置信的。但也说明对这个问题仍有深入探讨的必要。人们认为，乔波拉给出高估的动水压力的根本原因在于他忽略了库底、侧壁和端壁的覆盖物以及岩石的可变形性等。简单的例证是若将水库作为一维问题考虑，但考虑库底岩石的可变形性，将其理想化为半无限平面，将会发现通常会比刚性岩石假定的降低 20—80%。这种降低的多少将直接依赖于岩石的单位重量，P波传播速度以及运动的持续时间。

另一些研究者如海里拉(Herrera)、佛罗勒(Floves)和罗柴诺(Lozono)等[19]指出：地震波对于坝体的行进方向将具有决定性的影响。当地震波向着坝体行进时，所产生的压力可能几倍于当假定库底的运动是同时到达时所产生的值。而当地震波是离开坝体行进时，它们就可能要小好几倍。此外，水体和岩石界面之间声波的反射，由于界面往往存在着非常容易变形的材料，如堆积的淤泥及其它沉积物，因此，往往是可以忽略的。

基于上述原因，地面竖向加速度的影响将会小于现有研究者所提供的数值。当然，进一

步的降低将寄希望于坝体本身的可变形性和非线性因素的考虑。

下面，我们将介绍计算的方法。

二、运动方程及其解

在垂直地震力作用下(坐标系统见图 5.4.1)，流体同样要满足波动方程(5.2.10)。但其边界条件则不相同。这里我们除表面波的影响也加以考虑外，其余的假设和限制同前，边界条件有

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)(x,\ 0,\ t)=\ddot{V}_g(t), \tag{5.5.1}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(x,H,t)+g\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,H,t)=0, \tag{5.5.2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(0,y,t)=0. \tag{5.5.3}$$

式中 $\ddot{V}_g(t)$代表地面运动加速度的竖向分量。式(5.5.1)表示在结构底部的竖向加速度应相等，它体现了界面的连续性条件；式(5.5.2)代表自由表面的波动条件，假使波的运动可以忽略，则式(5.5.2)可以简化为

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,H,t)=0 \tag{5.5.2'}$$

式(5.5.3)表示在界面 x 方向的速度为零。

(一) 复数频率反应

若令 $\ddot{V}_g(t)=e^{i\omega t}$，则式(5.2.10)在边界条件式(5.5.1)、(5.5.2)和(5.5.3)的情况下，其解的形式可表示为

$$\phi(x,y,t)=H_\phi^v(x,y,\omega)e^{i\omega t}, \tag{5.5.4}$$

式中 H_ϕ^v 为 ϕ 对竖向地面运动分量的复数频率反应。下面采用变量分离法。若令

$$\phi(x,y,t)=R(x)\Phi(y)e^{i\omega t}, \tag{5.5.5}$$

采用和第二节同样的方法可得

$$\Phi''(y)+\gamma^2\Phi(y)=0, \tag{5.5.6}$$

$$R''(x)-k^2R(x)=0. \tag{5.5.7}$$

式中

$$k^2=\gamma^2-\frac{\omega^2}{K^2};\ K\text{为水中声波速度。}$$

式(5.5.6)和(5.5.7)的解为

$$\Phi=A_1\cos\gamma y+A_2\sin\gamma y, \tag{5.5.8}$$

$$R=B_1\cosh kx+B_2\sinh kx. \tag{5.5.9}$$

由边条件(5.5.3)易知

$$B_2=0,$$

故 $\phi(x,y,t)=(A_1\cos\gamma y+A_2\sin\gamma y)\cosh kxe^{i\omega t}$.

同时，我们从水面的波动条件(5.5.2)，或从自由面的条件(5.5.2′)可知，在任意点的速度均与 x 值无关，故 $\cosh kx$＝常数，而要满足这一条件，必有 $k=0$,

故
$$\gamma=\frac{\omega}{K}. \tag{5.5.10}$$

再由边界条件(5.5.1)得到

$$i\omega\gamma(-A_1\sin\gamma y+A_2\cos\gamma y)e^{i\omega t}=e^{i\omega t},$$

即

$$i\omega\gamma(-A_1\sin\gamma y+A_2\cos\gamma y)=1,$$

$$\therefore\quad A_2=\frac{1}{i\omega\gamma}. \tag{5.5.11}$$

从边界条件(5.5.2)得到

$$-\omega^2(A_1\cos\gamma H+A_2\sin\gamma H)+g(-A_1\gamma\sin\gamma H+A_2\gamma\cos\gamma H)=0,$$

$$-A_1\left(\omega^2\cos\frac{\omega}{K}H+g\frac{\omega}{K}\sin\frac{\omega}{K}H\right)-A_2\left(\omega^2\sin\frac{\omega}{K}H-\right.$$

$$\left.-g\frac{\omega}{K}\cos\frac{\omega}{K}H\right)=0. \tag{5.5.12}$$

将式(5.5.11)代入(5.5.12)，得到

$$-A_1\left(\omega^2\cos\frac{\omega}{K}H+g\frac{\omega}{K}\sin\frac{\omega}{K}H\right)-\frac{K}{i\omega^2}\left(\omega^2\sin\frac{\omega}{K}H-\right.$$

$$\left.-g\frac{\omega}{K}\cos\frac{\omega}{K}H\right)=0,$$

$$\therefore\quad A_1=-\frac{\frac{K}{i\omega^2}\left(\omega^2\sin\frac{\omega}{K}H-g\frac{\omega}{K}\cos\frac{\omega}{K}H\right)}{\omega^2\cos\frac{\omega}{K}H+g\frac{\omega}{K}\sin\frac{\omega}{K}H}. \tag{5.5.13}$$

将式(5.5.11)、(5.5.13)代回式(5.5.5)并注意到式(5.5.4)，即得

$$H_\phi^y(x,y,\omega)=\frac{-K}{i\omega^2}\left[\frac{\omega^2\sin\frac{\omega}{K}H-g\frac{\omega}{K}\cos\frac{\omega}{K}H}{\omega^2\cos\frac{\omega}{K}H+g\frac{\omega}{K}\sin\frac{\omega}{K}H}\left(\cos\frac{\omega}{K}y\right)-\sin\frac{\omega}{K}y\right]$$

$$=\frac{-K}{i\omega^2}\left[\frac{\left(\omega^2\sin\frac{\omega}{K}H-g\frac{\omega}{K}\cos\frac{\omega}{K}H\right)\cos\frac{\omega}{K}y-\left(\omega^2\cos\frac{\omega}{K}H+g\frac{\omega}{K}\sin\frac{\omega}{K}H\right)-\sin\frac{\omega}{K}y}{\omega^2\cos\frac{\omega}{K}H+g\frac{\omega}{K}\sin\frac{\omega}{K}H}\right].$$

将上式的分子分母均除以 ω^2 并注意到三角关系式后，即得

$$H_\phi^y(x,y,\omega)=\frac{-K}{i\omega^2}\left[\frac{\sin\frac{\omega}{K}(H-y)-\frac{g}{\omega K}\cos\frac{\omega}{K}(H-y)}{\cos\frac{\omega}{K}H+\frac{g}{\omega K}\sin\frac{\omega}{K}H}\right]. \tag{5.5.14}$$

相应的动水压力的复数频率反应为

$$H_p^y(x,y,\omega)=\frac{\gamma_0 K}{g\omega}\left[\frac{\sin\frac{\omega}{K}(H-y)-\frac{g}{\omega K}\cos\frac{\omega}{K}(H-y)}{\cos\frac{\omega}{K}H+\frac{g}{\omega K}\sin\frac{\omega}{K}H}\right]. \tag{5.5.15}$$

式(5.5.15)和乔波拉所得到的结果相一致[6]。这里还应当提到的一点是：所得到的解和坐标 x 无关。

下面，我们将进一步研究自由表面波动的影响。如果表面波的影响可以忽略，令式 (5.5.

15)方括号中的 $g=0$，则得

$$H_p^y(x,\ y,\ \omega)=\frac{\gamma_0 K}{g\omega}\frac{\sin\frac{\omega}{K}(H-y)}{\cos\frac{\omega}{K}H}. \tag{5.5.16}$$

从分析过去大地震时地面运动的资料可知，最为重要的谐振分量为1弧度/秒$<\omega<$120弧度/秒。因此，最大的 $g/\omega K$ 值可取为 6.82×10^{-3}(取 $\omega=1$ 弧度/秒，$K=1435$ 米/秒)。然而，对于这样的一种低频谐振分量和常见的水库深度情况，它对反应的贡献是很小的。如对于92米深的水库，其自振频率为 $\omega_1=24.7$ 弧度/秒。即使按此频率振动时，$g/\omega K$ 之值将大大小于 6.82×10^{-3}。因此，略去包含 $g/\omega K$ 之项所带来的误差将是很小的。除了接近自由表面处之外，式(5.5.16)将是足够精确的。

(二) 单位脉冲反应

竖向地面运动作用下的单位脉冲反应为

$$h_p^y(x,\ y,\ t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H_p^y(x,\ y,\ \omega)e^{i\omega t}d\,\omega, \tag{5.5.17}$$

经积分变换后得到

$$h_p^y(x,\ y,\ t)=\frac{4\,\gamma_0 K}{\pi\,g}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi-1}\cos\lambda_n y\,\sin\lambda_n Kt, \tag{5.5.18}$$

式中
$$\lambda_n=(2\,n-1)\pi/2\,H.$$

从式(5.5.18)可见，单位脉冲反应是个非衰减量，等价于无阻尼系统。

(三) 任意地面运动的反应

当有任意的竖向地面运动 $\ddot{V}_g(t)$ 作用时，其动水压力反应可由单位脉冲反应和加速度的卷积求得

$$p^y(0,y,t)=$$

$$\frac{4\,\gamma_0 K}{\pi\,g}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cos\lambda_n y\int_0^t\ddot{V}_g(\tau)\sin\{\lambda_n K(t-\tau)\}d\tau. \tag{5.5.19}$$

若对式(5.5.16)从0到 H 进行积分，即得到坝体侧向力的复数频率反应为

$$\frac{H_p^y(\Omega)}{F_0}=\frac{8}{\pi^2 g}\cdot\frac{1}{\Omega^2}\frac{1-\cos\frac{\pi\Omega}{2}}{\cos\frac{\pi\Omega}{2}}, \tag{5.5.20}$$

式中 $F_0=\gamma_0 H^2/2$ 为作用于坝上的静水压力，$\Omega=\omega/\omega_1$，$\omega_1=\pi K/2\,H$ 为水库的第一自振频率。

式(5.5.20)的结果绘于图5.3.2。由图可见：

1) 当 Ω 接近于1，3，5，···时，侧向力将骤然增大。所以共振对于低值的 Ω 来说是具有重要意义的。对于水平扰动，则当 Ω 接近于5，7，9，···时反应就很少增加。

2) 当 $\Omega<3$ 时，则竖向地面运动产生的总侧向力将大于水平地面运动产生的总侧向力。若 Ω 接近于1或3时，则竖向运动的反应将达到最大。

3) 随着 Ω 的增大，不论是水平运动或者竖向运动，它们的反应均随之减少。

4) 若水体作为不可压缩流体，即 $K\to\infty$，此时反应可以从式(5.5.20)取极值。应用罗

必塔法则可得

$$\frac{H_F^y(\omega)}{F_0}=\frac{1}{g}. \tag{5.5.21}$$

由此可见，此时作用在坝上的侧向力的复数频率反应将和扰动频率无关。由于 $F_F^y(\Omega)$ 和 Ω 是无关的，所以立刻可以求得当水体为不可压缩流体时的总侧向力 $F^y(t)$。即可由H_F^y直接和加速度相乘而得

$$\frac{F^y(t)}{F_0}=\frac{\ddot{V}_g(t)}{g}. \tag{5.5.22}$$

式(5.5.22)表示在地震作用的任一时刻的反应，即当作了水体为不可压缩性流体的假定后，$F^y(t)$仅依赖于瞬时的地面运动加速度。也如同水平地震时所产生的动水压力那样，对由任意地面运动所产生的动水压力，亦可用附加在刚性坝体上的附加质量代替。

当考虑了水体的可压缩性影响后，动水压力反应将依赖于地面运动作用时间的全部历程。从式(5.5.19)我们不难证明此时已不能采用附加质量的办法。

第六节　坝体具有倾斜上游面时的计算

若坝体的临水面具有倾斜面或多个折坡面时，从原理上讲仍可采用如竖直上游面的计算方法。但是由于边界条件的不同，将使问题的求解变得十分困难，甚至不可能得到严格的解析解。一般只能采用近似解法或直接通过试验方法求得。当然，有限单元法在求解具有复杂边界条件结构物的动水压力时，将更能充分地发挥它的优越性。对于它的计算原理，我们已在第四节作了详细介绍，这里不再赘述。

关于倾斜坝面的地震动水压力问题，沃纳(P. W. Werner)[6]等曾提出绘制流网的图解法，岑格(C. N. Zanger)[20]用电模拟试验方法给出了不同坝面倾角的地震动水压力分布曲线；伊万诺娃(Л. С. ИВанова)[21]用复变函数方法研究了倾斜坝面的动水压力问题。陈振诚也用保角变换的方法研究过这个问题。下面，我们准备介绍几种毋需更深数学知识的易为读者所掌握的解析计算方法。

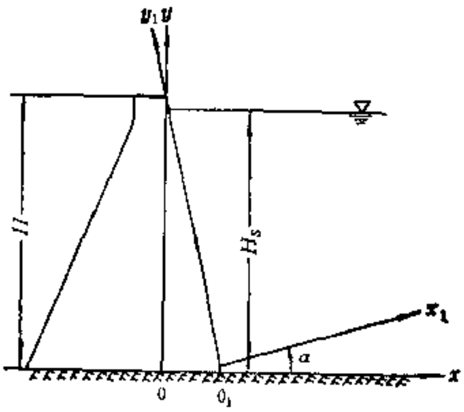


图 5.6.1

一、坐标变换法

假若坝体的上游面仅为一个折坡情况，如图5.6.1所示，则可以肯定，采用坐标变换法将是可遵循的途径之一。所以，首先将介绍这个方法的基本思想，并推导出相应的计算公式。

坝体仍考虑为梁式结构。当确定动水压力时，仍假定水为理想液体，并略去表面波的影响。此时，速度势 ψ 满足二维波动方程

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\frac{1}{K^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}. \tag{5.6.1}$$

边界条件为：

① 在坝体迎水面 $x=(H-y)\tan\alpha$ 上，液体运动速度和结构运动速度的法向分量相

等，

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right|_{x=(H-y)\tan\alpha}=\frac{\partial u}{\partial t}\cos\alpha,$$

式中　u 为坝体沿 x 方向的弹性位移；

x_1 为坝体垂直于倾斜面的坐标系。

② 在坝体底部垂直向的速度分量等于零，

$$V_y=\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{y=0}=0.$$

③ 在自由面，忽略重力波的影响，故可以认为

$$\frac{\gamma_0}{g}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)=0,\quad 即\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{x=H_1}=0.$$

④ 远离坝体时，流体没有运动，故

$$V_x=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{x\to\infty}=0.$$

（一）自由振动

设结构按如下规律进行自由振动，即

$$u(y,\ t)=\xi(y)T(t)=\xi(y)e^{i\omega t},\tag{5.6.2}$$

速度势 ψ 可表示为

$$\psi(x,\ y,\ t)=\psi(x,\ y)e^{i\omega t},\tag{5.6.3}$$

则上式可进一步表示为

$$\psi(x,\ y,\ t)=e^{i\omega t}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}A_n e^{-k_n x}\cos\lambda_n y,\tag{5.6.4}$$

式中

$$k_n=\sqrt{\lambda_n^2-\frac{\omega^2}{K^2}},\qquad \lambda_n=\frac{\pi n}{2H_s},$$

积分常数 A_n 可由满足边界条件① 来确定。这个条件建立了弹性变形 $\xi(y)$ 和速度势 ψ 之间的联系。由于现在的坝面是倾斜的，因此，要通过以下的坐标变换关系，条件① 的左端可进一步表示为

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}=\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_1}.\tag{5.6.5}$$

由坐标变换关系可知，

$$\left.\begin{aligned}y&=y_1\cos\alpha+x_1\sin\alpha,\\ x&=\overline{oo_1}+y_1\sin\alpha-x_1\cos\alpha.\end{aligned}\right\}\tag{5.6.6}$$

把式(5.6.4)代入边界条件①，并考虑到式(5.6.5)和(5.6.6)，则可得到

$$e^{i\omega t}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}A_n e^{-k_n x}\left[k_n\cos\alpha\cos\lambda_n y-\lambda_n\sin\alpha\sin\lambda_n y\right]\Big|_{x=(H-y)\tan\alpha}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\cos\alpha,$$

两端消去 $e^{i\omega t}$，则得

$$\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\lambda_n A_n e^{-k_n(H-y)\tan\alpha}[B_n\cos\alpha\cos\lambda_n y-\sin\alpha\sin\lambda_n y]$$

$$=i\,\omega\xi(y)\cos\alpha, \tag{5.6.7}$$

式中

$$B_n=\frac{k_n}{\lambda_n}.$$

当不考虑水体的可压缩性影响时，则 $B_n=1$，故式(5.6.7)可进一步表示为

$$\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\lambda_n A_n\exp[-\lambda_n(H-y)\tan\alpha]\cos(\lambda_n y+\alpha)=i\,\omega\xi(y)\cos\alpha. \tag{5.6.8}$$

式(5.6.7)和(5.6.8)中的系数 A_n，一般情况下，无法求得解析表达式。在 $\xi(y)$预先给定或近似地用无水振型代替有水振型后，就能用数值计算法求出 A_n。若令 $\xi(y)=1$，则就可以求得刚性动水压力。

若迎水面为垂直情形，则有

$$\sum_{n=1,3,5}^{\infty}A_n\lambda_n\cos\lambda_n y=i\,\omega\xi(y).$$

这个等式，可以考虑为按余弦展开的富氏级数，把上式两端乘以 $\cos\cdot\pi n/2H_s\cdot y$ 并从 0 到 H_s 积分得到

$$A_n=\frac{4\,i\,\omega}{\pi n}\int_0^{H_s}\xi(y)\cos\frac{\pi n}{2H_s}y\,dy. \tag{5.6.9}$$

这个式子在前面已多次出现过，毋需赘述。

下面考虑结构的自由振动，其运动微分方程为

$$R(\xi)-\frac{\rho F(y)}{g}\omega^2\xi(y)=\frac{4\gamma_0\omega^2}{g\,\pi}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-k_n(H-y)\tan\alpha}\cos\lambda_n y\cdot$$

$$\int_0^{H_s}\xi(y)\cos\frac{\pi n}{2H_s}y\,dy. \tag{5.6.10}$$

式中的 ω 为自振圆频率；$R(\xi)$为结构的弹性恢复力。对于弯曲变形为：

$$R(\xi)=\frac{d^2}{dy^2}\left(RJ(y)\frac{d^2\xi}{dy^2}\right),$$

仅考虑剪切变形时，

$$R(\xi)=-\frac{d}{dy}\left(\frac{GF}{k_0}\frac{d\xi}{dy}\right).$$

式(5.6.10)对于弯曲梁将包含五个积分常数，齐次解的四个常数 c_1，c_2，c_3，c_4和特解的一个常数 c_5。但是非常幸运的是，常数 c_5又可以通过前面四个常数来表示。因此，实际为四个常数。而式(5.6.7)、(5.6.8)和(5.6.9)可建立自由振动情况下 c_1, c_2，c_3，c_4和 A_n间的线性联系。同理，对于剪切梁将有三个积分常数，齐次解的二个常数 D_1，D_2和特解的一个常数 D_3，面 D_3也可以通过前面二个常数来表示，从而也可以通过式(5.6.7)或式(5.6.8)之间的关系来建立和 A_n间的线性联系。由梁的边界条件，就可以建立这些常数所满足的线性方程组，从方程组的系数行列式为零的条件，就可以获得结构和液体耦联振动的频率方程。关于频率方程的推导，将在第六章梁式结构的耦联振动中详细介绍。若自由振动的各项

参数一经求得，则就不难求得结构在地震作用下的反应。

二、等排水量法

考虑如图 5.6.2 所示的具有倾斜上游面的坝体，受到水平简谐地面运动 $a_{gx}=A\cos\omega t=\alpha g\cos\omega t$ 的作用[22]。a_{gx} 为水平地震加速度，A 为加速度的幅值，ω 为地震圆频率，α 为地震系数，g 为重力加速度。

令 u，ξ 分别代表水平速度分量及水平变位；v，η 分别代表垂直速度分量及垂直变位。如前面所述，水库中的流体仍需服从二维波动方程：

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=\frac{1}{K^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \qquad (5.6.11)$$

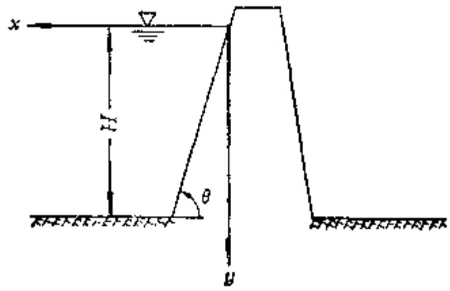


图 5.6.2

采用小扰动、无旋和理想流体的假定，并认为坝面是刚性体，自由水面波动影响不予考虑。令

$$P(x,y,t)=p(x,y)\cos\omega t,$$

则相应的边条件为

① 自由水面， $p|_{y=0}=0$，

② 水库的无穷远处， $p|_{x=\infty}=0$，

③ 库底水平边界上流体竖向加速度为零，

即
$$\frac{\partial p}{\partial y}_{y=H}=0\ ,$$

④ 坝面水体质点的法向速度恒与坝面接触点的法向速度相等。假定坝面法线对应于 x 轴和 y 轴的方向余弦为 L_x 和 L_y，则得到

$$uL_x-vL_y|_{x=f(y)}=V_n, \qquad (5.6.12)$$

式中 V_n 为坝面法向速度，$x=f(y)$ 为坝面的几何形态方程。

此外，对于二维问题，液体运动的欧拉方程(详见第一章)将为

$$\left.\begin{aligned}-\frac{g}{\gamma_0}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2},\\ -\frac{g}{\gamma_0}\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}.\end{aligned}\right\} \qquad (5.6.13)$$

若对式 (5.6.12) 就 t 微分，并引用式 (5.6.13)，则可得到

$$L_x\frac{\partial p}{\partial x}-L_y\frac{\partial p}{\partial y}\bigg|_{x=f(y)}=-\frac{\gamma_0}{g}AL_x=\alpha\gamma_0L_x, \qquad (5.6.14)$$

式中 γ_0 为水的单位体积重量。式 (5.6.14) 所表达的第四个边界条件，适用于二维情况的任意形状的坝面。采用变量分离法，结合边界条件①—③可得

$$p(x,y)=\sum_{n=1,3,5}^{\infty}A_ne^{-C_n\lambda_n x}\sin\lambda_n y, \qquad (5.6.15)$$

式中

$$\lambda_n=\frac{n\pi}{2H},$$

$$C_n=\sqrt{1-\frac{\omega^2}{K^2\lambda_n^2}}.$$

式 (5.6.15) 对我们已十分熟悉，但是现在的问题是如何结合边界条件④解出系数 A_n。一

般情况下，很难求出此系数的精确值。

当上游面为竖直面时，则 $x=0$，即代表坝面边界，此时

$$A_n\Big|_{\theta=90^\circ}=-\frac{8\,\alpha\gamma_0 H}{n^2\pi^2 C_n} \tag{5.6.16}$$

若将（5.6.16）代入式（5.6.15）则就是熟知的韦斯特加德解。对于 $\theta\neq 90^\circ$时可以设想

$$A_n=A_n|_{\theta=90^\circ}\cdot F_n(\theta), \tag{5.6.17}$$

式中　$F_n(\theta)$ 为 θ 的函数，校核条件是

$$F_n(\theta)|_{\theta=90^\circ}=1. \tag{5.6.18}$$

令 ds 为与速度 V_n 相垂直的坝面切线向微分长度，将式（5.6.12）两边乘以 ds，并由 $L_x ds=dy$，$L_y ds=dx$，即可得到

$$u dy-v dx=V_n ds. \tag{5.6.19}$$

显然，这是坝面流量的连续性方程，若写成积分形式

$$\int\left(u-v\frac{L_y}{L_x}\right)dy=\int V_n\frac{1}{Lx}dy \tag{5.6.20}$$

考虑到式（5.6.14）的关系，再对式（5.6.20）两边就 t 微分，则式（5.6.20）又可表示为

$$\int\left(\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{L_y}{L_x}\frac{\partial p}{\partial y}\right)dy=-\alpha\gamma_0\int dy. \tag{5.6.21}$$

式（5.6.21）是上游坝面任意分段均应满足的条件。这样，如不能求得富氏级数的显式时，可由分段积分求 A_n。需要求解的 A_n 有多少个，就将坝面分多少段，从而列出相应的代数方程组，解出 A_n。

（一）倾斜坝面的算式

现在以上游坝面倾角为 θ 的情况为例，推导出式（5.6.21）的具体算式。这里，式（5.6.21）中的方向余弦都是常数 $L_y=\cos\theta$，$L_x=\sin\theta$。将坝高先分成三段：$0-H/3$，$H/3-2/3\,H$，$2/3\,H-H$、取式（5.6.15）级数中的前三项代入式（5.6.21）并按上述分段定出积分上、下限。分三次积分即得到三元一次联立方程。

当不考虑压缩性影响（取 $C_n=1$）时，地震动水压力为

$$\begin{aligned}p=(y,t)=&A_1e^{-\lambda_1 y\,\mathrm{ctg}\theta}\sin\lambda_1 y+A_3e^{-\lambda_3 y\,\mathrm{ctg}\theta}\times\\&\times\sin\lambda_3 y+A_5e^{-\lambda_5 y\,\mathrm{ctg}\theta}\sin\lambda_5 y,\end{aligned} \tag{5.6.22}$$

式中 A_1，A_2 和 A_3 为由联立方程所求得的系数。

若级数取二项，但考虑压缩性，求得

$$\left.\begin{aligned}A_1&=0.8\frac{1}{C_1}\frac{1+C_1^2\mathrm{ctg}^2\theta}{1+\mathrm{ctg}^2\theta}\alpha\gamma_0He^{\frac{1}{6}\pi C_1\mathrm{ctg}\theta},\\A_3&=\frac{1}{C_3}\frac{1+C_3^2\mathrm{ctg}^2\theta}{1+\mathrm{ctg}^2\theta}\alpha\gamma_0H(0.39e^{-\frac{1}{6}C_1\pi\mathrm{ctg}\theta}-0.33)e^{C_3\pi\,\mathrm{ctg}\theta}.\end{aligned}\right\} \tag{5.6.23}$$

地震动水压力公式为

$$p(y,t)=A_1e^{-C_1\lambda_1 y\,\mathrm{ctg}\theta}\sin\lambda_1 y+A_3e^{-C_3\lambda_3 y\,\mathrm{ctg}\theta}\sin\lambda_3 y \tag{5.6.24}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}C_1&=\sqrt{1-7.75\left(\frac{H}{1000\,T}\right)^2},\quad C_3=\sqrt{1-0.86\left(\frac{H}{1000\,T}\right)^2},\\\lambda_1&=\frac{\pi}{2H},\qquad\qquad \lambda_3=\frac{3\pi}{2H}.\end{aligned}\right\} \tag{5.6.24}$$

为了便于应用，若级数取一项时，也能给出近似值：

$$p(y,t)=\frac{1}{C_1}e^{\frac{1}{6}C_1\pi\text{ctg}\theta}\left[p'_W-\frac{1}{2}C_1\left(\frac{y}{H}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{2}\text{ctg}\theta\right)\right]\alpha\gamma_0 H,\quad(5.6.25)$$

式中 C_1 见式（5.6.24），p'_W 为 $C_n=1$ 时韦斯特加德解的压力系数。

若在式（5.6.25）中的系数 p'_W 用韦氏简式，

即
$$p_W=\frac{7}{8}\alpha\gamma_0\sqrt{yH},$$

则

$$p'_W=\frac{7}{8}\sqrt{\frac{y}{H}}=0.875\sqrt{\frac{y}{H}}.$$

所以式（5.6.25）可以简化为

$$p(y,t)=\frac{1}{C_1}e^{\frac{1}{6}C_1\pi\text{ctg}\theta}\left[\frac{7}{8}-\frac{1}{2}C_1\sin\left(\frac{\pi}{2}\text{ctg}\theta\right)\right]\alpha\gamma_0\sqrt{yH}.\qquad(5.6.25)$$

图 5.6.3 表示用式（5.6.22）计算所得动水压力，并和岑格[20]、谢省宗[23]、诺别特瓦里杰[17]和苏联地震规范等计算结果作了比较（坝面倾角取 60°）。从比较可见，所述计算方法和岑格的实验曲线十分接近。

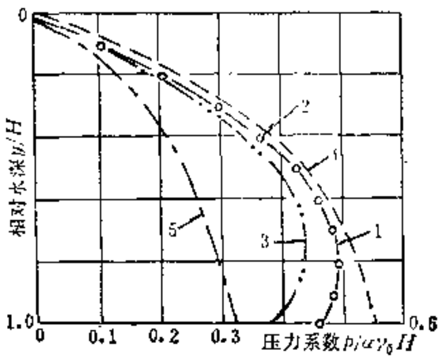


图 5.6.3

1——式（5.6.25）计算曲线；2——岑格实验值（电模拟法）；3——小参数法[23]；4——保角变换[17]；5——苏联地震规范计算；

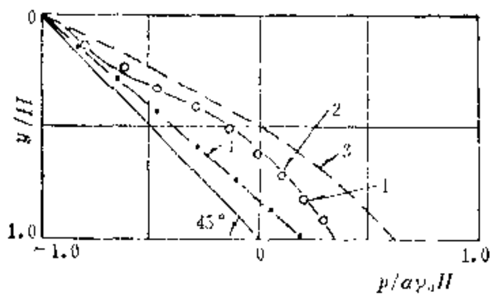


图 5.6.4

1——式（5.6.23）计算曲线；2——岑格实验值；3——陈振诚计算曲线[19]；4——苏联新地震规范计算

图 5.6.4 表示用式（5.6.22）和陈振诚计算结果的比较（取坝面倾角 $\theta=45°$）。

下面将式（5.6.25）应用于不考虑水的可压缩性情况（即 $C_n=1$），并与岑格的实验结果作了比较，示于图 5.6.5。

对一坝高为 100 米的实际工程，$\theta=\text{ctg}^{-1}0.5$，地震周期 $T=0.4$ 秒和 0.729 秒进行了计算分析。用上述公式（5.6.25）和下述的小参数解作了比较，结果为图 5.6.6 所示。

三、小参数法

小参数法的基本概念是用小参数 ε 来表示不规则域和规则域之间的差别。然后再通过坐标变换，把不规则域变成规则域。通过变换使求解的域变得很简单，但是，使求解的方程和边界条件却相应地变复杂了。该法系将所需求解的动水压力 P 或速度势 φ 按小参数 ε 的幂级数形式展开，再按 ε 的幂分离系数，即得一系列方程组，逐个求解方程组，就可得到一阶近似，二阶近似……，最后逼近于真实解。在文献[23]上曾经使用过这个方法。但是求解过

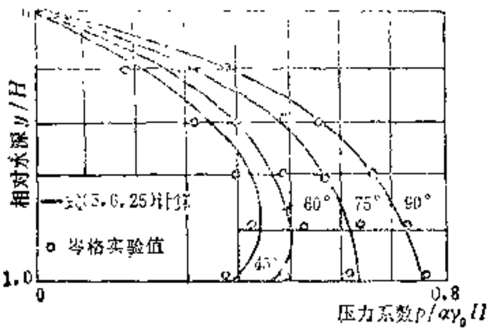


图 5.6.5

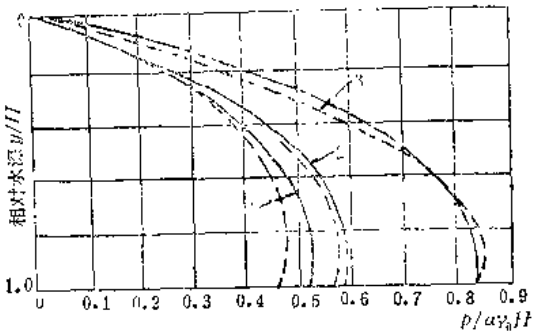
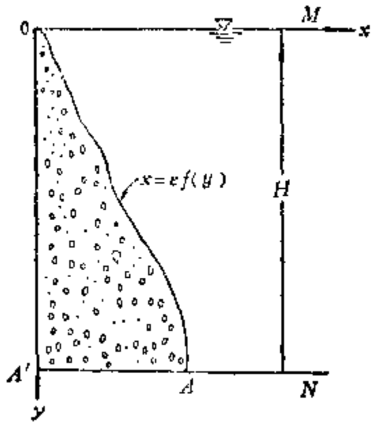


图 5.6.6

—— 公式 (5.6.25)； ---- 文献[23]；1——不计压缩性；2——计压缩性 ($T=0.729$)；3——计压缩性 ($T=0.40$)



5.6.7

程显然是繁冗的，这里我们将作概略的介绍，使读者能对本法的基本思路有所了解。现在假设有如图 5.6.7 所示的结构，并设坝体的上游面 OA 为某一形式的曲线，其方程为

$$x=\varepsilon f(y),$$

其中 ε 为小参数，表示不规则域 $OANM$ 和矩形域 $OA'NM$ 的差别。$f(y)$ 是给定的函数，随坝面的形式而定。假定 $f(y)$ 是一条光滑的曲线并为刚性坝面，坝体作谐和微幅振动，水体为理想液体，并考虑压缩性影响，水库向上游为无限长。

假定坝面作 $\alpha g e^{i\omega t}$ 的简谐振动，并引入速度势函数 $\bar{\psi}(x,y,t)$。令

$$\bar{\psi}(x,y,t)=i\psi(x,y)e^{i\omega t}, \tag{5.6.26}$$

则 ψ 所应满足的方程为

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\omega^2}{K^2}\psi=0. \tag{5.6.27}$$

求解式 (5.6.27) 所应满足的边界条件为

① $\psi|_{y=0}=0$,

② $\left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{y=H}=0$,

③ 在坝面各点，结构的振动速度和流体速度在坝面法线方向的投影相等，即

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}-\tan\theta\frac{\partial\psi}{\partial y}=-\frac{\alpha g}{\omega},$$

④ 在无穷远处，流体的速度势为零

$$\psi|_{x\to\infty}=0.$$

式中　α 为地震系数，θ 为坝面切线与 y 轴的夹角，$\tan\theta=\varepsilon f'(y)$，$f'(y)$ 为函数对 y 求导。

（一）基本方程组的解

采用坐标变换，令

$$\xi=x-\varepsilon f(y),\ \eta=y, \tag{5.6.28}$$

则可把如图 5.6.7 的任意形状的坝面，变为如图 5.6.8 所示的规则矩形域。

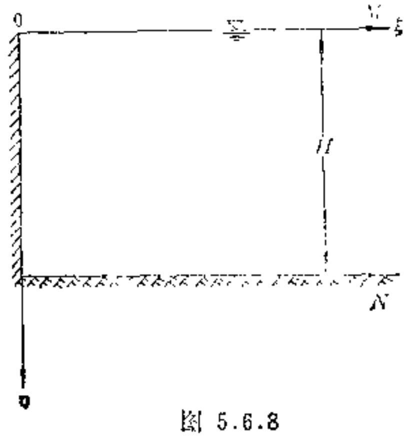


图 5.6.8

根据坐标变换公式，可得到

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y},$$

故

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\psi}{\partial y}=-\varepsilon f'(\eta)\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\frac{\partial\psi}{\partial\eta},\\
&\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial\xi},\\
&\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=[\varepsilon f'(\eta)]^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}-2\varepsilon f'(\eta)\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}-\varepsilon f''(\eta)\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2},
\end{aligned}\right\} \tag{5.6.29}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}.$$

将式（5.6.29）各式代入式（5.6.27），则得

$$[1+\varepsilon^2 f'^2(\eta)]\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}-2\varepsilon f'(\eta)\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}-\varepsilon f''(\eta)\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\frac{\omega^2}{K^2}\psi=0. \tag{5.6.30}$$

边界条件亦可相应地改为

①′ $\psi|_{\eta=0}=0$，

②′ $\left|\dfrac{\partial\psi}{\partial\eta}-\varepsilon f'(\eta)\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi}\right|_{\eta=H}=0$，

③′ $\left|\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi}+\varepsilon^2 f'^2(\eta)\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi}-\varepsilon f'(\eta)\dfrac{\partial\psi}{\partial\eta}\right|_{\xi=0}=\dfrac{-\alpha g}{\omega}$，

④′ $\psi|_{\xi\to\infty}=0$.

由此可见，经过座标变换后，使我们求解 ψ 所定义的区域十分简单，但是 ψ 所满足的方程和边界条件却变得复杂了。可是由于在方程（5.6.30）和边界条件 ①′…④′ 之中，经坐标变换而新增加的项在前面都带有待定的小参数 ε，如果这个参数是足够小的话，我们可以令解的形式为

$$\psi=\psi_0+\varepsilon\psi_1+\varepsilon^2\psi_2\cdots. \tag{5.6.31}$$

把式（5.6.31）代入式（5.6.30）和边界条件①′…④′，并按小参数 ε 的幂分离系数，即得一系列方程组

$$\frac{\partial^2\psi_0}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi_0}{\partial\eta^2}+\frac{\omega^2}{K^2}\psi_0=0; \tag{5.6.32}$$

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\eta^2}+\frac{\omega^2}{K^2}\psi_1=2f'(\eta)\frac{\partial^2\psi_0}{\partial\xi\partial\eta}+f''(\eta)\frac{\partial\psi_0}{\partial\xi}; \tag{5.6.33}$$

…………………………………………

以及边界条件

$$\psi_0|_{\eta=0}=0,\ \frac{\partial\psi_0}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=H}=0,\frac{\partial\psi_0}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0}=-\frac{\alpha g}{\omega},\ \ \psi_0|_{\xi\to\infty}=0; \tag{5.6.34}$$

$$\psi_1|_{\eta=0}=0,\ \left|\frac{\partial\psi_1}{\partial\eta}-f'(\eta)\frac{\partial\psi_0}{\partial\xi}\right|_{\eta=H}=0,\left|\frac{\partial\psi_1}{\partial\xi}-f'(\eta)\frac{\partial\psi_0}{\partial\eta}\right|_{\xi=0}=0,\psi_1|_{\xi\to\infty}=0; \tag{5.6.35}$$

…………………………………………………………

1．首先求解 ψ_0

由方程（5.6.32）和边条件（5.6.34）可见，这相当于坝面是垂直情形的解。这个解我们已在本章第四节中求得（式 5.4.5）。若采用本节的符号，则相应的速度势为

$$\psi_0=\frac{8\alpha gH}{\omega\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2C_n}e^{-q_n\xi}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2H}\eta, \tag{5.6.36}$$

式中

$$q_n=\frac{2n+1}{2H}\pi C_n,\ \ C_n=\sqrt{1-\frac{4H^2\omega^2}{(2n+1)^2\pi^2K^2}}.$$

相应的动水压力为

$$P_0=\frac{8\alpha\gamma_0H}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2C_n}e^{-q_n\xi}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2H}\eta. \tag{5.6.37}$$

2．求解 ψ_1

在已经求得 ψ_0 的基础上，就可以由式（5.6.33）和边界条件（5.6.35）求 ψ_1。我们看到 ψ_1 是非齐次的二阶线性方程和非齐次边界条件问题。按照一般解法，可以把解分为两部分：① 齐次方程和非齐次边界条件，② 非齐次方程和齐次边界条件。因此，ψ_1 的解可由三部分解叠加而成：

$$\psi_1=\psi_a+\psi_b+\psi_c. \tag{5.6.38}$$

① ψ_a 须满足下列齐次方程和非齐次边界条件：

$$\frac{\partial^2\psi_a}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi_a}{\partial\eta^2}+\frac{\omega^2}{K^2}\psi_a=0; \tag{5.6.39}$$

$$\psi_a|_{\eta=0}=0,\ \frac{\partial\psi_a}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=H}=0,\frac{\partial\psi_a}{\partial\xi}\bigg|=\frac{4\alpha gf(\eta)}{\omega\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)C_n}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2H}\eta,$$

$$\psi_a|_{\xi\to\infty}=0. \tag{5.6.40}$$

由方程（5.6.39）和（5.6.40）得出

$$\psi_a=\sum_{k=0}^{\infty}A_{1k}\sin\frac{2k+1}{2H}\pi\eta e^{-q_k\xi}. \tag{5.6.41}$$

代入边界条件第三式（$\xi=0$）决定待定常数

$$A_{1k}=-\frac{8\alpha g}{\pi\omega Hq_k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)C_n}F_1(n,k), \tag{5.6.42}$$

式中

$$F_1(n,k)=\int_0^H f'(\eta)\cos\frac{2n+1}{2H}\pi\eta\sin\frac{2k+1}{2H}\pi\eta d\eta. \tag{5.6.43}$$

把 A_{1k} 代入式 (5.6.41) 后，我们有

$$\psi_a=-\frac{16\alpha g}{\pi^2\omega}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_1(n,k)}{(2k+1)(2n+1)C_kC_n}\sin\frac{2k+1}{2H}\pi\eta e^{-q_k\xi}. \tag{5.6.44}$$

② ψ_b 须满足下列齐次方程和非齐次边界条件

$$\frac{\partial^2\psi_b}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi_b}{\partial\eta^2}+\frac{\omega^2}{K^2}\psi_b=0; \tag{5.6.45}$$

$$\psi_b\Big|_{\eta=0}=0,\ \frac{\partial\psi_b}{\partial\eta}\Big|_{\eta=H}=-\frac{4\alpha gf'(H)}{\pi\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}e^{-q_n\xi},\ \frac{\partial\psi_b}{\partial\xi}\Big|_{\xi=0}=0,\ \psi_b\Big|_{\xi\to\infty}=0. \tag{5.6.46}$$

求解式(5.6.45)及边界条件(5.6.46)可以采用富里哀余弦变换，令

$$\bar{\Phi}(h,\eta)=\int_0^{\infty}\psi_b(\xi,\eta)\cos h\xi d\xi,$$

则我们有以下关系式：

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{\infty}\frac{\partial^2\psi_b}{\partial\xi^2}\cos h\xi d\xi=-h^2\bar{\Phi}_b(h,\eta),\\&\int_0^{\infty}\frac{\partial^2\psi_b}{\partial\eta^2}\cos h\xi d\xi=\bar{\Phi}_b''(h,\eta).\end{aligned}\right\} \tag{5.6.47}$$

对式(5.6.45)作变换，并以式(5.6.47)代入，得

$$\bar{\Phi}_b''-\left(h^2-\frac{\omega^2}{K^2}\right)\bar{\Phi}_b=0. \tag{5.6.48}$$

对有关 η 的边界条件两端乘以 $\cos h\xi d\xi$ 并从 0—∞积分，即得到

$$\bar{\Phi}|_{\eta=0}=0,\bar{\Phi}'|_{\eta=H}=-\frac{4\alpha gf'(H)}{\pi\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\left(\frac{q_n}{q_n^2+h^2}\right). \tag{5.6.49}$$

由式(5.6.48)和(5.6.49)，得出解

$$\bar{\Phi}_b(h,\eta)=-\frac{4\alpha gf'(H)}{\pi\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nq_n}{(2n+1)(q_n^2+h^2)}\frac{\sinh\sqrt{h^2-\frac{\omega^2}{K^2}}\eta}{\sqrt{h^2-\frac{\omega^2}{K^2}}\cosh\sqrt{h^2-\frac{\omega^2}{K^2}}H}.$$

再对上式进行富氏变换的反演，得出

$$\psi_b(\xi,\eta)=-\frac{8\alpha gf'(H)}{\pi^2\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nq_n}{(2n+1)}\int_0^{\infty}\frac{\sin h\sqrt{h^2-\frac{\omega^2}{K^2}}\eta}{(q_n^2+h^2)\sqrt{h^2-\frac{\omega^2}{K^2}}\cos h\sqrt{h^2-\frac{\omega^2}{K^2}}}\cos l\xi d\xi.$$

围绕全部极点积分，得出解的最终形式为

$$\psi_b(\xi,\eta)=\frac{8\alpha gf'(H)}{\pi\omega}\left\{\sum_{\substack{n=0\\(n\neq k)}}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}q_ne^{-q_k\xi}}{(2n+1)(q_k^2-q_n^2)q_kH}\sin\frac{2k+1}{2H}\pi\eta-\right.$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-q_n\xi}}{2H(2n+1)q_n^2}\left[\left(q_n\xi+1+\frac{2H^2\pi^2q_n^2}{(2n+1)^2}\right)\sin\frac{2n+1}{2H}\pi\eta+\frac{2Hq_n^2\eta}{(2n+1)\pi}+\right.$$

$$\times \cos\frac{2n+1}{2H}\pi\eta \Bigg]\Bigg\}. \tag{5.6.50}$$

③ ψ_c 须满足非齐次方程和齐次边界条件

$$\frac{\partial^2\psi_c}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi_c}{\partial\eta^2}+\frac{\omega^2}{K^2}\psi_c=\frac{4\alpha g}{\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{f'(\eta)}{H}\cos\frac{2n+1}{H}\pi\eta+\frac{f''(\eta)}{(2n+1)\pi}\times\right.$$

$$\left.\times\sin\frac{2n+1}{2H}\pi\eta\right]e^{-q_n\xi}\quad, \tag{5.6.51}$$

$$\psi_c\Big|_{\eta=0}=0,\frac{\partial\psi_c}{\partial\eta}\Big|_{\eta=0}=0,\frac{\partial\psi_c}{\partial\xi}\Big|_{\xi=0}=0,\psi_c\Big|_{\xi\to\infty}=0. \tag{5.6.52}$$

求解上式时，可令

$$\left.\begin{aligned}\psi_c(\xi,\eta)&=\sum_{k=0}^{\infty}\Phi_k(\xi)\sin\frac{2k+1}{2H}\pi\eta,\\ \Phi_k(\xi)&=\frac{2}{\pi}\int_0^H\psi_c(\xi,\eta)\sin\frac{2k+1}{2H}\pi\eta d\eta.\end{aligned}\right\} \tag{5.6.53}$$

将式(5.6.51)两端乘以 $\sin\frac{2k+1}{2H}\pi\eta$ 并对 η 从 0—H 积分，即得 $\Phi_k(\xi)$ 所应满足的方程为

$$\Phi_k''(\xi)-q_k^2\Phi_k(\xi)=$$

$$=-\frac{8\alpha g}{\omega H}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{F_1(n,k)}{H}+\frac{F_2(n,k)}{(2n+1)\pi}\right]e^{-q_n\xi}, \tag{5.6.54}$$

边界条件为

$$\Phi_k'(\xi)|_{\xi=0}=0,\ \Phi_k(\xi)|_{\xi\to 0}=0. \tag{5.6.55}$$

式中 $F_1(n,k)$可由式(5.6.43)确定。

$$F_2(n,k)=\int_0^H f''(\eta)\sin\frac{2n+1}{2H}\pi\eta\sin\frac{2k+1}{2H}\pi\eta d\eta. \tag{5.6.56}$$

最后，得到满足全部边界条件的解为

$$\psi_c(\xi,\eta)=-\frac{8\alpha g}{\omega H}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{q_n^2-q_k^2}\left[\frac{F_1(n,k)}{H}+\frac{F_2(n,k)}{(2n+1)\pi}\right]e^{-q_n\xi}\sin\frac{2k+1}{2H}\pi\eta+$$

$$+\frac{8\alpha g}{\omega H}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{n=0\\(n\neq k)}}^{\infty}\frac{q_n}{q_k(q_n^2-q_k^2)}\left[\frac{F_1(n,k)}{H}+\frac{F_2(n,k)}{(2n+1)\pi}\right]e^{-q_k\xi}\sin\frac{2k+1}{2H}\pi\eta+$$

$$+\frac{4\alpha g}{\omega H}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{q_k}\left(\frac{1}{q_k}+\xi\right)\left[\frac{F_1(n,k)}{H}+\frac{F_2(n,k)}{(2n+1)\pi}\right]e^{-q_k\xi}\sin\frac{2k+1}{2H}\pi\eta.$$

因此，在简谐地震波作用下，考虑水体的可压缩性影响后速度势 ψ 的解为：

$$\psi=\psi_0+\varepsilon\psi_1=\psi_0+\varepsilon(\psi_a+\psi_b+\psi_c). \tag{5.6.58}$$

从而，坝面的动水压力为

$$p=-\frac{\gamma_0}{g}\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\gamma_0}{g}\frac{\partial}{\partial t}[\psi_0+\varepsilon(\psi_a+\psi_b+\psi_c)]e^{i\omega t}. \tag{5.6.59}$$

从以上分析可以看出，若要求高阶近似时，则计算公式是相当繁冗的。

3．倾斜坝面的地震动水压力

有如图 5.6.9 所示的平直倾斜坝面，方程式为

$$x=\tan\theta y=\varepsilon y, \tag{5.6.60}$$

其中 θ 为坝面与铅垂线的倾角，因此，小参数 $\varepsilon=\tan\theta$. 这样，可以得到

$$f(\eta)=\eta,\ f'(\eta)=1,\ f''(\eta)=0.$$

从而有

$$F_1(n,k)=\int_0^H\cos\frac{2n+1}{2H}\pi\eta\sin\frac{2k+1}{2H}\pi\eta d\eta$$

$$=\begin{cases}\dfrac{H}{(2k+1)\pi};\ (n=k)\\[2mm] \dfrac{H}{2}\dfrac{[(2k+1)-(-1)^{k+n}(2n+1)]}{\pi(k-n)(k+n+1)}.\ (n\neq k)\end{cases} \tag{5.6.61}$$

$$F_2(n,k)=0.$$

以式 (5.6.61) 代入式 (5.6.59) 即得

$$P=\frac{8\gamma_0\alpha H}{\pi^3}\Bigg\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi}{(2n+1)^2C_n}\sin\frac{2n+1}{2H}\pi\eta+$$

$$+\tan\theta\Bigg[\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}(2n+1)-(2k+1)}{(k-n)(k+n+1)(2k+1)C_nC_k}\sin\frac{2k+1}{2H}\pi\eta+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}C_n}{(2k+1)(k-n)(k+n+1)C_k}\sin\frac{2k+1}{2H}\pi\eta-$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2+C_k^2}{(2k+1)^3}\sin\frac{2k+1}{2H}\pi\eta+\frac{\pi}{H}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\eta\cos\frac{2k+1}{2H}\pi\eta-$$

$$-2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}(2n+1)-(2k+1)}{(2k+1)(k-n)(k+n+1)[(2k+1)C_k+(2n+1)C_n]}\sin\frac{2k+1}{2H}\pi\eta\Bigg]\Bigg\}. \tag{5.6.62}$$

当忽略水体的可压缩性影响，即令 $C_n=C_k=1$ 时，通过数值计算，对式 (5.6.62) 就可得到下列简化公式：

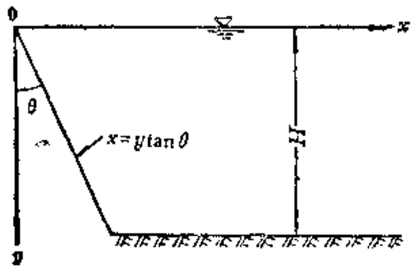


图 5.6.9

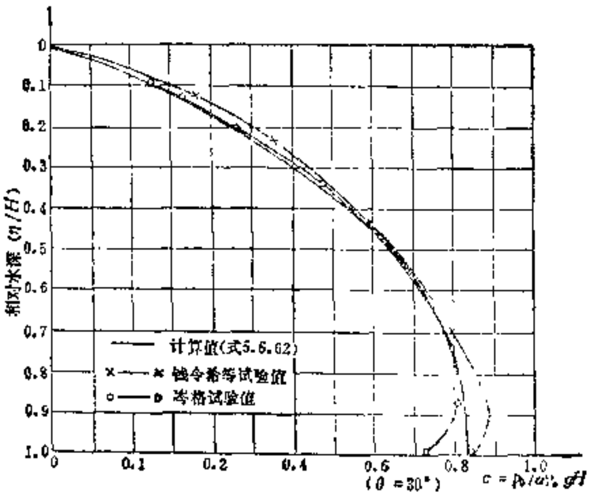


图 5.6.10

$$p=\gamma_0 \alpha H\left[\frac{7}{8}\sqrt{\frac{\eta}{H}}-\frac{2\tan\theta}{9}\exp\left(\frac{\eta}{H}\right)\right], \qquad (5.6.63)$$

$$(\theta\leqslant 30^\circ)$$

曾经应用式(5.6.62)的计算结果，和岑格、钱令希等试验结果作了比较[20,24]，见图 5.6.10。

四、介绍一些研究结果

岑格和赫菲利[25]曾利用电模拟法求得了作用于竖直面及倾斜面上的动水压力分布，并和近似公式的结果进行了比较，见图 5.6.11。从图上可以看出，经规一化后所表示的压力分布，和竖直面的分布没有多大的差别。总的压力值常比竖直面的为小。若和竖直面的倾角较小时，其变化可近似地按下式计算：

$$1-\frac{\theta}{100}, \qquad (5.6.64)$$

式中　θ——结构倾斜坡面与垂线的交角，以度表示。

图 5.6.12 表示倾斜上游面的压力系数和坝面所成角度 θ 值之间的关系。

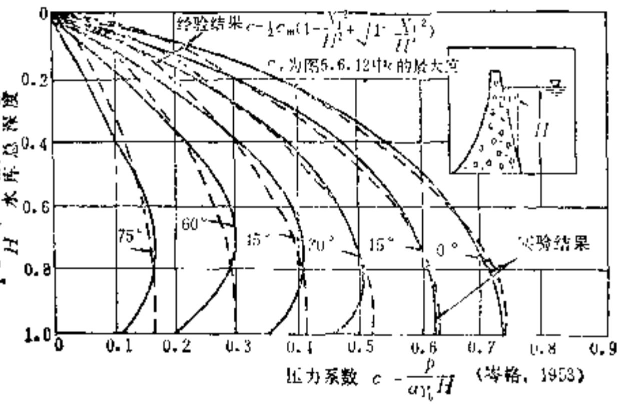


图 5.6.11

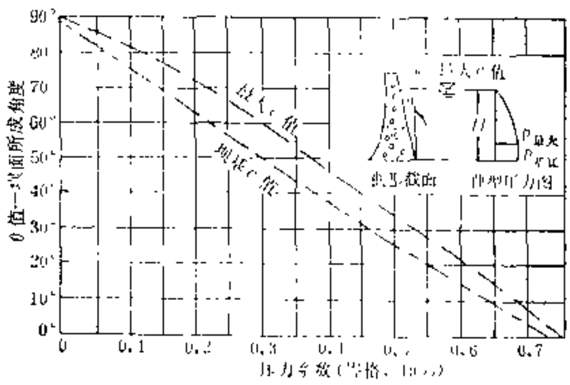


图 5.6.12

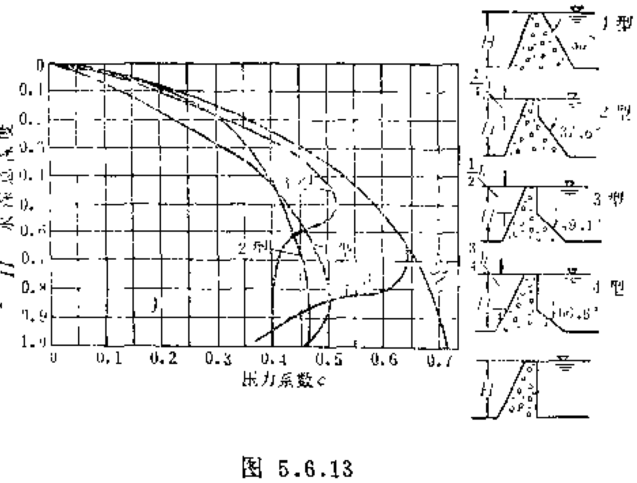


图 5.6.13

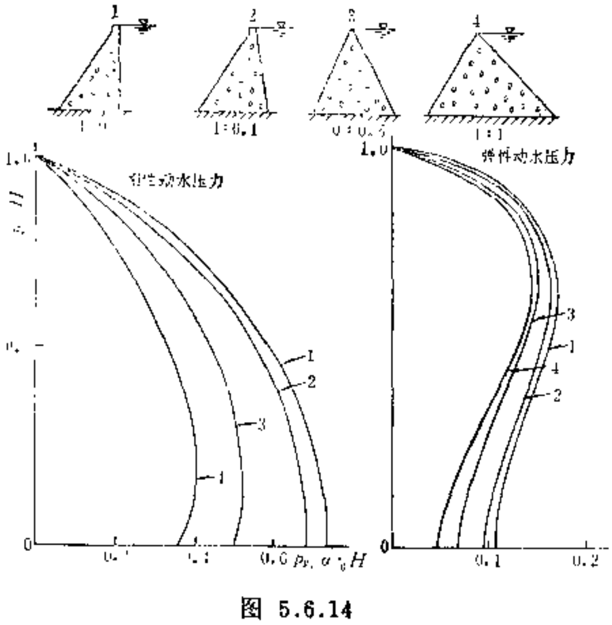


图 5.6.14

对上游面有两个折坡线的情况，其结果列于图 5.6.13。由图可见，当坝体全高的一半为竖直面时，在大多数情况下，其压力可按全高为竖直面考虑而不致有很大的误差。

大连工学院的研究表明[26]，坡度对于刚性动水压力及弹性动水压力的影响基本上服从于同一规律，和岑格的实验结果大体上一致，见图 5.6.14。并建议对有倾斜迎水面的动水压可采用 $\alpha/90°$ 予以折减，α 为迎水面的倾角，即坝面与水平线的交角。应当指出，这个公式和前面所介绍的式(5.6.64)没有本质上的差别，只是坐标选取有所不同而已。

第七节 若干问题的讨论

一、水体可压缩性影响

从上面的分析中，我们可以看到在考虑了水体的可压缩性影响之后，将使原来所需求解的拉普拉斯方程转为相应的波动方程。求解过程也远为复杂，而更为重要的是当考虑了水体的压缩性影响后，使求得的动水压力将和扰动频率发生联系，并将造成扰动和反应之间的相位差。因此，不能采用附加质量的方法来求解耦联振动方程。广为采用的振型分解法也将随之失效。对于较复杂的坝面边界情况，也将无法获得严格的解析解。在这一节里，我们将进一步阐述在什么情况下要考虑压缩性的影响，而在什么条件下，可以忽略这种影响。很多研究者认为：当分析包括巨大水体的变形或者很高的水压力现象时，考虑水体的可压缩性影响将是重要的。通常，在地震工程中经常遇到的是巨大水位问题。因此，我们可以断言，在研究高坝的抗震问题时，水体可压缩性影响是不能忽略的。此外，对自由水面流体动压力现象的模型研究，也往往由于不能合适地模拟水体的可压缩性影响而趋于失败。所以，对压缩性影响的深入研究也将是有意义的。

下面，我们再来讨论关于半无限水库，在忽略表波影响后，在水平简谐地面运动作用下的二维问题。如所周知，在这些条件下问题的解首先是由韦斯特加德在 1933 年所得到(并最先应用于地震工程)。当若需考虑水体可压缩性影响时的侧向力反应详见式(5.3.15)和(5.3.17)。若不考虑水体的可压缩性影响时，则仅需在上述公式中的 $\sqrt{\lambda_n^2-\omega^2/K^2}$ 处用 λ_n 代替即可。

若 ω/K 不超过 λ_1，则该公式可以适用。假使我们取水的体积变化模量为 2.11×10^5 吨/米^2，那么，我们会发现所得的解可以应用至 $H/T\leqslant360$ 米/秒。这里 $T=2\pi/\omega$ 为扰动力的周期。在 $H/T=0$ 时，则由于忽略水体压缩性影响所造成的误差等于零。参照所求的解答可知，作用于坝体动水压力的合力，由于忽略可压缩性而造成的误差将随 H/T 单调增长，当 $H/T=100$ 米/秒时，其误差小于 4%，当 H/T 接近于 360 米/秒时达到100%[27]。在这个临界值上，韦斯特加德解所给出的压力为无限大。若将分布压力归一为以合力表示后，在低于第一临界频率时，即使是对于有限长水库，误差随 H/T 的变化也不是十分敏感的。但在第一临界频率以后，则无论是其压力的分布规律，或是总合力都将有较大的变化，并且扰动频率和水库尺寸对它们的影响显得十分敏感。

通常，考虑水体压缩性影响后的动水压力的近似计算公式，最为简单的方法是按不可压缩流体计算所得的压力乘一个系数 K_1，即

$$p_c=p_{nc}\cdot K_1, \tag{5.7.1}$$

式中 p_c为考虑压缩性影响的压力，

p_{nc}为不考虑压缩性影响的压力，

$$K_1=\nu_1/\mu_1,$$

$$\nu_1=\sqrt{\lambda_n^2-\frac{\omega^2}{K^2}},\ \mu_1=\frac{(2n-1)\pi}{2H},\ K=1430\text{ 米/秒。}$$

比例因子 K_1 的量纲为米/秒，其值并和 H/T 有关。可以表示为

$$\left[1-\left(\frac{H}{360T}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{5.7.2}$$

以后我们将会看到，虽然这个近似公式在接近自由表面处得到了高估的压力值，在接近于坝底处得到了低估的压力值，但对于动水压力的总合力的误差是不大的。

到此为止，我们仅认为水体是可压缩的，但是仍然认为库底和库壁是不可压缩的。从前面已经讨论过的关于垂直地面运动作用时的影响可见，围绕着水库材料的可变形性将会大大降低动水压力。这种降低往往被解释为在液体中的声波有一部分折回到岩石里，只有一部分反射到液体之中。

界面的表面条件，有可能使实际上和下卧层材料变形无关的波的反射近乎消失。这种现象已为实验所证实。日本畑野正曾在钢质水箱的底部及侧壁敷设沙粒垫层，然后使水箱经受强迫振动，发现波的反射近乎消失[28]。在坝体的原型强迫振动试验中他也证实了几乎没有波的反射。因此，有些研究者认为，界面的反射实际上是可以忽略的。然而，也不应当由此而认为在这样条件下的动水压力，将和假定流体是不可压缩体时所求得的动水压力完全相同，两者之间的差别，可以从一矩形水箱中作用一个几乎是瞬时脉冲后所产生的压力来说明。当水箱中所装载的是压缩性流体时，压力脉冲先向上部行进然后传向下部。作用于任一壁面每单位宽度的最大水压力的合力等于脉冲压力乘以脉冲的长度。而当流体为不可压缩性时，最大的合力等于脉冲压力乘以壁面的全高[27]。因此，为了研究流体水压力而模拟水库时，不能忽略掉流体的可压缩性。

乔波拉曾根据不同坝高，用美国 1940 年埃尔森特罗地震加速度进行了动水压力的实时分析[6]。图 5.7.1 表示这次地震的南北分量和竖向分量。水库深度取 30.5 米，91.5 米和 183 米。压力按式(5.3.22)和式(5.5.19)求得。对任意时刻的总侧向力可由压力沿坝体全高积分而得。底部的弯矩也可以由积分面得。所求得的数值已和静水压力归一化后列于图 5.7.2、图 5.7.3 和图 5.7.4。

图 5.7.2 为对于 30.5 米水库深度所得到并经过归一化后的基底侧向力和弯矩随时间的变化过程（地震加速度为水平南北分量），侧向力的绝对最大值为 0.44，最大弯矩的绝对值为 0.5。反应值随时间的变化规律非常类似于扰动加速度。分析其原因是由于这种水库的自振频率是十分高的（$\omega_1=74.1$ 弧度/秒），在地震作用时，系统类似于一个刚性体。对于竖向地震加速度作用下的反应，则在几乎是在第一自振频率 $\omega_1=74.1$ 弧度/秒时出现了很大的峰值。动水压力约为静水压力的三倍。估计这是由于系统中不考虑能量耗散，以及所考虑的竖向分量具有很强的高频分量所造成。

图 5.7.3 为 91.5 米水库深度时的计算结果。但此时在水平地震加速度作用下的反应，其变化规律和作用的加速度图谱表现出很大的不同。经过归一化以后的最大总侧向力和弯矩为 0.57 和 0.64。在对竖向分量的反应中，当频率在 4 周/秒和 12 周/秒时显示了十分明显的卓越周期的特点。

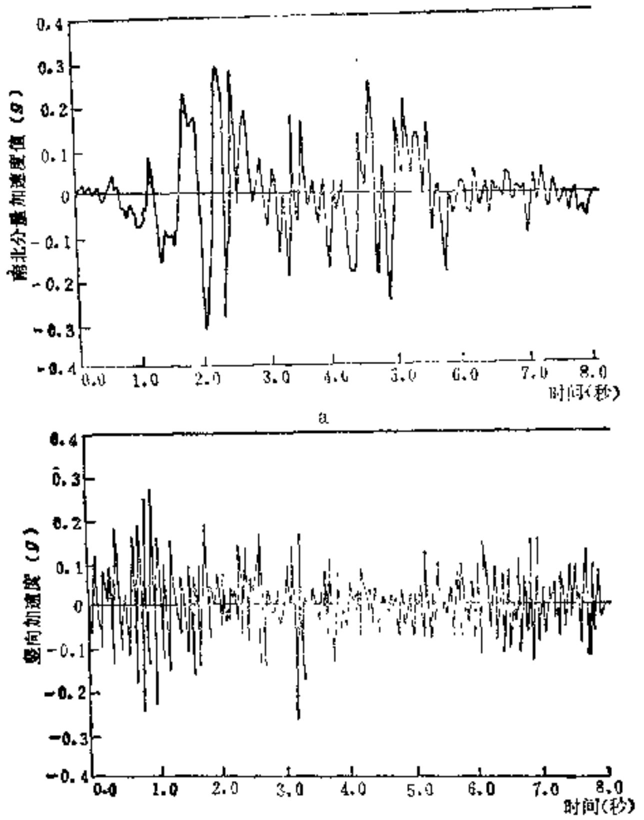


图 5.7.1

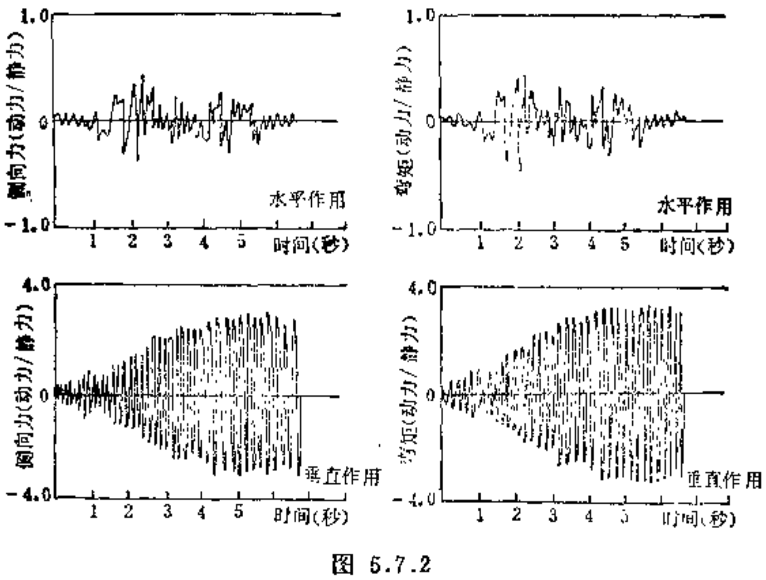


图 5.7.2

图 5.7.4 为 183 米水库深度时的计算结果。对于水平分量的反应，其最大侧向力和弯矩经归一化后为 0.71 和 0.80。而在频率为 2 周/秒时显示了卓越周期的特点。在竖向分量作用下，经归一化后的侧向力反应约为 0.25，并以每秒约为 2 周变动。

从以上结果可以看出，当水体考虑为不可压缩性时，则侧向力反应将和地面加速度的实时记录完全相同。见式（5.3.36）和式（5.5.22）。计算中所采用的埃尔森特罗地震最大的

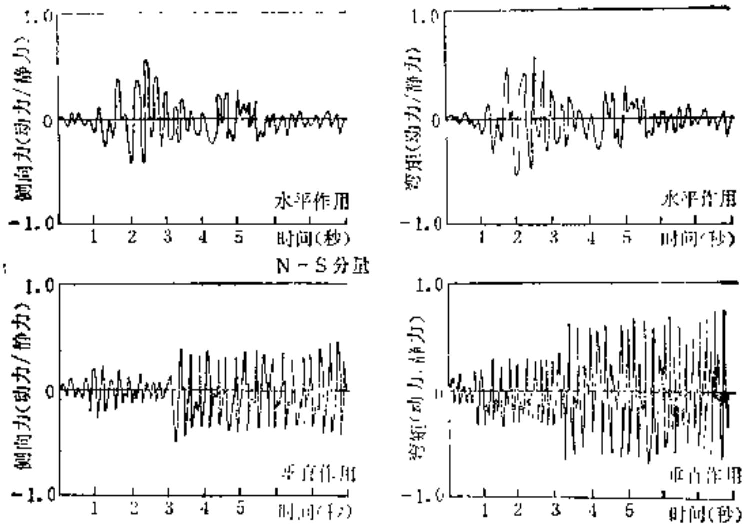


图 5.7.3

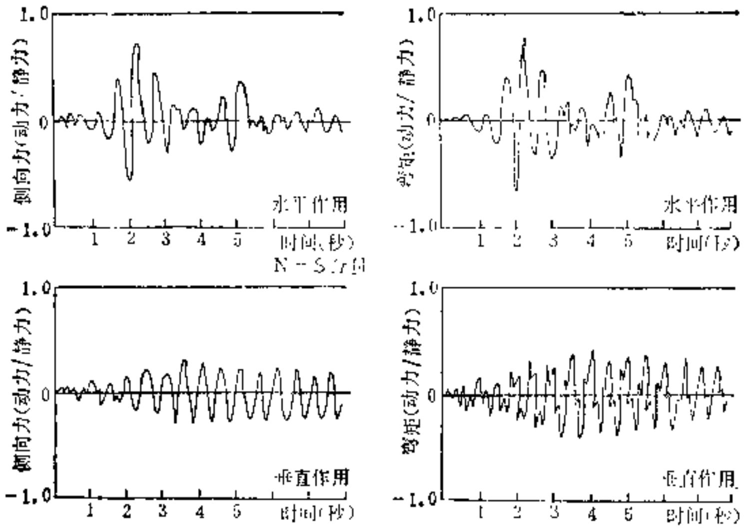


图 5.7.4

水平地震加速度 $\ddot{u}_g(t)=0.32\,g$，最大竖向地震加速度 $\ddot{v}_g(t)=0.28\,g$，在南北分量及竖向分量作用下，分别按式（5.3.26）和式（5.5.22）计算结果，经归一化后侧向力反应的绝对值亦为 0.35 和 0.28。表 5.7.1 列出了考虑及不考虑水体可压缩性影响时的结果。

表 5.7.1　**最大侧向力反应比较表**

水库深	考虑压缩性	忽略压缩性	误差百分比
31.5米	0.44	0.35	20
91.5米	0.57	0.35	39
183米	0.71	0.35	51

因此，假使仅就最大反应而论，则从上面的比较已可以看出忽略或者考虑水体可压缩性影响时误差的数量级。

当水体可压缩性影响可以忽略时，则对所有的水库深度其反应均和地面加速度的变化相同。而当考虑水体的可压缩性影响后，且又是较大的库深时，则反应和实际地面加速度的变化很少有相似之处，说明动水压力不能用附加质量代替。这说明对于深库来说，将会影响动水压力的反应特性，从而使坝体的反应也会因此而有所不同。

二、表面重力波的影响

众所周知，若在分析中要精确地考虑重力波动的影响，则在自由水面应服从泊松条件，即

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\phi}{\partial y}=0. \tag{5.7.3}$$

在第三章贮液容器的计算中，由于对这种情况下重力波的影响比较重要，所以我们在问题的求解时精确地满足了这个条件。如果在分析中允许忽略重力波的影响，则式（5.7.3）将由下面的简化条件所取代：

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=0. \tag{5.7.4}$$

业已证明[27]，对于具有竖立面及半无限水库的坝体，假定 H/T 不小于 75 米/秒，则用简化边界条件（5.7.4）代替精确条件(5.7.3)，对作用在坝上的总压力所产生的误差是不大的。若 $H/T\geqslant 4.2\sqrt{H}$，则对总压力的误差不超过 5%；$H/T=2.6\sqrt{H}$，则对总压力的误差不超过 20%。

H 和 T 分别用米和秒表示。

对于高度为 100 米的坝体，这些限制为 $H/T\geqslant 42$ 及 26 米/秒，或者是 $T\leqslant 2.38$ 及 3.85 秒。这种 5～20% 的误差估计是比较保守的上限值，真正的误差可能还要小一些。对于非常高的坝体，若能符合 H/T 大于 75 米/秒则仍可考虑采用式（5.7.4）。而这个数值还远远小于第一临界值 360 米/秒。因此，一般说来，由简化边界条件所计算的总侧压力值将不会导致很大的误差。但是和较长的地震波卓越周期相应所计算的侧压力值，在靠近表面边界处可能会有相当可观的误差。

若按照泊松条件计算时，会产生附加的临界频率，它们对于水库的尺寸是非常敏感的。对于高度 H 等于半径 R 的圆柱形水箱，第一临界频率为 $\omega^2=1.75\,g/H$，而对于正方形水箱其第一临界频率为 $\omega^2=\pi g/H$。对高度为 100 米的坝体相应的周期为 $T=1.13$ 和 1.52 秒。

除了非常特殊的水箱尺寸外，这些振型很容易衰减掉，且其频率和振幅无关，这些特点，即便是对于重力波的高振型也是非常明显的。在实验室内的水箱试验中证实，要在可观范围内激起这些振型是困难的。

从以上讨论可以作出这样的结论，即重力波动的临界频率对于推导作用在坝上的水压力合力没有很大的影响。但对非常高耸的结构尚有一些疑问，即由于在自由水面采用了简化的边界条件，有可能会低估地震长周期分量部分的作用。但即便是对于很高的坝，由此所造成的误差也不会超过 20%。

虽然，这些比较可进一步证明对按简化边界条件来计算总合力的可信性，但是，重力波对于接近自由表面处作用于坝体的压力将达到相当可观的数值。

三、水库长度 L 及两端有不同运动相位时的影响

当水库长度为有限值时的简谐稳态振动分析已在本章的第二节中，作了比较详尽的讨论。

这里我们将进一步研究当坝体和水库彼岸之间有相位差时该如何考虑。巴斯塔曼特(Bustamante)曾提出过一种简便的方法[27]，即先求出 $x=0$ (坝面) 及 $x=L$ (库对岸) 两处的压力，然后，采用简单叠加的办法来反推坝体和库岸呈反相位运动时的压力值

一种对于我们富有实际意义的情况是 $\ddot{U}_g(x=0)=-\ddot{U}_g(x=L)$，即两端呈反相位运动情况。从对称性考虑，十分明显，作用于坝面的压力，将完全和 $\ddot{U}_g$ $(x=L/2)=0$ 的情况相等。这样，若已求得当水库一端侧壁保持静止时作用于坝面的压力，则也容易求出当坝面和另一侧壁（对岸）相位差成 180° 时压力值。若令第①种情况代表仅一侧壁运动时坝面产生的压力，并以 p_1 表示；第②种情况代表两侧壁作相对运动，坝面产生的压力以 p_2 表示；那么，第③种情况即当水库两端呈同相位运动时所产生的应力为 $p_3=p_1-(p_2-p_1)=2p_1-p_2$. 由于我们所处理的为线性问题，叠加原理仍然适用，不难证明，上面的结果是正确的(图 5.7.5)。对于相位差为其余值情况，亦不难求解。可见，只要已知上述三种情况中的任意两种，就可以组合而求出第三种情况。

这里，还必须指出，对于作用于坝面并已经过规一化后的总荷载，在一般情况下，对库长和坝高的比值 L/H 不是十分敏感的。但当 L/H 值超过 3 时，特别是当该值趋向∞时，总压力将是 L/H 的单调递增函数。当 $H/T<360$ 米/秒时，水体可压缩性影响将比 L/H 值较小时更为显著，详见图 5.7.6。

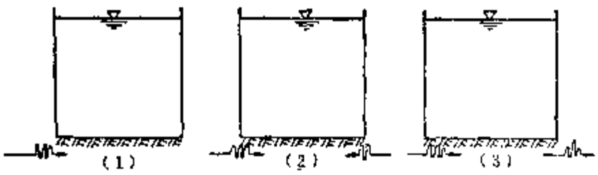


图 5.7.5

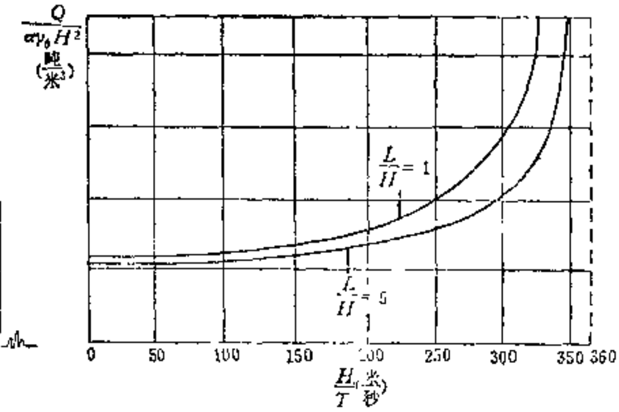


图 5.7.6

当坝体和对岸侧壁为同相位运动时，略去水体的可压缩性影响，如图 5.7.7 上的实线所示；对于一端运动一端静止及两端呈反相位运动情况，如图上的虚线及点虚线所示。

这些结果使我们得出这样的认识，假使和坝体相对的水库对岸的运动，其幅值不超过坝址处运动的幅值，且假定 L/H 不小于 3，则其影响是不重要的。这个结论对于我们在进行计算或模拟试验时合理地选取水库长度将是有意义的。而事实上，除了坝体本身以外，水库本身是由很不规则的边界所形成，因此有理由认为；水库对岸的运动对坝体本身动水压力的影响是不大的。

另外还应当指出，一个稳定振动的全解既包含稳态部分也包含瞬态部分，而后一部分在一无限长的水库中，由于离开坝体而行进的流体中的能量是不会回复的，所以瞬态部分很快会自行消失。但在一个有限长的水库内，由于我们假定能量不向地层内散逸，流体也没有粘滞性，为了对所采用的假定作出严密的解释，应当在解中保留瞬态部分。

由于瞬态部分将随着时间的增长而趋于零，因此，在一般情况下，抛弃解的这部分还是

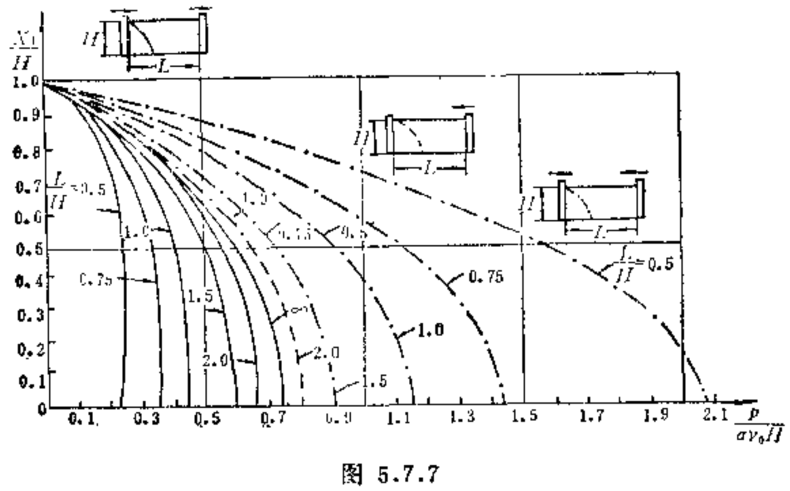


图 5.7.7

正确的。但是应当认识到，由于在振动的流体内，能量的散逸可能会比普通结构为小，所以要求趋于稳态振动所需要的时间，将大大超过普通结构所需要的时间。

四、耦联系统自振特性的复频反应解法

求解结构物地震反应时的一个基本参数是它的自振周期和振型。从上面的一系列分析可见，当考虑有水库存在，但忽略水体的可压缩性影响时，水体的作用等价于附加质量，而坝体的刚度不受影响；因此，水库的作用最终将导致自振周期的增长，而耦联系统自振特性的求解与一般结构的求解程序和方法相同，仅仅在于质量矩阵为结构的质量矩阵和动水压力的附加质量矩阵之和。如果要考虑水体压缩性影响，则由于振型叠加原理已不能适用，故自振特性在最重要方面已失去意义。

这里我们将介绍如何从复频反应的角度来求自振频率。显然，这比起通常的解特征方程的办法简单得多。对于小阻尼情况，当复频反应$|H\ddot{q}_c|$取极大值时，所对应的频率即为体系的自振频率。

乔波拉等曾在文献[29]上详细介绍了上述方法。对一上游面为竖直，下游面坡度为α:1的三角截面的混凝土重力坝，作了分析示例。

对$H\ddot{q}_s$ $(\Omega,\ \Omega_r,\ H/H_3)$ 随ω/ω_s及Ω_r的变化情况以三维无量纲图形示于图 5.7.8，图 5.7.9。

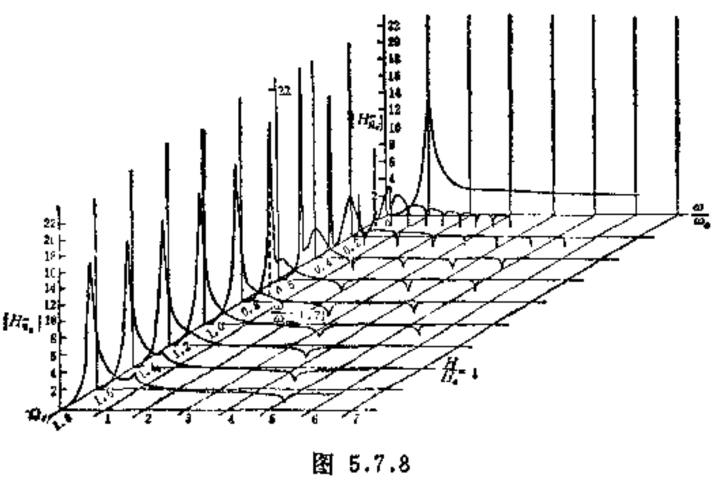


图 5.7.8

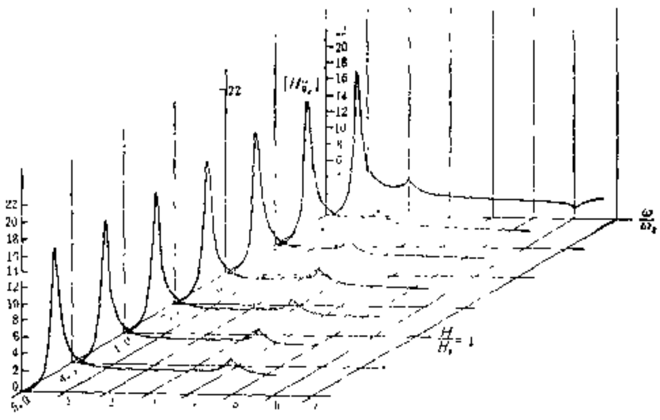


图 5.7.9

每一条曲线对应于一常数值 Ω_r，Ω_r 的最小值取 0.2，并以间隔为 0.2 一直增大至 2.0。然后以间隔为 0.5 增大到 5.0，深度比 $H/H_s=1$。当 $\Omega_r=0$ 时所对应的曲线，相当于结构和库水相比为刚性体的单自由度情况。加速度反应在 $\omega=\omega_s/\sqrt{1-\xi_s^2}$ 时达到最大值。对于一般的坝体阻尼情况，这个数值很接近 ω_s。

上面各式中 $\Omega_r=\omega_1/\omega_s$，$\Omega=\omega/\omega_1$；

ω_1 为水库本身的基本频率；ω_s 为坝体空库时的基本频率；ω 为强迫振动频率。当 $\Omega_r\neq 0$ 时，耦联系统将存在着无数多个自振频率。

$H/Hs\neq 1$ 时的 $|H\ddot{q}_s|$ 值如图 5.7.10 所示。

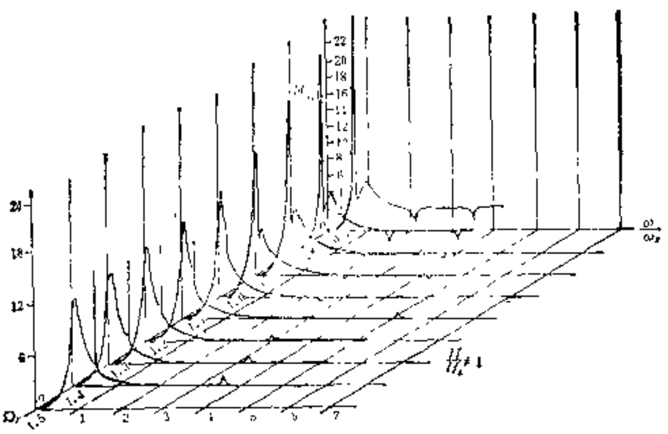


图 5.7.10

耦联系统的基本频率可以根据这些反应曲线近似地确定。由图可见，当 $\Omega_r=0.7$ 时，基本周期约增加 49%，而当 $\Omega_r>1$ 时，增加小于 5%。

五、水库内水体的振动和振型

当外部扰动周期很长以至能远离第一临界频率，且不会激起很大重力波的情况下，我们所得到的稳态解可直接作为设计坝体抗御动水压力的依据。

从应用于重力坝的抗震设计观点看，对所涉及到的大多数的动水压力问题、在刚性坝面及无表面重力波的假定下，都可以采用棱柱状矩形截面半无限水库中所含液体的二维振动的假定。对于非矩形截面或非棱柱状水库情况，我们也将在下面作适当考虑。

在任意水平地面运动 $\ddot{x}_0(t)$ 作用下，产生于刚性坝面的动水压力（假定在 $t=0$ 时水体是静止的）见式（5.3.22）。对于这个公式我们可以把它改写为如下形式：

$$p(0,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{\omega_n}{K}y\right)S_n(t). \tag{5.7.5}$$

式中

$$a_n=\frac{(-1)^{n-1}8\gamma_0 H}{\pi^2(2n-1)^2 g},$$

$$\omega_n=\frac{(2n-1)\pi K}{2H},$$

$$S_n(t)=\omega_n\int_0^t \ddot{x}_0(t)J_0[\omega_n(t-\tau)]d\tau.$$

式（5.7.5）非常类似于支承在地面上的多自由度体系在任意地面运动作用下的反应。我们可以把 a_n 设想为第 n 振型的振型参与系数，ω_n 为相应的自振圆频率，而在式中的余弦可理解为类似于振型反应的分布。事实上这和均匀剪切梁第 n 振型的剪力分布完全一样。函数 S_n 除了 $e^{-\xi_n\omega_n t}\sin\omega_n' t$ 部分由贝塞尔函数 $J_0(\omega_n t)$ 所取代之外，可视为具有自振圆频率 ω_n 的单质点体系的绝对加速度。由于 J_0 类似于有阻尼的正弦波，因此，我们可以认为，对于任意地面运动作用下的动水压力反应，十分类似于有阻尼的多自由度结构对同一地面运动作用下的反应。虽然我们假定水体是没有内阻尼的，并且还存在某些其余的差别，但是上面所作的比拟已能定性反映动水压力的基本特点。

假使我们取 S_n 中的 $\ddot{x}_0(t)$ 按 $\sin\omega t$ 或者 $\cos\omega t$ 变化，并使积分上限到无限大，我们将会看到在稳定的谐和波作用下，第 n 振型的贡献将与 $(1-\omega^2/\omega_n^2)^{-\frac{1}{2}}$ 成比例，这在我们考虑水体的可压缩性影响时，已经指出了基本振型的这个结果。上述系数也应当和无阻尼结构第 n 振型贡献成比例的系数 $(1-\omega^2/\omega_n^2)^{-1}$ 相比较。

弗洛勒斯（Flores）曾经对扰动加速度比例于 $\sin\omega_n t$ 或者 $\cos\omega_n t$ 时计算了 $S_n(t)$（即和第 n 振型共振情况）。该反应值的包络线如图 5.7.11 上的实线所示。为了作比较，图上也绘出了结构反应的包络线。对于大的 $\omega_n t$ 值，动水压力包络线近似地按 $(2\omega_n t/\pi)^{\frac{1}{2}}$ 变化。这种变化也可以与无阻尼或者有阻尼结构的包络线作比较。后者的包络线分别趋近于一固定值。这个固定值和阻尼比成反比。从以上的比较我们可以断言，若将半无限长水库中水体的第 n 振型比拟为阻尼结构的第 n 振型，两者均处于共振激励之下，则其等效阻尼百分比必然构成一个 $\omega_n t$ 的递减函数，并当 $\omega_n t$ 趋向 ∞ 时该函数趋于零。此外，当无阻尼结构在脉冲荷载作用下，第 n 振型的结构反应幅值为静荷载作用下反应值的 2 倍，而在动水压力情况，$S_n(t)$ 的最大值约为 1.47 倍的静态值[27]，若使该放大系数等于阻尼结构第 n 振型的放大系数，则该结构必须具有 27 %的阻尼值。对于较长的持续共振情况，如果使两者的反应包络线相等，则其等效阻尼百分比低于 27%。

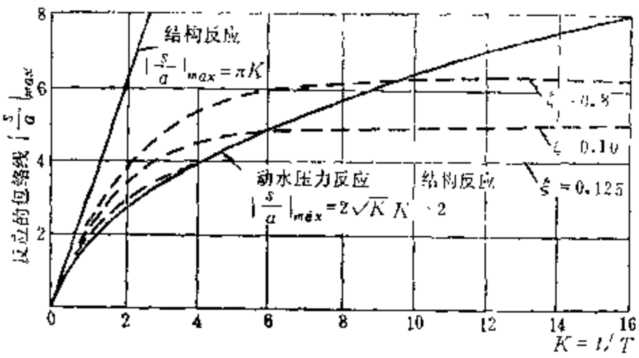


图 5.7.11

此外，当求得各重要振型的压力分布以后，则在任意指定的地面运动作用下相应的反应及其组合，就完全能象线性多自由度体系那样进行。

到此为止，我们假定水库的横截面是矩形的，水库本身为半无限的棱柱体，上游面是竖直的。对于具有倾斜上游面坝体的水库内水体振型的研究，由于问题较复杂，研究得还很不成熟。自从有限元法问世后，为这个问题的研究提供了强有力的工具。

在文献[27,30]上曾介绍了小坪清马所得到某些非矩形水库截面下的解，看来这是具有实际意义的。某些结果列于图 5.7.12 和表 5.7.1。同时认为，当水库具有其它峡谷外形时，可以按下述原则进行修正。

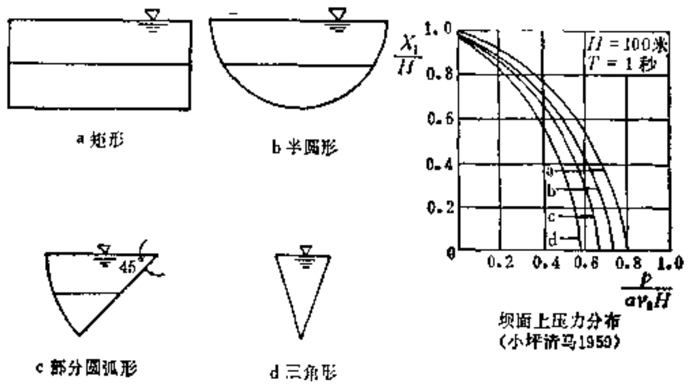


图 5.7.12

表 5.7.1　　各种截面形状水库的自振周期

截面形状	真实值		近似值
	$100\ T_1/H$	$100\ T_2/H$	$100\ T_1/H$
矩形	0.278	0.093	0.278
半圆形	0.237	0.104	0.246
半扇形	0.202	0.092	0.208
三角形	0.181	0.079	0.196

① 假定基本振型的压力分布和矩形截面的相同，或采用如图 5.7.12 所示的稍加修正的曲线。

② 假定所有高振型的压力分布和矩形截面的相同，并略去沿水平面内水压力波动的影响。

③ 取基本周期等于深度为 H 的矩形截面的基本周期，但要乘以因子$\sqrt{\bar{H}/H}$，式中 $\bar{H}$ 和 H 为所研究峡谷的平均深度和最大深度。

④ 所有高阶振型的周期和高度为 H 的矩形截面水库的相同。

参 考 文 献

[1] J. Krishna, A. R. Chandrasekaran, Analysis of Koyna Accelerogram of December 11, 1967, Bulletin of the Seismological Society of America, vol. 59, No.4, 1969.

[2] 沈崇刚、陈厚群等，新丰江水库地震及其对大坝的影响，中国科学，1974 年，第二期。

[3] Rayleigh, Lord, Theory of Sound, Macmillan, London, 1926.
[4] Westergaard, H. M., Water Pressures on dams during earthquakes, Trans. Amer. Soc. Civ. Eng.; V. 98, pp. 418—433, 1933.
[5] P. W. Werner and K. J. Sundquist, On Hydrodynamic Earthquake Effects, Transactions. American Geophysical Union, vol. 30, No. 5, October, 1949.
[6] Chopra, A. K., Reservoir-Dam Interaction during Earthquakes, Bulletin of the Seismological Society of America, vol. 57, No.4, Aug., 1967.
[7] Chopra, A. K., Hydrodynamic Pressures On Dams during Earthquakes, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, vol. 93, No. EM 6, Proc, Paper 5695, Dece., 1967, pp. 205—223.
[8] S. H. Crandall, Random Vibration, John Wiley & Sons, Inc., New York. 1958
[9] Robert L. Wiegel. Earthquake Engineering, Prentice-Hall, Inc., 1970.
[10] A. K. Chopra, Earthquake Response of Concrete Gravity Dams, California University, Berkeley, California, January, 1970, AD 709640.
[11] Okamoto, S, Yoshida, M, Nakarama, K, Observation of dam during Earthquakes, Eighth Congress on Large Dams, vol. II, 1964.
[12] 刘恢先，论地震力 土木工程学报 第5卷第2期 1958年。
[13] 刘恢先、王孝信，挡水坝地震荷载 地震工程研究报告集，第一集 科学出版社 1962年。
[14] P. A. A. Back, A. C. Cassell, R. Dungar, The Seismic Design Study of a Double Curvature Arch Dam, Proceedings of the Institution of Civil Engineers June, 1969.
[15] O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung, The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill Publishing Company, 1967.
[16] 弹性力学问题的有限单元法，华东水利学院，水利电力出版社，1974。
[17] Ш. Г. Напетваридзе, Гидродинамическое Давление При Сейсмической Воздейстзий, Труды. Ин-Стро-Дела АН. груз ССР, 1955 Тбилиси.
[18] 陈振诚，地震所激起而作用于倾斜坝面的流体动荷载 力学学报 7卷1期 1964。
[19] Herrera, Flores and Lojzono, Hydrodynamic Pressures generated by Vertical Earthquake Component, Proc. Fourth, World Conf. Earth. engr. Santiago, Chile, 2, B4, 25—36, 1969.
[20] C. N. Zanger, Hydrodynamic Pressures On Dams due to Horizontal Earthquakes, Proc. Soc. Ex. Anal., 1953 10 (2) 93—102.
[21] Иванова Г. С. Об ударежидкости О Наклонную Стенку Бесконечно Длинного Частично Закрытого сосуда, ПММ, 1958, Вы. 2,254—255.
[22] 李新民，倾斜坝面地震动水压力，水利学报，1964, No. 5。
[23] 谢省宗、钱殊，倾斜坝面地震动水压力的小参数法，水利学报，1963年，第四期。
[24] 钱令希、邱大洪，利用电模拟法计算挡水坝在满库时的自振频率，土木工程学报，第5卷，第2期，1958年4月。
[25] Zangar, C. N, and R. J. Haefeli, Electric Analog Indicates Effect of Horizontal Earthquake Shock on Dams, Civil Engrg., 1952, 22(4), 278—79.
[26] 水工建筑物地震动水压力，大连工学院，«水工建筑抗震设计规定»编制组，1975，北京。
[27] Nathan, M. Newmark, Emilio Rosenblueth, Fundamentals of Earthquake Engineering, Prentice Hall, Inc. 1971, pp. 184—185.
[28] 畑野正，水の弾性による地震時動水圧の共振に関する吟味，土木学会论文集129号，1966年。
[29] Anil K. Chopra. Earthquake Behavior of Reservoir-Dam Systems, Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Civil Engineers, vol. 94, No. EM 6, December, 1968.
[30] 小坪清真，Dynamic Water Pressure on Dam due to Irregular Earthquakes, Mem. Fac. Engrg., Kyushu University, 18(4),119—29, 1959.

第六章　梁式结构物在液体内的耦联振动

各种类型的进水塔、桥墩以及支墩式水塔等均属于梁式结构。事实上挡水坝也往往作为一侧有水的悬臂梁考虑。它们和容器的差别在于前者属于内域（内部有液体）问题，而后者则往往是外域（外部液体）问题。如所周知，当梁式结构为等截面或者能以定函数来描述其截面变化规律时，那么要求得其解析解是可能的。但对于复杂截面情况，即使没有液体也往往难以求解，而只能采用离散化的方法。早在六十年代初期，我国的一些研究者，就曾对梁式结构和液体的耦联振动进行过不少研究，例如见[1,2,3,4]。

此外，需要说明，由于外部液体实际上均属水体，因此，这里也将直接使用动水压力这个名字来代替液动压力。

第一节　基 本 运 动 方 程

等截面弯曲梁和剪切梁的自由振动方程经过变量分离处理后为

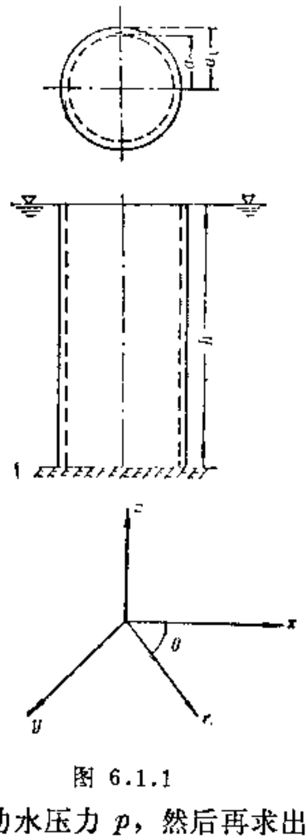


图 6.1.1

$$EI\frac{d^4X}{dz^4}-\frac{\rho F}{g}\omega^2X-p=0, \tag{6.1.1}$$

$$\frac{GF}{k}\frac{d^2X}{dz^2}+\frac{\rho F}{g}\omega^2X+p=0. \tag{6.1.2}$$

式中　E为结构材料的杨氏弹性模量；I为梁的断面惯性矩；G为材料的剪切模量；F为梁的横断面积；k为剪力的断面系数；ρ为材料的容重；ω为自振圆频率；p为作用在结构上的动水压力集度；z为由梁身部分弹性变形所产生的位移。

为了推导方便，式(6.1.1)、(6.1.2)没有考虑阻尼的影响。如必需考虑结构的阻尼影响，也不会有多大困难。

在地震作用下，弯曲梁和剪切梁的振动方程为

$$EI\frac{\partial^4u}{\partial z^4}+\frac{\rho F}{g}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u+u_g)-p=0, \tag{6.1.3}$$

$$\frac{GF}{k}\frac{\partial^2u}{\partial z^2}-\frac{\rho F}{g}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u+u_g)+p=0. \tag{6.1.4}$$

式中　u为由地震作用产生的结构弹性位移，u_g为地面水平位移。

从式(6.1.1)和(6.1.2)可见，要求解这组方程首先要求出动水压力p，然后再求出满足附加边界条件的解。

对于常见的悬臂梁情况，方程(6.1.1)应满足如下边界条件（图 6.1.1）：

$$X\Big|_{z=0}=\frac{dX}{dz}\Big|_{z=0}=0, \tag{6.1.5}$$

$$EI\frac{d^2X}{dz^2}\bigg|_{z=h}=EI\frac{d^3X}{dz^3}\bigg|_{z=h}=0。\tag{6.1.6}$$

式(6.1.2)的边界条件为

$$X\bigg|_{z=0}=-\left(\frac{GF}{k}\frac{dX}{dz}\right)_{z=h}=0\tag{6.1.7}$$

上面仅列出了当弯曲和剪切分别考虑时的振动方程。若要同时考虑弯曲、剪切甚至转动等影响时，则亦不难仿此列出[6]。

求解方程(6.1.1)—(6.1.4)，如果不考虑液体的影响，则用一般结构动力学的方法很容易求得其解。但现在有动水压力 p，它也是一个未知量，要求出它的大小，必须先知道位移(包括弹性位移)值，而位移的大小也受到动水压力 p 的影响。因此，这个问题就是典型的耦联振动问题。解题的中心环节在于求出动水压力 p 的大小和分布规律。

第二节　圆柱形结构物的动水压力

上面所讨论的虽然是属于一维问题的梁式结构，但是对于振动液体来说则是三维流动，只是对于象重力坝这类的悬臂结构才能近似为二维流动。因此，我们首先从解决一般性的三维振动着手。我们曾详细推演过中空圆柱形结构的动水压力计算公式[1]。这里我们引用这些结果。

一、基本假定

设有如图 6.1.1 的水中空心圆柱体结构。假定水为不可压缩的理想液体，不考虑表面波的影响，结构物受弯曲变形后截面仍保持为圆形。不失一般性，假定液体和结构顶面齐平。对于结构物顶面与液面非齐平的情况，留待后面讨论。

十分明显，当结构物承受地震或其它振动作用后，在其内、外壁面上均将产生动水压力。

二、三维拉普拉斯方程及其解

根据连续性条件，在扰动液体内的任意一点均必须满足三维拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0,\tag{6.2.1}$$

式中　ψ 为速度势函数。

相应的边界条件为

当　　$z=0$ 时，$\dfrac{\partial\psi}{\partial z}=0,$　　(1)

$z=h$ 时，$\dfrac{\partial\psi}{\partial t}=0,$　　(2)

$r=a$ 时，$\dfrac{\partial\psi}{\partial r}=\left(\dot{u}_g+\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)\cos\theta.$　　(3)

边界条件① 表示结构底面液体没有竖向速度，条件② 表示液体表面是一自由面（不考虑重力波的影响），条件③ 表示柱体表面的振动速度和液体在该处的振动速度相同，也就是熟知的连续性条件。其中 $\dot{u}_g$ 为沿 x 方向水平地震作用时的地面运动速度，$\partial u/\partial t$ 为柱体沿 x 方向的弹性振动速度。

采用试探函数法，若取液体速度势的表达式为

$$\psi(r,z,\theta,t)=\cos\theta\sum_{n=1}^{\infty}\dot{q}_n\sum_{s=1,3,5}^{\infty}f(r)\cos\frac{\pi s}{2h}z, \tag{6.2.2}$$

式中$f(r)$为圆柱坐标r的函数，可由式（6.2.1）确定。$\dot{q}_n$为广义坐标对时间t的一阶导数，或称广义速度。显然，速度势ψ对于边界条件①及②是满足的。若把式（6.2.2）代入式（6.2.1），则得

$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f(r)}{\partial r}-\left(\frac{1}{r^2}+\frac{\pi^2 s^2}{4h^2}\right)f(r)=0, \tag{6.2.3}$$

若令$r_1=\pi s/2h\cdot r$并代入式（6.2.3）则得

$$\frac{\partial^2 f(r_1)}{\partial r_1^2}+\frac{1}{r_1}\frac{\partial f(r_1)}{\partial r_1}-\left(1+\frac{1}{r_1^2}\right)f(r_1)=0. \tag{6.2.4}$$

式（6.2.4）是第一类修正贝塞尔方程，它的解为

$$f(r_1)=B_{ns}I_{1s}(r_1)+C_{ns}K_{1s}(r_1), \tag{6.2.5}$$

式中B_{ns}、C_{ns}为根据柱面边界条件决定的常数，I_{1s}、K_{1s}为第一类和第二类修正贝塞尔函数。同时，由数学分析理论可知，

$$\begin{gathered} r\to 0\text{时},\ I_{1s}\to 0,\ K_{1s}\to\infty. \\ r\to\infty\text{时},\ I_{1s}\to\infty,\ K_{1s}\to 0. \end{gathered} \tag{6.2.6}$$

因此，对于柱体内部液体的速度势表达式为

$$\psi(r,z,\theta,t)=\cos\theta\sum_{n=1}^{\infty}\dot{q}_n\sum_{s=1,3,5}^{\infty}B_{ns}I_{1s}(r_1)\cos\frac{\pi s}{2h}z. \tag{6.2.7}$$

柱体外部液体的速度势表达式为

$$\psi_2(r,z,\theta,t)=\cos\theta\sum_{n=1}^{\infty}\dot{q}_n\sum_{s=1,3}^{\infty}C_{ns}K_{1s}(r_1)\cos\frac{\pi S}{2h}z. \tag{6.2.8}$$

速度势ψ_1和ψ_2还必须满足边条件③。如果我们分析时对条件③右端的两项速度分别考虑，为易于区分起见，以$\psi^{(1)}$和$\psi^{(2)}$表示，则对于内域有

$$\left(\frac{\partial\psi_1^{(1)}}{\partial r}\right)_{r=a_2}=\dot{u}_g\cos\theta, \tag{6.2.9a}$$

$$\left(\frac{\partial\psi_1^{(2)}}{\partial r}\right)_{r=a_2}=\frac{\partial u}{\partial t}\cos\theta. \tag{6.2.9b}$$

对外域有

$$\left(\frac{\partial\psi_2^{(1)}}{\partial r}\right)_{r=a_1}=\dot{u}_g\cos\theta, \tag{6.2.10a}$$

$$\left(\frac{\partial\psi_2^{(2)}}{\partial r}\right)_{r=a_1}=\frac{\partial u}{\partial t}\cos\theta. \tag{6.2.10b}$$

对边界条件作这样表达的优点，在于可使我们从动水压力中区分刚体动水压力和弹性振动动水压力。这在某些情况下是有意义的。

三、刚体动水压力

现在先来考虑结构作刚性位移时所产生的动水压力。即速度势满足边条件（6.2.9 a）及（6.2.10 a），若取

$$\psi_1^{(1)}(r,z,\theta,t)=\cos\theta\dot{u}_g\sum_{s=1,3,5}^{\infty}I_{1s}(r_1)B_s\cos\frac{\pi s}{2h}z, \tag{6.2.11}$$

$$\psi_2^{(1)}(r,z,\theta,t)=\cos\theta\dot{u}_g\sum_{s=1,3,5}^{\infty}K_{1s}(r_1)C_s\cos\frac{\pi s}{2h}z, \tag{6.2.12}$$

同时注意到在区间$[0,h]$上可将1展为如下余弦级数：

$$1=\frac{4}{\pi}\sum_{s=1,3,5}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{s-1}{2}}}{s}\cos\frac{\pi s}{2h}z, \tag{6.2.13}$$

把式(6.2.11)代入式(6.2.9 a)，式(6.2.12)代入式(6.2.10 a)，并注意到式 (6.2.13) 的关系，比较两端同类项的系数，则立刻可以得到

$$B_s=\frac{8h(-1)^{\frac{s-1}{2}}}{\pi^2s^2I'_{1s}(r_1)_{r=a_2}}, \tag{6.2.14}$$

$$C_s=\frac{8h(-1)^{\frac{s-1}{2}}}{\pi^2s^2K'_{1s}(r_1)_{r=a_1}}. \tag{6.2.15}$$

式中 $I'_{1s}(r_1)$和 $K'_{1s}(r_1)$为对于 r_1 的一次导数。

把式(6.2.14)和(6.2.15)分别代入式(6.2.11)和(6.2.12)，则可得到

$$\psi_1^{(1)}(r,z,\theta,t)=\cos\theta\dot{u}_g\cdot\frac{8h}{\pi^2}\sum_{s=1,3,5}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{s-1}{2}}I_{1s}(r_1)}{s^2I'_{1s}\left(\frac{\pi s}{2h}a_2\right)}\cos\frac{\pi s}{2h}z, \tag{6.2.16}$$

$$\psi_2^{(1)}(r,z,\theta,t)=\cos\theta\dot{u}_g\frac{8h}{\pi^2}\sum_{s=1,3,5}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{s-1}{2}}K_{1s}(r_1)}{s^2K'_{1s}\left(\frac{\pi s}{2h}a_1\right)}\cos\frac{\pi s}{2h}z. \tag{6.2.17}$$

按照流体力学原理，在液体内任一点的动水压力与速度势 ψ 的函数关系为

$$p=\frac{\gamma_0}{g}\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

这样，沿柱体内部单位高度上的刚体动水压力为

$$P_{r=a_2}=-\frac{\gamma_0}{g}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right)a_2\cos\theta d\theta. \tag{6.2.18}$$

把式(6.2.16)代入上式并完成积分运算后，得到

$$P_{r=a_2}=\frac{8h\gamma_0a_2}{\pi g}\ddot{u}_g\sum_{s=1,3,5}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{s-1}{2}}}{s^2}\left(\frac{I_{1s}(r_1)}{I'_{1s}(r_1)}\right)\cos\frac{\pi s}{2h}z. \tag{6.2.19}$$

同理，可得到柱体外部沿单位高度上的刚体动水压力为

$$P_{r=a_1}=\frac{8h\gamma_0a_1}{\pi g}\ \ddot{u}_g\sum_{s=1,3,5}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{s-1}{2}}}{s^2}\left(\frac{K_{1s}(r_1)}{K'_{1s}(r_1)}\right)_{r=a_1}\cos\frac{\pi s}{2h}z. \tag{6.2.20}$$

所以总的动水压力为

$$P_{刚}=P_{r=a_1}+P_{r=a_2}=-\frac{8h\gamma_0}{\pi g}\ddot{u}_g\sum_{s=1,3,5}^{\infty}(-1)^{\frac{s-1}{2}}H_s\cos\frac{\pi s}{2h}z, \tag{6.2.21}$$

式中

$$H_s=\frac{1}{s^2}\left[a_1\left(\frac{K_{1s}(r_1)}{K'_{1s}(r_1)}\right)_{r=a_1}+a_1\left(\frac{I_{1s}(r_1)}{I'_{1s}(r_1)}\right)_{r=a_2}\right]. \tag{6.2.22}$$

若将式 (6.2.21) 对 z 从 0 到 h 积分，则可求得基底总剪力为

$$R_{刚}=-\frac{16\,h^2\gamma_0}{\pi^2 g}\ddot{u}_g\sum_{s=1,3,5}H'_s, \tag{6.2.23}$$

式中 $H'_s=H_s/s$。

四、弹性振动动水压力

将弹性位移 $u(z,t)$ 用圆柱体结构的有水振型 X_n 及广义坐标 q_n 展开，即

$$u(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}q_n(t)X_n(z). \tag{6.2.24}$$

再将式(6.2.7)、(6.2.24)代入边界条件(6.2.9 b)，则得

$$\cos\theta\sum_{n=1}^{\infty}\dot{q}_n\sum_{s=1,3,5}B_{ns}\frac{\partial}{\partial r}[I_{1s}(r_1)]_{r=a_2}\cos\frac{\pi s}{2h}z=\cos\theta\sum_{n=1}^{\infty}\dot{q}_nX_n.$$

比较上式两端之系数，则得

$$X_n=\sum_{s=1,3,5}^{\infty}B_{ns}\frac{\partial}{\partial r}[I_{1s}(r_1)]_{r=a_2}\cos\frac{\pi s}{2h}z. \tag{6.2.25}$$

以 $\cos\pi s/2h\cdot zdz$ 乘式(6.2.25)两侧并积分，得到

$$\int_0^h X_n\cos\frac{\pi s}{2h}zdz=\int_0^h B_{ns}\frac{\partial}{\partial r}[I_{1s}(r_1)]_{r=a_2}\cos^2\frac{\pi s}{2h}zdz.$$

即

$$\int_0^h X_n\cos\frac{\pi s}{2h}zdz=\frac{h}{2}B_{ns}\frac{\partial}{\partial r}[I_{1s}(r_1)]_{r=a_2}=\frac{\pi s}{4}B_{ns}I'_{1s}\left(\frac{\pi s}{2h}a_2\right),$$

故

$$B_{ns}=\frac{4\int_0^h X_n\cos\frac{\pi s}{2h}zdz}{\pi sI'_{1s}\left(\frac{\pi s}{2h}a_2\right)}. \tag{6.2.26}$$

同理，将式(6.2.8)、(6.2.24)代入边条件(6.2.10 b)，并通过类似运算可得

$$C_{ns}=\frac{4\int_0^h X_n\cos\frac{\pi s}{2h}zdz}{\pi sK'_{1s}\left(\frac{\pi s}{2h}a_1\right)}. \tag{6.2.27}$$

将式(6.2.26)、(6.2.27)代入式(6.2.7)和(6.2.8)，则得

$$\psi_1^{(2)}(r,z,\theta,t)=\cos\theta\sum_{n=1}^{\infty}\dot{q}_n\sum_{s=1,3,5}^{\infty}$$

$$\frac{I_{1s}(r_1)}{I'_{1s}\left(\frac{\pi s}{2h}a_2\right)}\frac{4}{\pi s}\cos\frac{\pi s}{2h}z\int_0^h X_n\cos\frac{\pi s}{2h}\xi d\xi, \tag{6.2.28}$$

$$\psi_2^{(2)}(r,z,\theta,t)=\cos\theta\sum_{n=1}^{\infty}\dot{q}_n$$

$$\sum_{s=1,3,5}^{\infty}\frac{K_{1s}(r_1)}{K'_{1s}\left(\frac{\pi s}{2h}a_1\right)}\frac{4}{\pi s}\cos\frac{\pi s}{2h}z\int_0^h X_n\cos\frac{\pi s}{2h}\xi d\xi. \tag{6.2.29}$$

同理，我们可以求得沿柱体内部单位高度上的弹性动水压力为

$$p_{r=a_2}=\frac{\gamma_0}{g}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\psi_1^{(2)}}{\partial t}\right)a_2\cos\theta d\theta$$

$$=-\frac{4\gamma_0 a_2}{g}\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{q}_n\sum_{s=1,3,5}^{\infty}\left(\frac{I_{1s}(r_1)}{I'_{1s}(r_1)}\right)_{r=a_2}\frac{1}{s}\cos\frac{\pi s}{2h}z\int_0^h X_n\cos\frac{\pi s}{2h}\xi d\xi. \tag{6.2.30}$$

沿柱体外部单位高度上的弹性动水压力为

$$p_{r=a_1}=-\frac{\gamma_0}{g}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\psi_2^{(2)}}{\partial t}\right)a_1\cos\theta d\theta$$

$$=-\frac{4\gamma_0 a_1}{g}\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{q}_n\sum_{s=1,3,5}^{\infty}\left(\frac{K_{1s}(r_1)}{K'_{1s}(r_1)}\right)_{r=a1}\frac{1}{s}\cos\frac{\pi s}{2h}z\int_0^h X_n\cos\frac{\pi s}{2h}\xi d\xi. \tag{6.2.31}$$

将式(6.2.30)和(6.2.31)叠加后，就可得到当内、外域均有液体时，沿柱体单位高度上总的弹性动水压力为

$$p_{弹}=-\frac{4\gamma_0}{g}\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{q}_n\sum_{s=1,3,5}^{\infty}\bar{H}_s\cos\frac{\pi s}{2h}z\int_0^h X_n\cos\frac{\pi s}{2h}\xi d\xi. \tag{6.2.32}$$

式中 $\ddot{q}_n$ 为广义坐标对时间的二次导数，$\bar{H}_s=H_s\cdot s$。

式(6.2.32)为求解弹性动水压力的基本公式。它的概括性是明显的。例如，若我们已求得了地震作用下的广义坐标 q_n，则立刻就可计算出地震时的动水压力。如果我们要利用振型分解的概念来求解动水压力，只要令结构按任一振型 X_n 作频率为 ω 的简谐自由振动，式(6.2.32)可以表示为

$$p_{弹}^{(n)}=\frac{4\gamma_0}{g}\omega^2\sum_{s=1,3,5}^{\infty}\bar{H}_s\cos\frac{\pi s}{2h}z\int_0^h X_n\cos\frac{\pi s}{2h}\xi d\xi. \tag{6.2.33}$$

式中 ω 为与振型 X_n 相应的自振圆频率。

第三节　受弯曲悬臂梁的横向自由振动

一、频率方程推导

现在我们先来讨论梁的弯曲振动。至于剪切振动情况，所讨论的原理也完全可以应用。若梁在水中以任一振型 X 进行弯曲自由振动，则 X 和相应的圆频率 ω 应满足如下方程（式(6.1.1)

$$EI\frac{d^4X}{dz^4}-\frac{\rho F}{g}\omega^2X=\frac{4\gamma_0\omega^2}{g}\sum_{s=1,3,5}^{\infty}\bar{H}_s\cos\frac{\pi s}{2h}z\int_0^h X\cos\frac{\pi s}{2h}\xi d\xi. \tag{6.3.1}$$

通常情况下，可以近似地用无水振型来代替有水振型，其误差是不大的。通过这样的简

化以后，使问题的求解就方便得多。但是，迄今为止，我们还没有看到有关这种严格定量比较的相应文献。可以断言，误差的大小必然与结构类型、工作条件及扰动力的种类有关。本节中，我们仍将采用比较严格的方法而暂时放弃这个假定。

将任一有水振型X按无水振型$\overline{X}$展开，令

$$X=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\overline{X}_n. \tag{6.3.2}$$

式中 A_n为有水振型按无水振型展开的常系数。十分明显，无水振型与相应的圆频率ω_{0n}应满足下列方程式：

$$EI\frac{d^4\overline{X}_n}{dz^4}-\frac{\rho F}{g}\omega_{0n}^2\overline{X}_n=0. \tag{6.3.3}$$

由式(6.3.2)和(6.3.3)又可得到

$$EI\frac{d^4X}{dz^4}-\frac{\rho F}{g}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{0n}^2A_n\overline{X}_n=0. \tag{6.3.4}$$

将式(6.3.2)、(6.3.4)代入式(6.3.1)，则得

$$\begin{aligned}&\frac{\rho F}{g}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{0n}^2A_n\overline{X}_n-\frac{\rho F}{g}\omega^2\sum_{n=1}^{\infty}A_n\overline{X}_n\\&=\frac{4\gamma_0\omega^2}{g}\sum_{s=1,3,5}^{\infty}\overline{H}_s\cos\frac{\pi s}{2h}z\sum_{k=1}^{\infty}A_k\int_0^h\overline{X}_k\cos\frac{\pi s}{2h}\xi d\xi.\end{aligned} \tag{6.3.5}$$

以X_n乘式(6.3.5)两端，然后从0到h积分，再利用熟知的振型$\overline{X}_n$的正交条件，则得

$$\frac{\rho F}{4\gamma_0h}N_n(\omega_{0n}^2-\omega^2)A_n-\omega^2\sum_{s=1,3,5}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\overline{H}_sM_{ns}M_{ks}A_k=0 \tag{6.3.6}$$

$$(n=1,3,5,\cdots,\infty)$$

式中

$$M_{ns}=\frac{1}{h}\int_0^h\overline{X}_n\cos\frac{\pi s}{2h}zdz, \tag{6.3.6'}$$

$$N_n=\frac{1}{h}\int_0^h\overline{X}_n^2dz.$$

方程组(6.3.6)的系数矩阵对其主对角线是对称的，若A_n有非零解，则方程组的系数行列式必须等于零，从而得到关于有水频率ω的频率方程。各阶频率求得之后，代回方程(6.3.6)，就可以求得各A_n的相对值，再利用式(6.3.2)就可求出任一有水振型。在方程组(6.3.6)中如果仅取$n=1$，$k=1$，即每一级数仅取一项，便可以近似地求得有水时的基本频率。它与无水时的基本频率之比的平方为

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_{01}}\right)^2=\frac{1}{1+\frac{4\gamma_0h}{\rho FN_1}\sum\limits_{s=1,3,5}^{\infty}\overline{H}_sM_{1s}^2}. \tag{6.3.7}$$

若用雷利的能量法求基本频率，也可以得到与式(6.3.7)相同的结果。

为了能进行电算，我们还可以把式(6.3.6)写为矩阵形式。首先，整理式(6.3.6)为

$$\frac{\rho F}{4\gamma_0 h}N_n\omega_{0n}^2 A_n-\omega^2\left[\frac{\rho F}{4\gamma_0 h}N_n A_n+\sum_{s=1,3,5}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\bar{H}_s M_{ns}M_{ks}A_k\right]=0, \qquad (6.3.8)$$

令

$$\delta_{nk}=\sum_{s=1,3,5}^{\infty}\bar{H}_s\bar{M}_s M_{ns}M_{ks},\ K_{nn}=\frac{\rho F N_n\omega_{0n}^2}{4\gamma_0 h},$$

于是，式(6.3.8)可表示成下面的矩阵形式：

$$\begin{Bmatrix} K_{11} & & & \\ & K_{22} & & \\ & & K_{33} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & K_{nn}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}A_1\\ A_2\\ A_3\\ \vdots\\ A_n\end{Bmatrix}=\omega^2\begin{Bmatrix}\left(\frac{K_{11}}{\omega_{01}^2}+\delta_{11}\right) & & & \\ \delta_{21} & \left(\frac{K_{22}}{\omega_{02}^2}+\delta_{22}\right) & & \text{对称} \\ \delta_{31} & & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2}\cdots & & \left(\frac{K_{nn}}{\omega_{0n}^2}+\delta_{nn}\right)\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}A_1\\ A_2\\ A_3\\ \vdots\\ A_n\end{Bmatrix}, \qquad (6.3.9)$$

或简写为

$$[K]\{A\}=\omega^2[M]\{A\}. \qquad (6.3.10)$$

也可将式(6.3.2)写成下面的矩阵形式

$$\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\\ \vdots\\ X_n\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\cdots A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} \\ \vdots & \ddots \\ A_{n1} & A_{n2}\cdots A_{nn}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{X}_1\\ \bar{X}_2\\ \vdots\\ \bar{X}_n\end{Bmatrix},$$

或者简写为

$$\{X\}=[A]\{\bar{X}\}. \qquad (6.3.11)$$

此外，根据式(6.2.33)我们不难发现，液体的影响可以折算为相应的附加质量，这个耦联附加质量的大小为

$$\bar{M}=\frac{4\gamma_0}{gX}\sum_{s=1,3,5}^{\infty}\bar{H}_s\cos\frac{\pi s}{2h}z\int_0^h X\cos\frac{\pi s}{2h}\xi d\xi. \qquad (6.3.12)$$

如果我们从液体的动能原理出发[6]，则有

$$K=\frac{1}{2}\frac{\gamma_0}{g}\int_s\psi\frac{\partial\psi}{\partial\nu}ds.$$

式中 ν 为水面边界的法线方向，s 为水面边界，在我们这里为单位高度的水面边界。利用速度势 ψ 式(6.2.28)和(6.2.29)，不难验证式(6.3.12)是正确的。

二、正交性条件

在第三章第二节中，我们曾根据熟知的功的互等原理，推导了贮液的圆环形、圆柱形和矩形容器在满液情况下的正交条件。这一原理自然也适用于我们在这里所研究的情况。

参照式(6.3.1)我们得到

$$\int_0^h\omega_r^2\left[\frac{\rho F}{g}X_r+\bar{M}_r X_r\right]X_s dz=\int_0^h\omega_s^2\left[\frac{\rho F}{g}X_s+\bar{M}_s X_s\right]X_r dz,\ (r\neq s) \qquad (6.3.13)$$

式中 $\bar{M}_r$、$\bar{M}_s$ 均为相应于第 r 振型和第 s 振型的附加质量，如式(6.3.12)所示。同时，注意到

$$\int_0^h \overline{M}_r X_r X_s dz=\frac{4\gamma_0}{g}\sum_{s=1,3,5}^{\infty}\overline{H}_s\int_0^h X_s\cos\frac{\pi s}{2h}zdz\int_0^h X_r\cos\frac{\pi s}{2h}zdz,$$

$$\int_0^h \overline{M}_s X_s X_r dz=\frac{4\gamma_0}{g}\sum_{s=1,3,5}^{\infty}\overline{H}_s\int_0^h X_r\cos\frac{\pi s}{2h}zdz\int_0^h X_s\cos\frac{\pi s}{2h}zdz,$$

将式(6.3.13)稍加整理后，得到

$$(\omega_r^2-\omega_s^2)\left[\frac{\rho F}{g}X_sX_rdz+\frac{4\gamma_0}{g}\sum_{s=1,3,5}^{\infty}\overline{H}_s\int_0^h X_r\cos\frac{\pi s}{2h}zdz\int_0^h X_s\cos\frac{\pi s}{2h}zdz\right]=0.$$

由于 $\omega_r^2\neq\omega_s^2$,故有

$$\int_0^h\frac{\rho F}{g}X_sX_rdz+\frac{4\gamma_0}{g}\sum_{s=1,3,5}^{\infty}\overline{H}_s\int_0^h X_r\cos\frac{\pi s}{2h}zdz\int_0^h X_s\cos\frac{\pi s}{2h}zdz=0. \tag{6.3.14}$$

这便是有水振型间的正交条件。式(6.3.14)表明，相应于第 r 振型 X_r 的作用外力（惯性力和动水压力）对于其它振型 X_s 是不作功的。

式(6.3.14)还可进一步写成

$$\int_0^h R(X_r)X_sdz=0, \tag{6.3.15}$$

式中 $R(X_r)$代表第 r 振型的弹性力 $EI(d^4X_r r/dz^4)$。

第四节　地震作用下的反应（广义坐标的确定）

在地震作用下，结构振动的微分方程如式(6.1.3)所示。

$p=p_{刚}+p_{弹}$，即为总的动水压力。把式(6.2.21)、(6.2.32)和(6.2.24)代入式(6.1.3)则可得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[q_n\left(EI\frac{d^4X_n}{dz^4}\right)+\ddot{q}_n\left(\frac{\rho F}{g}X_n+\frac{4\gamma_0}{g}\sum_{s=1,3,5}^{\infty}\overline{H}_s\cos\frac{\pi s}{2h}z\int_0^h X_n\cos\frac{\pi s}{2h}\xi d\xi\right)\right]$$

$$=-\ddot{u}_g\left(\frac{\rho F}{g}+\frac{8h\gamma_0}{\pi g}\sum_{s=1,3,5}^{\infty}(-1)^{\frac{s-1}{2}}H_s\cos\frac{\pi s}{2h}z\right), \tag{6.3.16}$$

用 X_s 遍乘全式，并从 0 到 h 积分，利用有水时的正交条件(6.3.14)并注意到式(6.3.1),即可得到如下方程

$$\ddot{q}_n+\omega_n^2q_n=-\eta_n\ddot{u}_g(t), \tag{6.3.17}$$

式中

$$\eta_n=\frac{\int_0^h\left[\frac{\rho F}{g}X_n+\frac{8h\gamma_0}{\pi g}X_n\sum_{s=1,3,5}^{\infty}(-1)^{\frac{s-1}{2}}H_s\cos\frac{\pi s}{2h}z\right]dz}{\int_0^h\left[\frac{\rho F}{g}X_n^2+\frac{4\gamma_0}{g}X_n\sum_{s=1,3,5}^{\infty}\overline{H}_s\cos\frac{\pi s}{2h}z\int_0^h X_n\cos\frac{\pi s}{2h}\xi d\xi\right]dz}.$$

为了求得统一的表达形式，我们也可把 η_n 写成以下形式：

$$\eta_n=\frac{\int_0^h\left[\frac{\rho F}{g}X_n+\frac{4\gamma_0}{g}X_n\sum_{s=1,3,5}^{\infty}\overline{H}_s\cos\frac{\pi s}{2h}z\int_0^h\cos\frac{\pi s}{2h}\xi d\xi\right]dz}{\int_0^h\left[\frac{\rho F}{g}X_n^2+\frac{4\gamma_0}{g}X_n\sum_{s=1,3,5}^{\infty}\overline{H}_s\cos\frac{\pi s}{2h}z\int_0^h X_n\cos\frac{\pi s}{2h}\xi d\xi\right]dz}. \tag{6.3.18}$$

对于有阻尼情况，式（4.3.17）可以写为

$$\ddot{q}_n+2\,\varepsilon_n\dot{q}_n+\omega_n^2 q_n=-\eta_n\ddot{u}_g(t), \tag{6.3.17$'$}$$

式中 ε_n 为相应于第 n 振型的阻尼系数[见第三章式（3.2.67）]。

今设有自振频率为 ω_n、阻尼系数为 ε_n 的单质点系统，在加速度 $\ddot{u}_g(t)$ 的地震作用下，其相对位移反应为 $\delta_n(t)$，则 $\delta_n(t)$ 应满足微分方程

$$\ddot{\delta}_n+2\,\varepsilon_n\dot{\delta}+\omega_n^2\delta_n=-\ddot{u}_g(t). \tag{6.3.19}$$

比较式（6.3.17）和（6.3.19）则有

$$q_n=\eta_n\delta_n. \tag{6.3.20}$$

于是在地震作用下，有水时的结构位移反应为

$$u(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(z)q_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}A_{rn}\overline{X}_r(z)\eta_n\delta_n. \tag{6.3.21}$$

结构的其余各种地震反应，均不难从式（6.3.21）求得。

结构所承受的作用外力（惯性力和动水压水）为

$$S(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}R(Z_n)q_n(t)=\frac{\rho F}{g}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}A_{rn}\overline{X}_r(z)\eta_n\delta_n(t)\omega_{0r}^2. \tag{6.3.22}$$

于是，沿高程积分可得基底剪力

$$Q(t)=\int_0^h S(z,t)dz=\frac{\rho}{g}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\omega_{0r}^2A_{rn}L_r\eta_n\delta_n(t), \tag{6.3.23}$$

式中

$$L_r=\int_0^h\overline{X}_r(z)dz.$$

以上就是计算水中结构地震反应的全部公式。如果我们近似地以无水振型代替有水振型，则计算过程将会大大简化。有兴趣的读者可以结合实例进行练习。

此外，还应当指出，我们在第三章中也得到了圆柱形贮液容器的有关计算公式。但是，这些公式的导出，是以圆环形容器当其内柱半径趋近于零时的极限情形而求得的。而在这里则是直接从圆柱形容器当内部及外部均有液体的情况求解的，并且主要感兴趣于外部(外域)液动压力的求解。但是，从所得到的计算公式的对比中，也从另一侧面相互印证了推导结果的正确性。

第五节　剪切悬臂梁结构的自由振动

一、基本运动方程

在上面几节里，我们研究了以弯曲变形为主的梁式结构。但在实际的工程建设中，也有不少属于以剪切变形为主的所谓"矮胖"结构。因此，对于这类结构的研究无疑也将具有很重要的实际意义。同时，鉴于剪切结构所满足的为二阶微分方程，所以在求解自振特性时，我们可以放弃前面所采用的有水振型按无水振型展开的级数解法，而是利用直接积分的精确解法。当然，从理论上说，弯曲振动梁也可以采用下面即将介绍的方法，但是毕竟十分繁复。所以这里不作详细介绍。

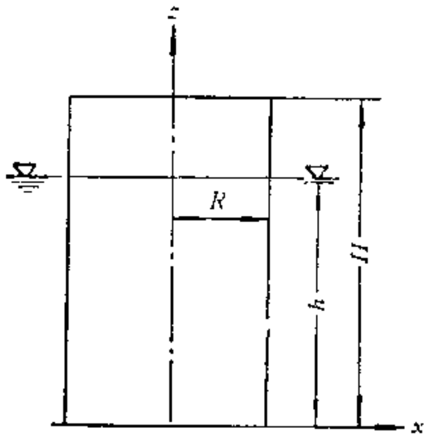


图 6.5.1

设有如图 6.5.1 的以剪切变形为主的水中结构物，其截面仍为圆柱形。这样，关于动水压力的求解问题，仍如前述。式（6.2.33）仍然适用。只是公式中弯曲振型 X_n 应当用相应的剪切振型来代替。结构的剪切自由振动方程为

$$\frac{GF}{k_0}\frac{d^2X_n}{dz^2}+\left(\frac{\rho F}{g}+\bar{M}(z)\right)\omega_n^2X_n=0, \tag{6.5.1}$$

式中 $\bar{M}(z)$ 为水体的附加折算质量，见式（6.3.12），F 为截面积，k_0 为断面剪切形状系数，ρ 为材料的容重，ω_n 为第 n 振型的有水自振频率，X_n 为有水振型。G 为断面剪切模量。

将式（6.5.1）稍加整理后，得到

$$\frac{d^2X_n}{dz^2}+\lambda^2X_n=-\lambda_1^2\bar{m}, \tag{6.5.2}$$

式中

$$\lambda^2=\frac{k_0\rho}{Gg}\omega_n^2,\quad \lambda_1^2=\frac{g}{\rho F}\cdot\lambda^2,$$

$$\bar{m}=\sum_{s=1,3,5}^{\infty}p_s\cos\frac{\pi s}{2h}z\int_0^h X_n\cos\frac{\pi s}{2h}\xi d\xi,$$

$$p_s=\frac{4\gamma_0}{g}\bar{H}_s,\quad \bar{H}_s \text{ 见前面定义}$$

方程（6.5.2）的齐次解为

$$X_n^{(1)}=A\cos\lambda z+B\sin\lambda z, \tag{6.5.3}$$

若令特解为

$$X_n^{(2)}=C\cos\frac{\pi s}{2h}z, \tag{6.5.4}$$

则全解为

$$X_n=X_n^{(1)}+X_n^{(2)}=A\cos\lambda z+B\sin\lambda z+C\cos\frac{\pi s}{2h}z. \tag{6.5.5}$$

所以，将式（6.5.5）代入 $\bar{m}$ 中，则得

$$\bar{m}(z)=\sum_{s=1,3,5}^{\infty}p_s\cos\frac{\pi s}{2h}z\left(AI_s^{(1)}+BI_s^{(2)}+C\frac{h}{2}\right), \tag{6.5.6}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}I_s^{(1)}&=\int_0^h\cos\lambda z\cos\frac{\pi s}{2h}zdz,\\ I_s^{(2)}&=\int_0^h\sin\lambda z\cos\frac{\pi s}{2h}zdz.\end{aligned}\right\} \tag{6.5.7}$$

将式（6.5.4）、（6.5.6）代回式（6.5.2），得到

$$C\cos\frac{\pi s}{2h}z\left[-\left(\frac{\pi s}{2h}\right)^2+\lambda^2\right]=-\lambda_1^2\sum_{s=1,3,5}^{\infty}P_s\cos\frac{\pi s}{2h}z\left[AI_s^{(1)}+BI_s^{(2)}+C\frac{h}{2}\right],$$

将上式两端乘以$\cos\frac{\pi s'}{2h}zdz$，并从 0 到 h 积分，则得

$$C=\frac{-\lambda_1^2P_s\left[AI_s^{(1)}+BI_s^{(2)}\right]}{\lambda^2-\left(\frac{\pi s}{2h}\right)^2+\lambda_1^2P_s\cdot\frac{h}{2}}=F_s\left[AI_s^{(1)}+BI_s^{(2)}\right],$$

$$F_s=\frac{-\lambda_1^2P_s}{\left[\lambda^2-\left(\frac{\pi s}{2h}\right)^2\right]\left[1+\frac{h}{2}\frac{\lambda_1^2P_s}{\lambda^2-\left(\frac{\pi s}{2h}\right)^2}\right]}=\frac{E_s}{1-\frac{h}{2}E_s},$$

$$E_s=\frac{1}{\lambda^2-\left(\frac{\pi s}{2h}\right)^2}\cdot\frac{4\gamma_r\lambda^2}{\rho F}\overline{H}_s.$$

因此，满库振型为

$$X_n=A\cos\lambda z+B\sin\lambda z+\sum_{s=1,3,5}^{\infty}F_s(AI_s^{(1)}+BI_s^{(2)})\cos\frac{\pi s}{2h}z. \tag{6.5.8}$$

式中，积分常数 A 和 B 可由边界条件确定。

二、结构顶面和液面齐平时的频率方程

如果结构顶面和水面齐平，将有如下的边界条件：

$$X_n|_{z=0}=0, \tag{6.5.9}$$

$$\left.\frac{dX_n}{dz}\right|_{z=H}=0. \tag{6.5.10}$$

将式 (6.5.8) 代入式 (6.5.9)、(6.5.10)，则得

$$A+\sum_{s=1,3,5}^{\infty}F_s(AI_s^{(1)}+BI_s^{(2)})=0$$

$$-A\lambda\sin\lambda H+B\lambda\cos\lambda H-\sum_{s=1,3,5}^{\infty}\frac{\pi s(-1)^{\frac{s-1}{2}}}{2H}F_s(AI_s^{(1)}+BI_s^{(2)})=0.$$

经整理后得到

$$\left.\begin{aligned}&A\left(1+\sum_{s=1,3,5}^{\infty}F_sI_s^{(1)}\right)+B\sum_{s=1,3,5}^{\infty}F_sI_s^{(2)}=0,\\&A\left(-\lambda\sin\lambda H-\sum_{s=1,3,5}^{\infty}\frac{\pi s}{2H}(-1)^{\frac{s-1}{2}}F_sI^{(1)}\right)+\\&+B\left(\lambda\cos\lambda H-\sum_{s=1,3,5}^{\infty}\frac{\pi s}{2H}(-1)^{\frac{s-1}{2}}F_sI_s^{(2)}\right)=0.\end{aligned}\right\} \tag{6.5.11}$$

由式 (6.5.11) 的系数行列式为零的条件，就得到了频率方程：

$$\lambda\cos\lambda H+E\sin\lambda H+EF-G=0 \tag{6.5.12}$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
E&=\frac{\sum\limits_{s=1,3,5}^{\infty}F_sI_s^{(2)}}{1+\sum\limits_{s=1,3,5}^{\infty}F_sI_s^{(1)}},\\
F&=\sum_{s=1,3,5}^{\infty}(-1)^{\frac{s-1}{2}}\frac{\pi s}{2H}F_sI_s^{(1)},\\
G&=\sum_{s=1,3,5}^{\infty}(-1)^{\frac{s-1}{2}}\frac{\pi s}{2H}F_sI_s^{(2)}.
\end{aligned}\right\}\tag{6.5.13}
$$

从式（6.5.12）求得频率后，代回式（6.5.11），就可以求得A和B的相对值，再把它们代入（6.5.8）就可以求得有水时的振型。对于弯曲梁的情况，理论上也可仿此进行，但是演算过程，必然更为繁复，这里不作介绍。

三、结构部分临液时的频率方程

如果结构是部分临水情况，例如水位位于高h处（$h<H$），则结构的运动微分方程将由二式组成。有水部分（0－h段）遵循方程（6.5.1），无水部分（$h-H$段）遵循方程

$$
\frac{GF}{k_0}\frac{d^2X_{nl}}{dz^2}+\frac{\rho F}{g}\omega_n^2\overline{X}_{ne}=0. \tag{6.5.14}
$$

式(6.5.1)的解为式(6.5.8)。

式(6.5.14)的解为

$$
\overline{X}_{ne}=C\cos\lambda z+D\sin\lambda z. \tag{6.5.15}
$$

积分常数A、B、C和D由下列条件决定：

$$X_n|_{z=0}=0, \qquad ①$$

$$\left.\frac{dX_n}{dz}\right|_{z=h}=\left.\frac{d\overline{X}_{ne}}{dz}\right|_{z=h}, \qquad ②$$

$$X_n|_{z=h}=\overline{X}_{ne}|_{z=h}, \qquad ③$$

$$\left.\frac{d\overline{X}_{ne}}{dz}\right|_{z=H}=0. \qquad ④$$

条件①和④为原来存在的边界条件，②和③为结构物的交接面的连续性条件。

由式(6.5.8)和(6.5.15)再利用①—④，得到

$$
\left.\begin{aligned}
&A+EB=0,\\
&A\left(-\lambda\sin\lambda h-\sum_{s=1,3,5}^{\infty}\frac{\pi S}{2h}F_sI_s^{(1)}(-1)^{\frac{s-1}{2}}\right)+B(\lambda\cos\lambda h-\\
&\quad-\sum_{s=1,3,5}^{\infty}\frac{\pi S}{2h}(-1)^{\frac{s-1}{2}}F_sI_s^{(2)}+C\lambda\sin\lambda h-D\lambda\cos\lambda h=0,\\
&A\cos\lambda h+B\sin\lambda h-C\cos\lambda h-D\sin\lambda h=0,\\
&C\sin\lambda H-D\cos\lambda H=0.
\end{aligned}\right\}\tag{6.5.16}
$$

引进以前的符号F和G，惟其中H应代之h，则由式(6.5.16)的系数行列式为零的条件，

$$
\Delta=\begin{vmatrix}
1 & E & 0 & 0\\
-\lambda\sin\lambda h-F & \lambda\cos\lambda h-G & \lambda\sin\lambda h & -\lambda\cos\lambda h\\
\cos\lambda h & \sin\lambda h & -\cos\lambda h & \sin\lambda h\\
0 & 0 & \sin\lambda H & -\cos\lambda H
\end{vmatrix}=0,
$$

即获得了频率方程。

将上式展开后，得到

$$\lambda\cos\lambda h-G\{(\cos\lambda h\cos\lambda H+\sin\lambda h\sin\lambda H)\}-$$
$$-\sin\lambda h\{-\lambda\sin\lambda h\cos\lambda H+\lambda\cos\lambda h\sin\lambda H\}-$$
$$-E(-\lambda\sin\lambda h-F)\{\cos\lambda h\cos\lambda H+\sin\lambda h\sin\lambda H\}+$$
$$+E\cos\lambda h\{-\lambda\sin\lambda h\cos\lambda H+\lambda\cos\lambda h\sin\lambda H\}=0$$

即

$$-G(\cos\lambda h\cos\lambda H+\sin\lambda h\sin\lambda H)+E\lambda\sin\lambda H(\cos^2\lambda h+\sin^2\lambda h)+$$
$$+\lambda\cos\lambda H(\cos^2\lambda h+\sin^2\lambda h)+EF(\cos\lambda h\cos\lambda H+\sin\lambda h\sin\lambda H)=0.$$

将上式除以 $\cos\lambda H$，并再经整理后，得到

$$\lambda(1+E\operatorname{tg}\lambda H)+(\cos\lambda h+\sin\lambda h\operatorname{tg}\lambda H)(EF-G)=0. \qquad (6.5.17)$$

式（6.5.17）就是结构部分临水时的剪切梁的频率方程。频率一经求得，就可以按式(6.5.16)求出 A、B、C 和 D 之间相对比值。再把它们代回式(6.5.8)和(6.5.15)就可以求得有水时的各段振型。

有水振型和频率求得以后，关于地震作用下的反应，仍可仿第四节所介绍的原理进行计算。

第六节　弯曲梁自振特性计算实例

为了研究动水压力对自振特性的影响，并为计算步骤示例起见，我们先按式(6.3.7)计算了内、外动水压力对于基本频率的影响。

等截面悬臂梁的振型可用下式表示：

$$\overline{X}_n(z)=\alpha_n(\cos K_nz-\cosh K_nz)+\sin K_nz-\sin K_nz \qquad (6.6.1)$$

式中

$$\alpha_n=\frac{\sin K_nh+\sinh K_nh}{\cos K_nh+\cosh K_nh}.$$

其中 K_nh 是频率方程

$$\cosh Kh\cdot\cos Kh=-1$$

的根，当 $n=1$，2，3…时，K_nh 的值分别等于1.8751，4.6940，7.8547…。与任一振型 X_n 相对应的自由振动频率 ω_{0n} 由下式给出：

$$\omega_{0n}=K_n^2\sqrt{\frac{EIg}{\rho F}} \qquad (6.6.2)$$

式中 E 为材料的弹性模量，I 为结构的截面惯性矩，ρ 为材料的密度，F 为截面积。

把式(6.6.1)代入式(6.3.6′)并完成积分运算后，得到

$$N_n=\left[\frac{\cosh K_nh\sin K_nh-\cos K_nh\sinh K_nh}{\cos K_nh+\cosh K_nh}\right]^2,$$

$$N_{ns}=2\frac{1}{\left(\frac{\pi s}{2}\right)^4-\left(K_nh\right)^4}\left[(-1)^{\frac{s-1}{2}}\left(\frac{\pi S}{2}\right)^3\frac{\sin K_nh\cosh K_nh-\sinh K_nh\cos K_nh}{\cos K_nh+\cosh K_nh}-(K_nh)^3\right].$$

若将(6.3.7)略加变换，可得

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_{01}}\right)^2=\frac{1}{1+\frac{4\gamma_0 h}{\rho N_1\pi a_1(1-\xi^2)}\sum_{s=1,3,5}^{\infty}H_s' M_{Is}^2}. \tag{6.6.3}$$

式中

$$\xi=\frac{a_2}{a_1},\qquad H_s'=\frac{1}{s}\left[\xi\left(\frac{I_{Is}}{I'_{Is}}\right)_{r=a_2}+\left(\frac{K_{Is}}{K'_{Is}}\right)_{r=a_1}\right].$$

由式(6.6.3)可见，对于一定的 ρ 和γ_0，频率随着高度与外半径之比(h/a_1)以及内、外半径之比 ξ 而改变。对于实心圆柱体或者不考虑内部动水压力，则可取 $\xi=0$，频率仅随高度与半径之比而改变。

现考虑仅外部有水及仅内部有水的两种情况。取 $\rho=2.4\times10^3$公斤/米^3，$\gamma_0=1.0\times10^3$公斤/米^3，按不同的 a_1/h及 ξ 值，利用式（4.6.3）进行运算，所得结果列于表 6.6.1 及表 6.6.2，并绘于图 6.6.1 和图 6.6.2。

表 6.6.1

半径与高度之比(a_1/h)	有水频率与无水频率之比 $\left(\frac{\omega_1}{\omega_{01}}\right)$
1/5	0.9039
1/10	0.8710
1/20	0.8512
1/30	0.8430

表 6.6.2

外半径与高度之比 (a_1/h)	有水频率与无水频率之比 $\left(\frac{\omega_1}{\omega_{01}}\right)$			
	$\xi=0.2$	$\xi=0.4$	$\xi=0.6$	$\xi=0.8$
1/5	0.991	0.965	0.907	0.775
1/10	0.991	0.965	0.907	0.775
1/20	0.989	0.963	0.905	0.772
1/30	0.987	0.960	0.902	0.770

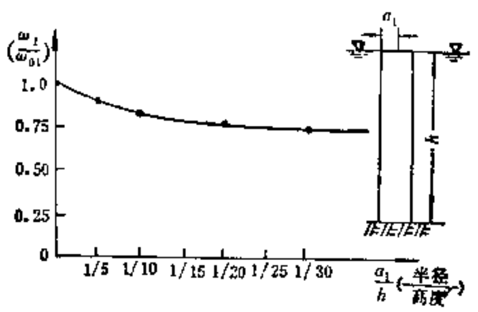


图 6.6.1

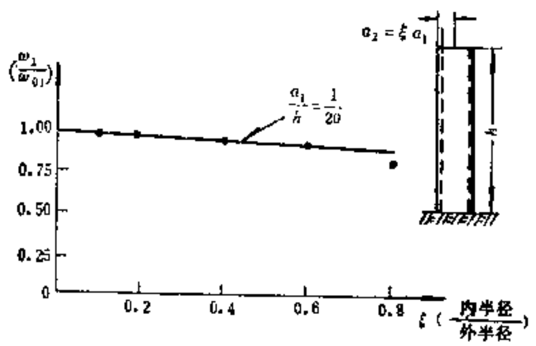


图 6.6.2

在上面的计算中，我们取 $s=1$，3，5，7，9 五项。从计算结果可以看出，外部动水压力对频率的影响，随 a_1/h 比值的减小而增大；内部动水压力对频率的影响也随 a_1/h 的减小而增大，并且随 ξ 的增大而增大。

当然，以上的计算是根据近似式(6.6.3)得到的。但是，我们可以肯定，对于基本频率来说，上述结果与精确解的差异是不大的。对于一侧有水的悬臂梁作过类似的比较[3]，两者的差异是十分微小的。

算例：

下面，我们根据式(6.3.8)对一具体工程结构进行了分析，其几何尺寸如下：柱体高 $h=120$ 米，外半径 $a_1=7.2$ 米，内半径 $a_2=5.0$ 米。首先，我们计算无水情况下的前三个频率和振型，这三个频率是

$$\omega_{01}=3.83 \text{ 弧度/秒},$$
$$\omega_{02}=24.10 \text{ 弧度/秒},$$
$$\omega_{03}=67.80 \text{ 弧度/秒}.$$

然后，计算出 H_s，M_{ns} 及 N_n 各值，再将这些数值代入式(6.3.8)，并稍作整理后，就得到如下的方程式(计算中取级数的前七项之和，即 $s=1$，3，5…13)

$$\left.\begin{aligned}&(41873-8856.0P)A_1-1583.8\,PA_2+1464.5\,PA_3=0,\\&-1583.8\,PA_1+(2278500-14109\,P)A_2-1580.1\,PA_3=0,\\&1464.5\,PA_1-1580.1\,PA_2+(20676000-15161\,P)A_3=0.\end{aligned}\right\}\quad(6.6.4)$$

式中 $P=\omega^2$

令式(6.6.4)的系数行列式为零，就得到了频率方程，展开后则得

$$P^3-1581\,P^2+239800\,P-1098000=0.$$

解上述方程可得

$$P_1=4.725,\qquad \omega_1=2.173 \text{ 弧度/秒},$$
$$P_2=165.5,\qquad \omega_2=12.86 \text{ 弧度/秒},$$
$$P_3=1404\ ,\qquad \omega_3=37.46 \text{ 弧度/秒}.$$

再将 $\omega_1\omega_2$ 及 ω_3 代回原方程(6.6.4)，求得 A_{nK} 的相对值，见表 6.6.3

表 6.6.3

n	有水频率 (弧度/秒)	与无水频率相比较降低百分率 %	A_{nk}		
			$K=1$	$K=2$	$K=3$
1	2.173	43.3	1	0.0003382	−0.00003
2	12.86	46.8	0.1997	1	−0.1237
3	37.46	44.7	0.1923	−0.1612	1

第七节　椭圆坐标中的三维波动方程

一、概述

在工程实践中我们经常会遇到截面呈椭圆形的柱形构筑物，如桥墩结构和闸墩结构等。

需要指出的是，要在理论上严格分析椭圆柱体在地震作用下和水体的耦联振动问题，比起圆柱体结构来要困难得多，因而不得不作某些近似处理。其最大的困难在于要在椭圆坐标上求解三维波动方程，最终将归结为求解变系数的马休（Mathieu）方程。因此，尽管在工程实践中经常会遇到这类结构，但是对于它的研究还是很不完善的，有关的文献很少见到。1965年小坪清真对这一问题进行了若干理论和实验研究[7]，但是理论推导十分简略，并且只考虑了简谐振动的反应。鉴于对这个问题的研究不仅具有实际意义，而且也富有理论价值，所以在这一节内，我们将详细推导出椭圆坐标系上三维波动方程的各种解答。有了动水压力的表达式后，再把结构作为梁式体系求出它在地震作用下的反应。

二、基本方程

已知在笛卡尔坐标系上的三维波动方程为：

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=\frac{1}{K^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \tag{6.7.1}$$

为了求解的方便，我们可以先设法消去时间变量。假定地震为稳态的简谐振动，其振动位移为$\frac{\alpha g}{\omega^2}\sin\omega t$，$\alpha$ 为地震系数，则动水压力为：

$$p(x,y,z,t)=p(x,y,z)\sin\omega t, \tag{6.7.2}$$

将上式代入（6.7.1），可以得到：

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+\frac{\omega^2}{K^2}p=0. \tag{6.7.3}$$

上式是包含三个变量 x,y,z 的偏微分方程。由于圆柱呈椭圆形，故首先要把式（6.7.3）变换到椭圆坐标系 ξ,η,z 上去。已知直角坐标和椭圆坐标的变换关系有：

$$\left.\begin{aligned}x&=\gamma\cosh\xi\cos\eta,\\ y&=\gamma\sinh\xi\sin\eta.\end{aligned}\right\} \tag{6.7.4}$$

或者可简写为：

$$\left.\begin{aligned}x&=a\cos\eta,\\ y&=b\sin\eta.\end{aligned}\right\} \tag{6.7.4'}$$

式中，$a=\gamma\cosh\xi$，称为椭圆的长半轴；$b=\gamma\sinh\xi$，称为椭圆的短半轴；$\xi_0=\tanh^{-1}\frac{b}{a}$，称为椭圆面的坐标。$\gamma$ 为一常量，变量 η 由 0 变化到 2π，变量 ξ 由 0 变化到∞，详见图6.7.1。对这个变换，我们将作较详细的讨论。设 ξ 为常数，则式（6.7.4）定义一个椭圆，因为

$$\frac{x}{\gamma\cosh\xi}=\cos\eta,\quad \frac{y}{\gamma\sin\xi}=\sin\eta.$$

故

$$\frac{x^2}{(\gamma\cosh\xi)^2}+\frac{y^2}{(\gamma\sinh\xi)^2}=1. \tag{6.7.5}$$

这个椭圆的长半轴为 $\gamma\cosh\xi$，短半轴为 $\gamma\sin\xi$，焦点之间的距离为：

$$2\sqrt{(\gamma\cosh\xi)^2-(\gamma\sinh\xi)^2}=2\gamma.$$

由此可见，ξ 等于常数的曲线组成一族共焦椭圆。当 $\xi=0$ 时，则得一退化椭圆，它就是 $(-\gamma,0)$ 为 $(\gamma,0)$ 之间的一根直线；当 $\xi\to\infty$时，则椭圆就趋近于一个以原点为圆心，半径为无穷大的圆。另一方面，如 $\eta=$常数，则（6.7.4）为：

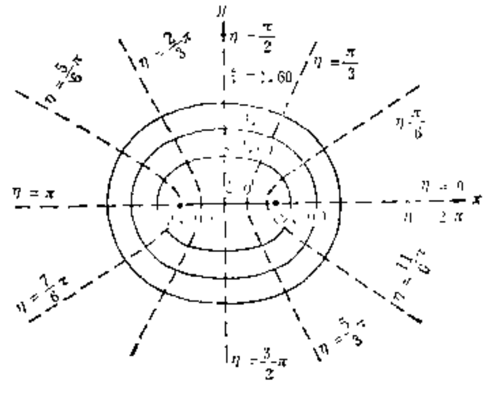


图 6.7.1

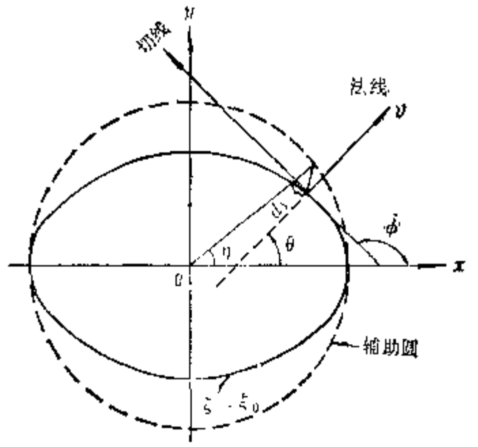


图 6.7.2

$$\frac{x}{\gamma\cos\eta}=\cosh\xi,\quad \frac{y}{\gamma\sin\eta}=\sinh\xi,$$

故

$$\frac{x^2}{(\gamma\cos\eta)^2}-\frac{y^2}{(\gamma\sin\eta)^2}=\cosh^2\xi-\sinh^2\xi=1. \tag{6.7.6}$$

这代表一族双曲线，其主轴与 x 轴重合，焦点间距离亦为

$$2\sqrt{(\gamma\cos\eta)^2+(\gamma\sin\eta)^2}=2\gamma.$$

由此可见，双曲线是共焦的，且与 ξ＝常数的椭圆具有同样的焦点。如 $\eta=0$，则式(6.7.4)为

$$x=\gamma\cosh\xi,\quad y=0$$

对应的双曲线退化为一直线，沿 x 轴由 $x=\gamma$ 伸展到 $x=+\infty$。同样，若 $\eta=\pi$，则得

$$x=-\gamma\cosh\xi,\quad y=0,$$

对应的双曲线退化为一直线，沿 x 轴由 $x=-\gamma$ 伸展到 $x=-\infty$。又如 $\eta=\pi/2$，则得

$$x=0,\quad y=\gamma\sinh\xi,$$

对应的轨迹是 y 轴的上半部。$\eta=3\pi/2$，则轨迹为 $x=0$，$y=-\gamma\sinh\xi$，即为 y 轴的一部分，由 $y=0$ 伸展到 $y=-\infty$。同样，我们也在图 6.7.1 上画出了双曲线的其余部分。

通过坐标变换后，式（6.7.3）具有如下形式（详细推导见附录一）：

$$\frac{\partial^2 p}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}(\cosh 2\xi-\cos 2\eta)\frac{\gamma^2}{2}+\frac{\omega^2}{K^2}(\cosh 2\xi-\cos 2\eta)\frac{\gamma^2}{2}p=0 \tag{6.7.7}$$

下面我们再来讨论问题的边界条件，如图 6.7.2 所示。

切线方向的方向余弦为：

$$\frac{dx}{ds}=\cos\phi,$$

$$\frac{dy}{ds}=\sin\phi=\cos(\phi-\frac{\pi}{2}).$$

设外法线的方向为 ν，则法线方向的方向余弦为：

$$\frac{dx}{d\nu}=\cos(\phi-2\pi)=\cos\theta=\sin\phi,$$

$$\frac{dy}{dv}=\sin\left(\phi-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\theta=-\cos\phi.$$

下面来推导边界条件，并且分两种不同的情况讨论。结构物计算简图如图 6.7.3 所示。

假定地震波为稳态正弦波运动，地震位移 $u=(\alpha g/\omega^2)\cdot\sin\omega t$ 的作用平行于短轴方向，忽略表面重力波影响后的边界条件为：

① $\left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=0}=0$，　② $p|_{z=h}=0$，

③ $p|_{\eta=0}=0$，　④ $\left.\frac{\partial p}{\partial \eta}\right|_{\eta=\pi/2}=0$.

⑤ $\left.\left(\frac{\partial p}{l_{\xi 0}\partial\xi}\right)\right|_{\xi=\xi_0}=-\frac{\gamma_0}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\sin\theta$，即

$$\left.\frac{\partial p}{\partial\xi}\right|_{\xi=\xi_0}=\alpha\gamma_0 a\sin\eta\sin\omega t,$$

⑥ $\left.\frac{\partial p}{\partial\xi}\right|_{\xi\to\xi_1}=0\ (\xi_1\gg\xi_0)$.

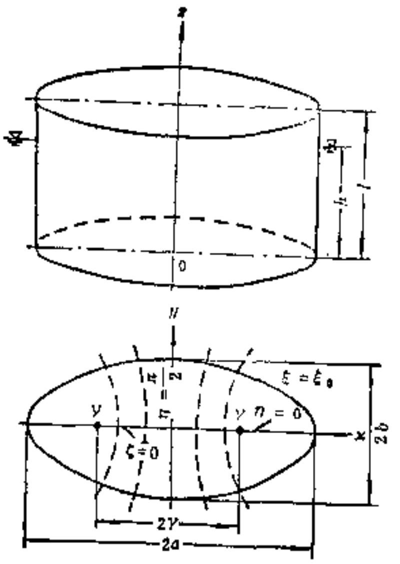


图 6.7.3

当地震沿长轴方向作用时，则有：

① $\left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=0}=0$，　② $p|_{z=h}=0$，

③ $\left.\frac{\partial p}{\partial \eta}\right|_{\eta=0}=0$，　④ $p|_{\eta=\pi/2}=0$，

⑤ $\left.\frac{\partial p}{\partial\xi}\right|_{\xi=\xi_0}=\alpha\gamma_0 b\cos\eta\sin\omega t$，

⑥ $\left.\frac{\partial p}{\partial\xi}\right|_{\xi=\xi_1}=0\ (\xi_1\gg\xi_0)$.

第八节　椭圆形结构物的动水压力

一、求解马休方程的基本知识

下面，我们来求解偏微分方程(6.7.7)。设地震沿短轴方向作用，采用变量分离法解此方程令

$$p(\xi,\eta,z)=M(\xi)m(\eta)Z(z),\tag{6.8.1}$$

将式(6.8.1)代入式(6.7.7)可得*：

$$M''(\xi)m(\eta)Z(z)+m^{11}(\eta)M(\xi)Z(z)+\frac{\gamma^2}{2}(\cosh 2\xi-\cos 2\eta)M(\xi)m(\eta)Z''(z)+$$
$$+\bar{k}^2\frac{\gamma^2}{2}(\cosh 2\xi-\cos 2\eta)M(\xi)m(\eta)Z(z)=0\tag{6.8.2}$$

式中

$$\bar{k}^2=\omega^2/K^2.$$

将式(6.8.2)遍除以 $M(\xi)m(\eta)Z(z)$，则得：

$$\frac{M''(\xi)}{M(\xi)}+\frac{m''(\eta)}{m(\eta)}+\frac{\gamma^2}{2}(\cos 2\xi-\cos 2\eta)\frac{Z''(z)}{Z(z)}+$$
$$+\bar{k}^2\frac{\gamma^2}{2}(\cosh 2\xi-\cos 2\eta)=0.\tag{6.8.3}$$

* M''，m'' 和 Z'' 分别表示对 ξ，η 和 Z 的二阶导数。

若令
$$\frac{Z''(z)}{Z(z)}=-\bar{\alpha}^2,$$
即得
$$Z''(z)+\bar{\alpha}^2Z(z)=0. \tag{6.8.4}$$
这样，式(6.8.3)又可表示为
$$\frac{M''(\xi)}{M(\xi)}+\frac{m''(\eta)}{m(\eta)}+\frac{\gamma^2}{2}(\cosh 2\xi-\cos 2\eta)[\bar{k}^2-\bar{\alpha}^2]=0, \tag{6.8.5}$$
经整理后可得：
$$\frac{M''(\xi)}{M(\xi)}+\frac{\gamma^2}{2}(\bar{k}^2-\bar{\alpha}^2)\cosh 2\xi=-\frac{m''(\eta)}{m(\eta)}+\frac{\gamma^2}{2}(\bar{k}^2-\bar{\alpha}^2)\cos 2\eta \tag{6.8.6}$$
由于式(6.8.6)右端仅为 η 的函数，而左端仅为 ξ 的函数，要使两式相等，必为一常数 λ,故可以求得：
$$\frac{M''(\xi)}{M(\xi)}+\frac{\gamma^2}{2}(\bar{k}^2-\bar{\alpha}^2)\cosh 2\xi=\lambda,$$
$$\frac{m''(\eta)}{m(\eta)}-\frac{\gamma^2}{2}(\bar{k}^2-\bar{\alpha}^2)\cos 2\eta=-\lambda.$$

化简以上两式后得到：
$$M''(\xi)-(\lambda-2q\cosh 2\xi)M(\xi)=0, \tag{6.8.7}$$
$$m''(\eta)+(\lambda-2q\cos 2\eta)m(\eta)=0. \tag{6.8.8}$$
式中
$$q=\frac{\gamma^2}{4}(\bar{k}^2-\bar{\alpha}^2).$$
方程式(6.8.4)的解为：
$$Z''(z)=A\cos\bar{\alpha}z+B\sin\bar{\alpha}z. \tag{6.8.9}$$
显而易见，为了满足地震短轴方向作用时的边界条件①，积分常数 $B=0$，故有：
$$Z(z)=A\cos\bar{\alpha}z. \tag{6.8.10}$$
为了满足边界条件②，则有：
$$\bar{\alpha}=\frac{\pi(2m+1)}{2h}. \qquad (m=0,1,2,\cdots)$$

方程(6.8.8)称为马休方程，而(6.8.7)称为修正的马休方程 (Modified Mathieu Equation)。若在这两个方程中将独立变量变换一下， 我们将会发现这二个方程属于同一类型。如令(6.8.8)中的 $\eta=i\eta$，则可以把马休方程变为修正的马休方程。因此，我们只要研究一下式(6.8.8)的解就可以了。但需要注意的是马休方程虽然在形式上较勒上特方程或贝塞尔方程简单，但是它却依赖于两个参数 λ 及 q，因此，在前面的一些方程中所未遇到的某些特征将会在解中出现。我们先来看一下，如在式(6.8.8)中令$q=0$，为了避免符号上的混淆起见，我们暂将其写为：
$$y''+\lambda y=0^{*}, \tag{6.8.11}$$
并令 $\lambda=n^2$，则 $\cos n\eta$ 和 $\sin n\eta$ 是两个线性独立解。因此，方程(6.8.8)所得到的任何解在 $q=0$ 时，一定转化为 $\cos n\eta$ 和 $\sin n\eta$ 的线性组合。下面我们来求马休方程的周期解 $y(\eta,\lambda,q)$，如 $y(\eta,\lambda,q)$是这样的一个解，则 λ 及 q 应相互关联[8]，如

* y'' 为 y 对 η 的二次导数。

$$\lambda=n^2+\alpha_1 q+\alpha_2 q^2+\alpha_3 q^3+\cdots. \tag{6.8.12}$$

由于在$q=0$时，$\lambda=n^2$，我们应取 $\alpha_0=n^2$，则得到如下形式的解：

$$y_1(\eta,\lambda,q)=\cos n\eta+qa_1(\eta)+q^2a_2(\eta)+q^3a_3(\eta)+\cdots,$$

在$q=0$时转化为 $\cos n\eta$，这样的解通常写为：

$$\mathrm{ce}_n(\eta,q). \tag{6.8.13}$$

此处，"ce"读作余弦椭圆。同样可以得到如下形式的解：

$$y_2(\eta,\lambda,q)=\sin n\eta+qb_1(\eta)+q_2b_2(\eta)+q^3b_3(\eta)+\cdots,$$

当$q=0$时转化为$\sin n\eta$，一般写作

$$\mathrm{se}_n(\eta,q). \tag{6.8.14}$$

此处，"se"读作正弦椭圆。$\mathrm{ce}_n(\eta,q)$及$\mathrm{se}_n(\eta,q)$都称为第一类n阶马休函数。马休方程的另外二个线性无关解 $\mathrm{fe}_n(\eta,q)$ 及 $\mathrm{ge}_n(\eta,q)$ 分别对应于 $\mathrm{ce}_n(\eta,q)$ 及 $\mathrm{se}_n(\eta,q)$，但都不是周期函数。所以方程(6.8.8)的通解可写为：

$$y(\eta)=A\mathrm{ce}_n(\eta,q)+B\mathrm{fe}_n(\eta,q), \tag{6.8.15}$$

或

$$y(\eta)=C\mathrm{se}_n(\eta,q)+D\mathrm{ge}_n(\eta,q), \tag{6.8.16}$$

式中A、B、C和D为任意常数。

同理，可求得方程(6.8.7)的通解。上面曾谈到过方程 (6.8.8) 可以用 $\eta=i\eta$ 而变换为(6.8.7)的修正马休方程。因此，

$$\mathrm{ce}_n(i\xi,q)\text{及}\mathrm{se}_n(i\xi,q)$$

应该是方程(6.8.7)的解，它们通常写成：

$$\mathrm{Ce}_n(\xi,q)\text{及}\mathrm{Se}_n(\xi,q),$$

这里，

$$\mathrm{Ce}_n(\xi,q)\equiv\mathrm{ce}_n(i\xi,q),$$

$$\mathrm{Se}_n(\xi,q)\equiv-i\mathrm{se}_n(i\xi,q).$$

并称为第一类n阶修正马休函数。方程 (6.8.7) 的另外两个线性无关的解为 $\mathrm{Fe}_n(\xi,q)$ 及 $\mathrm{Ge}_n(\xi,q)$。所以方程(6.8.7)的通解可写为：

$$y(\xi)=\bar{A}\mathrm{Ge}_n(\xi,q)+\bar{B}\mathrm{Fe}_n(\xi,q) \tag{6.8.17}$$

或

$$y(\xi)=\bar{C}\mathrm{Se}_n(\xi,q)+\bar{D}\mathrm{Ge}_n(\xi,q). \tag{6.8.18}$$

关于函数 $\mathrm{fe}_n(\eta,q)$，$\mathrm{ge}_n(\eta,q)$，$\mathrm{Fe}_n(\xi,q)$和 $\mathrm{Ge}_n(\xi,q)$的详细定义可参阅专著[9]、[10]。$\bar{A}$，$\bar{B}$，$\bar{C}$ 和 $\bar{D}$ 为积分常数，可由具体的边界条件决定。

函数 $\mathrm{ce}_n(\eta,q)$及 $\mathrm{se}_n(\eta,q)$ 当n为奇数时是周期为2π的周期函数，当n为偶数时是周期为π的周期函数，因此，可以写为：

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{ce}_n(\eta,q)&=\sum_{\alpha=0}^{\infty}A_{2\alpha}^{(2n)}\cos 2\alpha\eta,\\
\mathrm{ce}_{2n+1}(\eta,q)&=\sum_{\alpha=0}^{\infty}A_{2\alpha+1}^{(2n+1)}\cos(2\alpha+1)\eta;\\
\mathrm{se}_{2n}(\eta,q)&=\sum_{\beta=0}^{\infty}B_{2\beta}^{(2n)}\sin 2\beta\eta,\\
\mathrm{se}_{2n+1}(\eta,q)&=\sum_{\beta=0}^{\infty}B_{2\beta+1}^{(2n-1)}\sin(2\beta+1)\eta.
\end{aligned}\right\} \tag{6.8.19}$$

二、地震沿短轴方向作用

根据边界条件性质，对方程(6.8.7)和(6.8.8)的两组通解应选择式(6.8.18)和(6.8.16)。同时由于要满足边界条件③$(p)|_{\eta=0}=0$，故式(6.8.16)中的常数 $D\equiv 0$。因此，方程(6.7.7)的解可以表示为：

$$p(\xi,\eta,z)=\sum_{m=0}^{\infty}[A_m \mathrm{Se}_1(\xi,q_m)+B_m \mathrm{Ge}_1(\xi,q_m)]\mathrm{se}_1(\eta,q_m)\cos\bar{\alpha}_m z. \quad (6.8.20)$$

将上式代入边界条件④，得到：

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \eta}\right)_{\eta=\pi/2}=\sum_{m=0}^{\infty}[A_m \mathrm{Se}_1(\xi,q_m)+B_m \mathrm{Ge}_1(\xi,q_m)]\mathrm{se}_1'\left(\frac{\pi}{2},\ q_m\right)\cos\bar{\alpha}_m z=0.$$

式中 $\mathrm{se}'\left(\frac{\pi}{2},\ q_m\right)$为 $\mathrm{se}(\eta,q_m)$对 η 的一次导数，所以如取 $\mathrm{se}_1(\eta,q_m)$为奇数项级数之和，则上述条件恒满足，亦即应取

$$\mathrm{se}_1(\eta,q_m)=\sum_{r=0}^{\infty}B_{2r+1}^{(1)}\sin(2r+1)\eta. \quad (6.8.21)$$

由边界条件⑥得到：

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{\xi=\xi_1}=\sum_{m=0}^{\infty}[A_m \mathrm{S'e}_1(\xi_1,q_m)+B_m \mathrm{G'e}_1(\xi_1,q_m)]\mathrm{se}_1(\eta,q_m)\cos\bar{\alpha}_m z=0,$$

所以

$$B_m=-A_m\frac{\mathrm{S'e}_1(\xi_1,q_m)}{\mathrm{G'e}_1(\xi_1,q_m)}. \quad (6.8.22)$$

式中 Se_1'，Ge_1' 为该函数对 ξ 的一次导数。将式(6.8.22)代入式(6.8.20)，得到：

$$\begin{aligned}p(\xi,\eta,z)&=\sum_{m=0}^{\infty}A_m\left[\mathrm{Se}_1(\xi,\ q_m)-\frac{\mathrm{S'e}_1(\xi_1\ q_m)}{\mathrm{G'e}_1(\xi_1,q_m)}\mathrm{Ge}_1(\xi,q_m)\right]\times\\&\quad\times\mathrm{se}_1(\eta,q_m)\cos\bar{\alpha}_m z\\&=\sum_{m=0}^{\infty}A_m S_1(\xi,q_m)\mathrm{se}_1(\eta,q_m)\cos\bar{\alpha}_m z.\end{aligned} \quad (6.8.23)$$

根据边界条件⑤$\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{\xi=\xi_0}=\alpha\gamma_0 a\sin\eta\sin\omega t$，并把 1 展开为余弦级数：

$$1=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{4(-1)^m}{\pi(2m+1)}\cos\frac{(2m+1)\pi}{2h}z, \quad (6.8.24)$$

再将式(6.8.23)和(6.8.24)代入边界条件⑤，则有：

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{\infty}A_m S_1'(\xi_0,q_m)\mathrm{se}_1(\eta,q_m)\cos\frac{(2m+1)\pi}{2h}z\\&=\alpha\gamma_0 a\sin\eta\sum_{m=0}^{\infty}\frac{4(-1)^m}{(2m+1)\pi}\cos\frac{(2m+1)\pi}{2h}z.\end{aligned} \quad (6.8.25)$$

上式两边各乘以 $se_1(\eta,q_m)d\eta$，并从 0 到 2π 积分，则由于

$$\int_0^{2\pi}\sin\eta se_1(\eta,q_m)d\eta=B_1^{(1)}\pi,$$

$$\int_0^{2\pi}[se_1(\eta,q_m)]^2d\eta=\left[\sum_{r=0}^{\infty}(B_{2r+1}^{(1)})^2\right]\pi,$$

比较式(6.8.25)两端的系数，就可得到：

$$A_m=\frac{\alpha\gamma_0 aB_1^{(1)}4(-1)^m}{S_1'(\xi_0,q_m)\left\{\sum_{r=0}^{\infty}(B_{2r+1}^{(1)})^2\right\}\pi(2m+1)} \quad . \tag{6.8.26}$$

将上式代回到式(6.8.23)得到：

$$p(\xi,\eta,z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{4\alpha\gamma_0 aB_1{}^{(1)}(-1)^m S_1(\xi,q_m)se_1(\eta,q_m)}{S_1{}'(\xi_0,q_m)\left\{\sum_{r=0}^{\infty}(B_{2r+1}^{(1)})^2\right\}\pi(2m+1)}\cos\frac{(2m+1)\pi}{2h}z. \tag{6.8.27}$$

式(6.8.27)系假定 $q_m=\frac{\gamma^2}{4}(\bar{k}^2-\bar{\alpha}_m^2)$，且恒有 $\bar{k}^2>\bar{\alpha}_m^2$，若 $m=s$，出现 $q_m'=-q_m$，即 $\bar{\alpha}_m^2>\bar{k}^2$，则可令

$$g_m'=\frac{r^2}{4}(\bar{\alpha}_m^2-\bar{k}^2),$$

并将求和分二段进行：

$$p(\xi,\eta,z)=\left[\sum_{m=0}^{s-1}\frac{4\alpha\gamma_0 a(-1)^m B_1^{(1)}S_1(\xi,q_m)se_1(\eta,g_m)}{S_1'(\xi_0,q_m)\left\{\sum_{r=0}^{\infty}B_{2r+1}^{(1)})^2\right\}(2m+1)\pi}\cos\frac{(an+1)}{2h}\pi z+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=s}^{\infty}\frac{4\alpha\gamma_0 a(-1)^m A_1^{(1)}S_1(\xi,-q_m')se_1(\eta,-q_m')}{S_1'(\xi_0,-q_m)\left\{\sum_{r=0}^{\infty}(A_{2r+1}^{(1)})^2\right\}(2m+1)\pi}\cos\frac{(2m+1)}{2h}\pi\right]z \tag{6.8.28}$$

式中
$$S_1(\xi,q_m)=Se_1(\xi,q_m)-\frac{S'e_1(\xi_1 q_m)}{G'e_1(\xi_1,q_m)}Ge_1(\xi,g_m),$$

$$S_1(\xi,-q_m')=Se_1(\xi,-q_m')-\frac{Se_1'(\xi_1,-q_m')}{Ge_1'(\xi_1,-qm_m^1}Ge_1(\xi,-q_m'),$$

$$se_1(\eta,q_m)=\sum_{r=0}^{\infty}B_{2r+1}^{(1)}\sin(2r+1)\eta,$$

$$se_1(\eta,-q_m')=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r+1}^{(1)}\sin(2r+)\eta.$$

S_1' 为 s_1 对 ξ 的一次导数，$se_1(\eta,q_m)$ 及 $se_1(\eta,-g_m')$ 为马休函数，而 $Se_1(\xi,q_m)$，$Se_1(\xi,-q_m')$，$Ge_1(\xi,q_m)$ 及 $Ge_1(\xi,-q_m')$ 为修正的马休函数。

沿柱体单位高度上所作用的动水压力为将式(6.8.28)对 η 从 0 到 2π 进行积分，即得：

$$P=\int_0^{2\pi} p\sin\theta l_{\xi_0} d\eta$$

$$=\int_0^{2\pi} p\frac{a\sin\eta l_{\xi_0}}{l_{\xi_0}}d\eta=\alpha\gamma_0\pi a^2F_s, \tag{6.8.29}$$

式中，
$$F_s=\sum_{m=0}^{s-1}\frac{4(-1)^m S_1(\xi_0,q_m)\{B_1^{(1)}\}^2\cos\frac{(2m+1)\pi}{2h}z}{(2m+1)\pi S_1'(\xi_0,q_m)\left\{\sum_{r=0}^{\infty}(B_{2r+1}^{(1)})^2\right\}}+$$

$$+\sum_{m=s}^{\infty}\frac{4(-1)^m S_1(\xi_0,-q_m')\{A_1^{(1)}\}^2\cos\frac{(2m+1)\pi}{2h}z}{(2m+1)S_1'(\xi_0,-q_m')\left\{\sum_{r=0}^{\infty}(A_{2r+1}^{(1)})^2\right\}}. \tag{6.8.30}$$

$A_1^{(1)}$及 $A_{2r+1}^{(1)}$ 的定义见文献[7]。

三、地震沿长轴方向作用

当地震来自长轴方向时，则可以求得柱体沿单位长度上的动水压力为：

$$P=\alpha\gamma_0\pi b^2F_l, \tag{6.8.31}$$

式中，

$$F_l=\sum_{m=0}^{s-1}\frac{4(-1)^m C_1(\xi_0,\ q_m)\{A_1^{(1)}\}^2\cos\frac{(2m+1)}{2h}\pi z}{(2m+1)\pi C_1'(\xi_0,q_m)\left\{\sum_{r=0}^{\infty}(A_{2r+1}^{(1)})^2\right\}}+$$

$$+\sum_{m=s}^{\infty}\frac{4(-1)^m C_1(\xi_0,-q_m')\{B_1^{(1)}\}^2\cos\frac{(2m+1)}{2h}\pi z}{(2m+1)\pi C_1'(\xi_0,-q_m')\left\{\sum_{r=0}^{\infty}(B_{2r+1}^{(1)})^2\right\}}, \tag{6.8.31'}$$

$$C_1(\xi,\ q_m)=\mathrm{Ce}_1(\xi,\ q_m)-\frac{\mathrm{Ce}_1'(\xi_1,\ q_m)}{\mathrm{Fe}_1'(\xi_1,\ q_m)}\mathrm{Fe}_1(\xi,\ q_m),$$

$$C_1(\xi,\ -q_m')=\mathrm{Ce}_1(\xi,\ -q_m')-\frac{\mathrm{Ce}_1'(\xi_1,\ -q_m')}{\mathrm{Fe}_1'(\xi_1,\ -q_m')}\mathrm{Fe}_1(\xi,\ -q_m').$$

Ce_1 和 Fe_1 均为修正的马体函数。Ce_1' 为 Fe_1' 均为该函数对 ξ 的一阶导数。

F_s 为 b/a，$h/2a$ 及 z/h 的函数，它表示在椭圆柱体上的附加质量和直径长为 $2a$ 的圆柱体所包含水体质量的比例。图 6.8.1 表示当改变 b/a 及 $h/2a$ 的比例时，采用式(6.8.30)所计算的 F_s 值。

由图可见，当比值 $h/2a$ 小时，b/a 的较小变化，会使 F_s 值有较大的变化。 但是，当 $h/2a$ 值较大时(即细长柱体)，则 F_s 值趋近于 1 而与 b/a 值无关。

若将 b/a，$h/2a$ 及 z/h 作为参数，就可把 F_s(或 F_l)整理为如下的简略的近似公式：

$$F=C\left(1-\frac{z}{h}\right)^{\beta}, \tag{6.8.32}$$

式中 C 和 β 均为 b/a 及 $h/2a$ 的函数，如图 6.8.2 所示

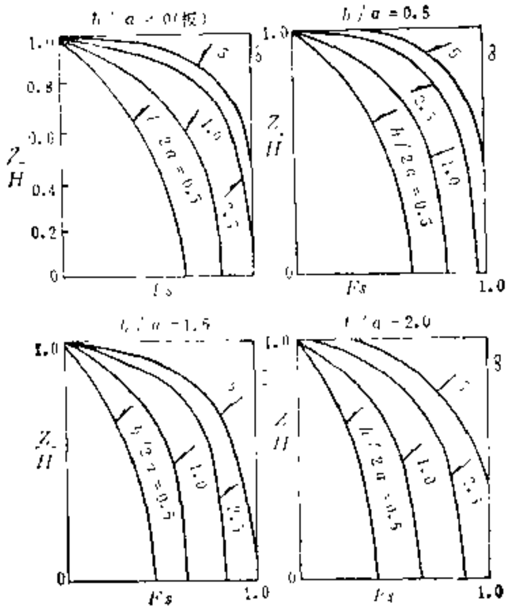


图 6.8.1

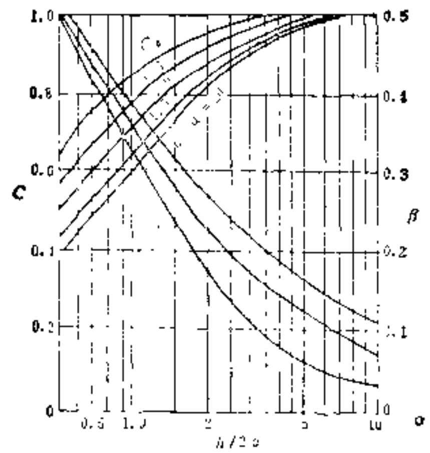


图 6.8.2

利用式(6.8.32)，由动水压力而在椭圆柱体任意一截面 z_0 处产生的剪力 S 和弯矩 M，可以由下列积分求得：

$$S(z_0)=\int_{z_0}^{h} p\,dz=\int_{z_0}^{h} \alpha\gamma_0\pi a^2C\left(1-\frac{z}{h}\right)^{\beta}dz$$

$$=\alpha\gamma_0\pi a^2hC\,\frac{\left(1-\frac{z_0}{h}\right)^{\beta+1}}{\beta+1}, \tag{6.8.33}$$

$$M(z_0)=\int_{z_0}^{h} P(z-z_0)dz=\alpha\gamma_0\pi a^2h^2C\frac{\left(1-\frac{z_0}{h}\right)^{\beta+2}}{(\beta+1)(\beta+2)}. \tag{6.8.34}$$

第九节　椭圆形截面梁的自由振动

下面我们仍按照梁的理论，求解椭圆结构的自由振动。受弯梁的振动微分方程，如第二章所示，为

$$EI\frac{\partial^4y}{\partial z^4}+\frac{\rho F}{g}\frac{\partial^2y}{\partial t^2}=P(z,t) \tag{6.9.1}$$

式中，y 为梁的侧向弹性位移；$P(z,t)$为梁沿单位高度上的动水压力；F为椭圆截面积；其余定义同前。这个方程对于我们是十分熟悉的，关键问题要求出 $P(z,t)$的表达式。

假设结构物按照 $y=\bar{Z}\sin\omega t$ 振动，$\bar{Z}$ 表示有水振型，ω 为自振圆频率，并且有

$$z\geqslant h\text{ 时，}P(z,t)=0.$$

而当 $h\geqslant z\geqslant 0$ 时，动水压力 $P(z,t)$又应该区分两种情况来讨论。

一、短轴方向作振动

设有水振型为 $\bar{Z}$，则可类似式(6.8.24)按余弦级数展开方法，进行适当运算后，不难求得

$$P(z,t)=\frac{\gamma_0\omega^2}{gh}\pi a^2\left\{\sum_{m=0}^{s-1}\frac{2S_1(\xi_0,q_m)\{B_1^{(1)}\}^2\int_0^h\bar{Z}\cos\frac{(2m+1)}{2h}\pi z dz}{S_1'(\xi_0,q_m)\left\{\sum_{r=0}^{\infty}(B_{2r+1}^{(1)})^2\right\}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=s}^{\infty}\frac{2S_1(\xi_0,-q_m')\{A_1^{(1)}\}^2\int_0^h\bar{Z}\cos\frac{(2m+1)}{2h}\pi z dz}{S_1'(\xi_0,-q_m')\left\{\sum_{r=0}^{\infty}(A_{2r+1}^{(1)})^2\right\}}\right\}\cos\frac{(2m+1)}{2h}\pi z\sin\omega t \tag{6.9.2}$$

二、长轴方向作振动

$$P(z,t)=\frac{\gamma_0\omega^2}{gh}\pi b^2\left\{\sum_{m=0}^{s-1}\frac{2C_1(\xi_0,q_m)\{A_1^{(1)}\}^2\int_0^h\bar{Z}\cos\frac{(2m+1)}{2h}\pi z dz}{C_1'(\xi_0,q_m)\left\{\sum_{r=0}^{\infty}(A_{2r+1}^{(1)})^2\right\}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=s}^{\infty}\frac{2C_1(\xi_0,-q_m')\{B_1^{(1)}\}^2\int_0^h\bar{Z}\cos\frac{(2m+1)}{2h}\pi z dz}{C_1'(\xi_0,-q_m')\left\{\sum_{r=0}^{\infty}(B_{2r+1}^{(1)})^2\right\}}\right\}\times$$

$$\times\cos\frac{(2m+1)}{2h}\pi z\sin\omega t. \tag{6.9.3}$$

将有水振型 $\bar{Z}$ 按无水振型展为级数：

$$\bar{Z}=\sum_{n=1}^{\infty}A_nZ_n. \tag{6.9.4}$$

把式(6.9.4)和(6.9.2)代入式(6.9.1)，并对 z 从 0 到 l 进行积分，利用无水振型间的正交条件，即可得到和本章第三节式(6.3.6)相类似的公式

$$\frac{\rho F}{\gamma_0}N_n(\omega_{0n}^2-\omega^2)A_n-\omega^2\pi a^2\sum_{k=1}^{r}\frac{M_{nk}+M_{nk}'}{N_n}A_k=0,$$
$$(n=1,2,3,\cdots) \tag{6.9.5}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
M_{nk}&=\frac{1}{lh}\sum_{m=0}^{s-1}\frac{2S_1(\xi_0,q_m)\{B_1^{(1)}\}^2\int_0^hZ_n\cos\frac{(2m+1)}{2h}\pi z dz\int_0^hZ_k\cos\frac{(2m+1)}{2h}\pi z dz}{S_1'(\xi_0,q_m)\left\{\sum_{r=0}^{\infty}(B_{2r+1}^{(1)})^2\right\}},\\
M_{nk}'&=\frac{1}{lh}\sum_{m=s}^{\infty}\frac{2S_1(\xi_0,-q_m')\{A_1^{(1)}\}^2\int_0^hZ_n\cos\frac{(2m+1)}{2h}\pi z dz\int_0^hZ_k\cos\frac{(2m+1)}{2h}\pi z dz}{S_1'(\xi_0,-q_m')\left\{\sum_{r=0}^{\infty}(A_{2r+1}^{(1)})^2\right\}},\\
N_n&=\frac{1}{l}\int_0^lZ_n^2dz,
\end{aligned}\right\} \tag{6.9.5'}$$

ω_{0n} 为无水第 n 振型的频率。

当在长轴方向作振动时，采用类似推导，可以求得和式(6.9.5)相同的方程，只需对其中的动水压力采用长轴方向作振动时的值，即其中的系数为

$$\left.\begin{aligned}M_{nk}&=\frac{1}{lh}\sum_{m=0}^{s-1}\frac{2C_1(\xi_0,q_m)\{A_1^{(1)}\}^2\int_0^h Z_n\cos\frac{(2m+1)}{2h}\pi z dz\int_0^h Z_k\cos\frac{(2m+1)}{2h}\pi z dz}{C_1'(\xi_0,q_m)\left\{\sum_{r=0}^{\infty}(A_{2r+1}^{(1)})^2\right\}},\\ M_{nk}'&=\frac{1}{lh}\sum_{m=s}^{\infty}\frac{2C_1(\xi_0,-q_m')\{B_1^{(1)}\}^2\int_0^h Z_n\cos\frac{(2m+1)}{2h}\pi z dz\int_0^h Z_k\cos\frac{(2m+1)}{2h}\pi z dz}{C_1'(\xi_0,-q_m')\left\{\sum_{r=0}^{\infty}(B_{2r+1}^{(1)})^2\right\}}.\end{aligned}\right\} \tag{6.9.6}$$

方程(6.9.5)是对 $A_n(n=1,2,3,\cdots)$的联立方程组，从这个方程组的系数行列式为零的条件，就可以求得有水时的自振频率，从而可以进一步求得 $A_1,A_2,A_3\cdots$间的相对值。再把它们代回式(6.9.4)就可以求得有水振型。全部计算也可仿照第三节所示的矩阵运算。应用电子计算机，问题不难解决。

第十节　地震作用下的反应计算

一、简谐运动的反应

假定作用的地震加速度为 $\alpha g\sin\omega t$，则由此而产生的动水压力应由两部分组成。与物体弹性变形无关的刚性动水压力可按式(6.8.29)或(6.8.31)计算；与物体弹性变形有关的弹性振动动水压力可按式(6.9.2)或(6.9.3)计算。若将弹性位移仍按照空库振型展开，即令 $y(z,t)=y(z)\sin\omega t$，其中

$$Y(z)=\sum_{k=1}^{\infty}A_nZ_n(z). \tag{6.10.1}$$

式中，$Z_n(z)$为空库振型。

进行和式(6.9.5)相类似的运算，即可得到如下的联立方程组：

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{\omega_{0n}^2}{\omega^2}\right)A_n-\frac{\gamma_0\pi a^2}{\rho F}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{M_{nk}+M_{nk}'}{N_n}\right)A_k\\ &=\frac{\alpha g}{\omega^2}\left\{F_n-\frac{\gamma_0\pi a^2}{\rho F}(D_n+D_n')\right\}\frac{1}{N_n},\ (n=1,2,3\cdots)\end{aligned} \tag{6.10.2}$$

式中，M_{nk}，M_{nk}'及 N_n 由式(6.9.5′)及(6.9.6)确定，

$$F_n=\frac{1}{l}\int_0^l Z_n dz.$$

(一) 短轴方向振动

假使地震来自短轴方向，则

$$
\left.\begin{aligned}
D_n&=\frac{1}{lh}\sum_{m=0}^{s-1}\frac{4(-1)^m S_1(\xi_0,q_m)\{B_1^{(1)}\}^2\int_0^h Z_n\cos\frac{(2m+1)}{2h}\pi z dz}{(2m+1)\pi S_1'(\xi_0,q_m)\left\{\sum\limits_{r=0}^{\infty}(B_{2r+1}^{(1)})^2\right\}},\\
D_n'&=\frac{1}{lh}\sum_{m=s}^{\infty}\frac{4(-1)^m S_1(\xi_0,-q_m')\{A_1^{(1)}\}^2\int_0^h Z_n\cos\frac{(2m+1)}{2h}\pi z dz}{(2m+1)\pi S_1'(\xi_0,-q_m')\left\{\sum\limits_{r=0}^{\infty}(A_{2r+1}^{(1)})^2\right\}}.
\end{aligned}\right\}\qquad(6.10.3)
$$

（二）长轴方向振动

假使地震来自长轴方向，则

$$
\left.\begin{aligned}
D_n&=\frac{1}{lh}\sum_{m=0}^{s-1}\frac{4(-1)^m C_1(\xi_0,q_m)\{A_1^{(1)}\}^2\int_0^h Z_n\cos\frac{(2m+1)}{2h}\pi z dz}{(2m+1)\pi C_1'(\xi_0,q_m)\{(A_{2r+1}^{(1)})\}^2}\\
D_n'&=\frac{1}{lh}\sum_{m=s}^{\infty}\frac{4(-1)^m C_1(\xi_0,-q_m')\{B_1^{(1)}\}^2\int_0^h Z_n\cos\frac{(2m+1)}{2h}\pi z dz}{(2m+1)\pi C_1'(\xi_0,-q_m')\left\{\sum\limits_{r=0}^{\infty}(B_{2r+1}^{(1)})^2\right\}}.
\end{aligned}\right\}\qquad(6.10.4)
$$

从这些联立方程可以计算出 $A_1, A_2, A_3\cdots$ 从而可以由式(6.10.1)计算位移值以及其它反应。

可以看出，上面的求解过程将是相当繁复的。如果能预先知道或假定变形形状函数 Y，则采用第五章介绍的复频反应的求解方法，将会使问题的处理大大简化。

二、任意地震波反应

从上面的分析可以看到，当考虑水体的可压缩性影响时，谐振问题的求解已经相当复杂，若考虑任意地震波作用时仍要计入这一影响，将遇到更大的困难。一般情况下，压缩性对最终结果的影响不大，因此，在这里我们认为水体是不可压缩液体。这样，就能采用如第四节所介绍的广义坐标方法。

（一）地震沿短轴方向作用

如果地震来自短轴方向，则其第 n 振型参与系数为：

$$
\eta_n=\frac{\int_0^l\frac{\rho F}{g}\bar{Z}_n dz+\int_0^h\frac{\gamma_0}{g}\pi a^2 F_s\bar{Z}_n dz}{\int_0^l\frac{\rho F}{g}\bar{Z}_n^2 dz+\int_0^h\frac{\gamma_0}{g}\pi a^2 F_e\bar{Z}_n dz}\text{*},\qquad(6.10.5)
$$

式中

$$
F_s=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{4(-1)^m S_1(\xi_0,q_m)\{B_1^{(1)}\}^2}{(2m+1)\pi S_1'(\xi_0,q_m)\left\{\sum\limits_{r=0}^{\infty}(B_{2r+1}^{(1)})^2\right\}}\cos\frac{(2m+1)}{2h}\pi z,
$$

$$
F_e=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2S_1(\xi_0,q_m)\{B_1^{(1)}\}^2\int_0^h\bar{Z}_n\cos\frac{(2m+1)}{2h}\pi z dz}{hS_1'(\xi_0,q_m)\left\{\sum\limits_{r=0}^{\infty}(B_{2r+1}^{(1)})^2\right\}}\cos\frac{(2m+1)}{zh}\pi z
$$

* 推导过程同式(6.3.18)。

$$q_m = \frac{\gamma^2}{4}\left(\frac{2m+1}{4h}\pi\right).$$

若 $\bar{Z}_n=1$，亦即当结构为不变形的刚体移动情况，则不难证明 $F_e=F_s$，而 $\eta_n=1$，这是符合物理意义的。

（二）地震沿长轴方向作用

假使地震来自长轴方向，则第 n 振型的振型参与系数为：

$$\eta_n = \frac{\int_0^l \frac{\rho F}{g}\bar{Z}_n dz + \int_0^h \frac{\gamma_0}{g}\pi b^2 F_s \bar{Z}_n dz}{\int_0^l \frac{\rho F}{g}\bar{Z}_n^2 dz + \int_0^h \frac{\gamma_0}{g}\pi b^2 F_e \bar{Z}_n^2 dz}, \tag{6.10.6}$$

式中

$$F_s = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4(-1)^m C_1(\xi_0, q_m)\{A_1^{(1)}\}^2}{(2m+1)\pi C_1'(\xi_0, q_m)\left\{\sum_{r=0}^{\infty}(A_{2r+1}^{(1)})^2\right\}} \cdot \cos\frac{(2m+1)}{2h}\pi z,$$

$$F_e = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2C_1(\xi_0, q_m)\{A_1^{(1)}\}^2 \int_0^h \bar{Z}_n \cos\frac{(2m+1)}{2h}\pi z d\pi}{hC_1'(\xi_0, q_m)\left\{\sum_{r=0}^{\infty}(A_{2r+1}^{(1)})^2\right\}} \cos\frac{(2m+1)}{2h}\pi z$$

求得振型参与系数后，就不难求出广义坐标 q_n，从而求出它的各种地震反应。

第十一节　若干计算结果

图 6.11.1 表示当 $b/a=0.5$ 时，随着参变量 $\gamma_0\pi a^2/\rho F$，$l/2a$ 及 h/l 的变化，由于水体作用而使周期增长的情况，图 6.11.2 表示在 $b/a=0.5$ 及 $\gamma_0\pi a^2/\rho F=1$ 并改变顶端集中质量 W 和结构自身总重量 ρFl 的比值 $W/\rho Fl$，$l/2a$ 及 h/l 时，由于水体作用而使周期增长的情况。图 6.11.3 为按理论计算的柱体表面的切向速度（假定振动速度为 1）。

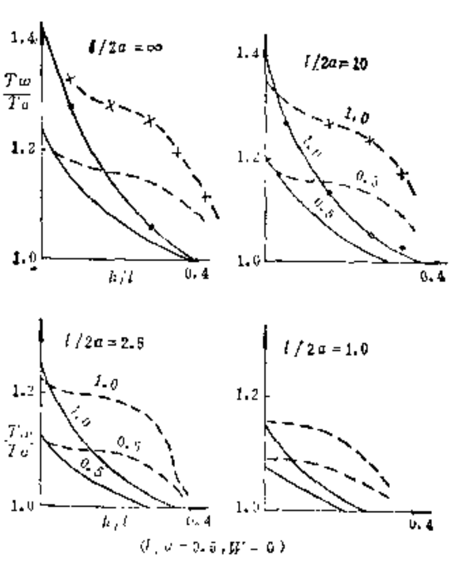


图 6.11.1

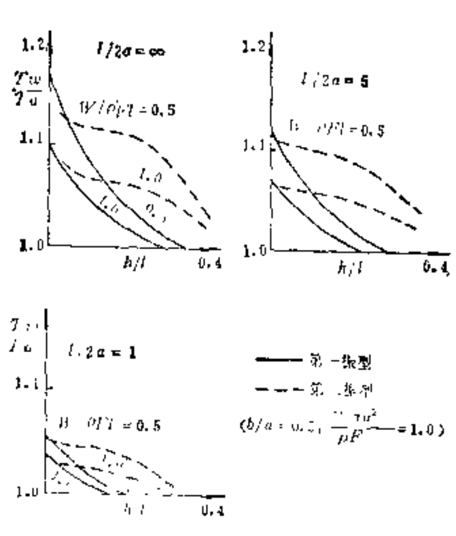


图 6.11.2

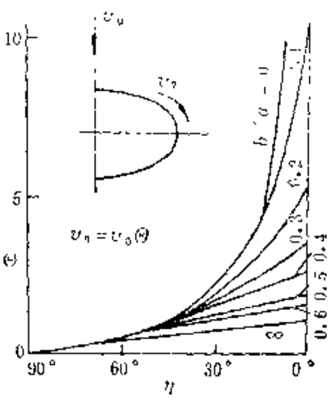


图 6.11.3

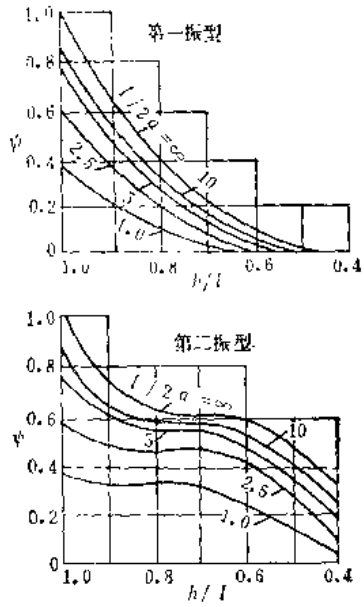


图 6.11.4

从上面的计算结果，又可归纳为以下的简化计算公式：

$$\frac{T_W}{T_a}=\sqrt{1+\frac{\delta C}{(1+4\gamma)C_{0.5}}\psi},$$

式中，$\delta=\gamma_0\pi a^2/\rho F$；$\gamma=\bar{W}/\rho Fl$；$\psi$和$C$为系数，可以从图 6.11.4 及图 6.11.5 查得；T_W表示有水时的周期；T_a表示无水时的周期。

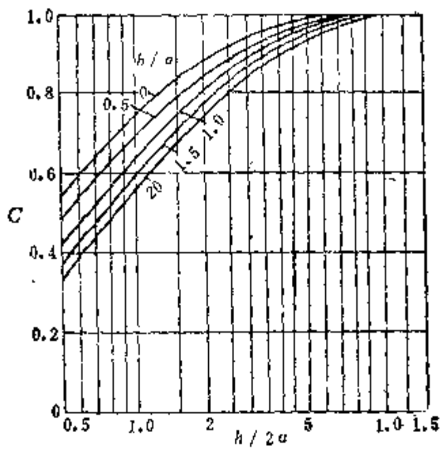


图 6.11.5

从以上结果还可以看到：

① 在 $h/l=1.0$ 附近，第一振型和第二振型的自振周期的增长几乎相等。但对于 h/l 的比值再小一些时，水体对第二型振自振周期的增长要比对第一振型的影响大一些。

② 随着水位的降低，第一自振周期的增长率小于第二自振周期 而当 $h/l=0.5$ 时，则自振周期的增长迅速变小、这说明结构上部水体的影响比下部大

参 考 文 献

[1] 居荣初、黄振平、杜瑞明，水中圆柱体结构的自由振动，地震工程研究报告集，第一集，科学出版社，1962 年。

[2] 王前信、王孝信，伸臂梁在一侧有水时的自振特性与地震荷载，地震工程研究报告集，第一集，科学出版社，1962 年。

[3] 郑哲敏、马宗魁，悬臂梁在一侧受有液体时的自由振动，力学学报，第三卷，第二期，1959 年。

[4] 刘恢先、王孝信，挡水坝地震荷载，地震工程研究报告集，第一集，科学出版社，1962 年。

[5] 铁摩辛柯著，胡人礼译，工程振动问题，人民铁道出版社，1978 年。

[6] 篗井彰雄，水中に立てられる柱状構造物の振動，日本土木技術，1961，6。

[7] Seima Kotsubo, Seismic force effect on submerged bridge piers with elliptic sections, Proceedings of the third world conference earthquake engineering, vol. II, 1965, New Zealand.

[8] K. S. Miller, Partial differential equations in engineering problems, Prentice-Hall, Book co. Inc. 1953.

[9] Mclachan, N. W, Theory and application of mathieu functions, Oxford, Clarendon Press, 1947.

[10] Harry Hochstadt, Special functions of mathematical physics, 1961.

第七章　输液管道、平板结构和液体的耦联振动

第一节　管道内可压缩性液体的一维流动

随着我国"四化"建设的飞跃发展，在土建、化工、机械等部门都将会愈来愈多地建设各种类型的输水管、输油管和输气管等。在具有一定压力和流速的液体作用下，这些管道的管壁上均会产生流体动压力。如果这些管道还要受到各种类型振动荷载的作用，则内部流体又会引起附加的流体动压力。管道受到振动荷载、流体动压力作用后的安全性如何？这是一个至为重要的问题。因为万一发生管道破坏事故，不仅使工程本身蒙受损失，且当内部输送的是可燃性和毒性液体时，所造成的事故将是十分严重的。因此，对管道振动的研究，有很重要的意义。但是，由于这个问题的详细研究已超越本书的范围，所以在这一章里，我们仍将侧重于介绍管道和液体耦联振动的计算。同时对于具有压力和流速的液体对管壁产生的另一种类型的扰动压力的计算，也将作简要的介绍。

一、波动方程及其解

设有如图 7.1.1 a 的等截面直管，中间充满液体。当未受到扰动时，在两平面 x 和 $x+dx$ 之间有一流体微团，其密度为 ρ_0。如果在突然增加的压力作用下，上述两平面变为新的位置 $x+u$ 及 $x+dx+u+(\partial u/\partial x)dx$，根据质量守恒规律有等式

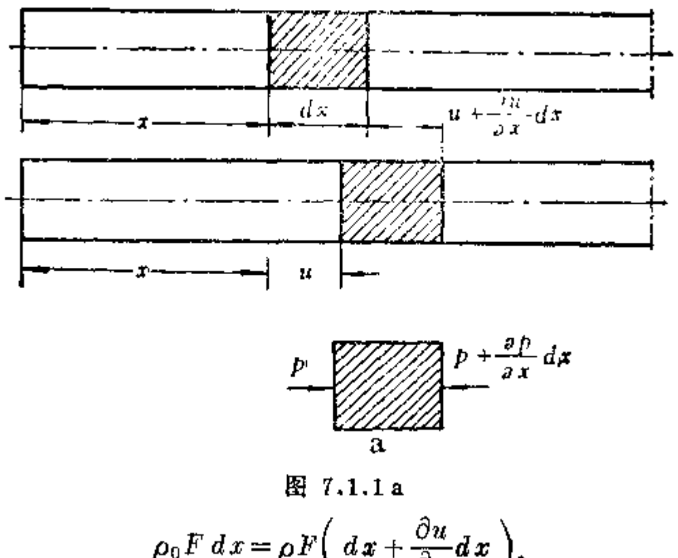


图 7.1.1 a

$$\rho_0 F\,dx=\rho F\left(dx+\frac{\partial u}{\partial x}dx\right).$$

即
$$\rho_0=\rho\left[1+\frac{\partial u}{\partial x}\right],$$

式中，F 为管道截面；ρ 为在时间 t 时的流体密度。

假使质点位移很小，而$(\partial u/\partial x)^2$ 为二级无穷小量，则有

$$\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(1-\frac{\partial u}{\partial x}\right)=1.$$

由此 $$\rho=\rho_0\left(1-\frac{\partial u}{\partial x}\right),\ \rho-\rho_0=-\rho_0\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{7.1.1}$$

若采用气体在等温情况下压缩膨胀的对数状态方程[1]

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\beta},$$

即 $$\log p-\log p_0=\beta(\log\rho-\log\rho_0).$$

对上式微分，即得：

$$\frac{dp}{p}=\beta\frac{d\rho}{\rho}.$$

即 $$dp=\frac{p\beta}{\rho}d\rho=k^2d\rho, \tag{7.1.2}$$

式中，$k=(\beta p/\rho)^{1/2}$，为声波速度。

这样，积分方程(7.1.2)，就得到

$$p-p_0=k^2(\rho-\rho_0), \tag{7.1.3}$$

将(7.1.1)代入上式，得到

$$p=p_0-\rho_0k^2\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{7.1.4}$$

式中，p 为瞬时压力；p_0 为静压力或者未扰动压力。

根据运动学可知，

$$-\frac{\partial p}{\partial x}dxF=\rho_0Fdx\frac{\partial^2u}{\partial t^2}. \tag{7.1.5}$$

微分式(7.1.4)得到

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\rho_0k^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}. \tag{7.1.6}$$

式(7.1.5)和(7.1.6)联合给出

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2} \tag{7.1.7}$$

式(7.1.7)即为熟知的一维波动方程。

式(7.1.7)可以有两种解法，即所谓波动解和振动解（达朗培尔解）。当采用第一种方法时，可设其解为：

$$u=f(x-kt)+F(x+kt). \tag{7.1.8}$$

上式代表两列行波，$f(x-kt)$代表向正向行进的波列；$F(x+kt)$代表向负向行进的波列。我们若先假定 $F(x+kt)=0$，则

$$u(x,\ t)=f(x-kt). \tag{7.1.9}$$

在每一点 x，变位 u 将随时间而变化，在每一给定时间 t，在不同的点 x 有不同的变位。显然，当 $x-kt=$常数时，数值 u 也是常数。令该常数为 x_0，则

$$x=x_0+kt. \tag{7.1.10}$$

如果在点 x_0，当 $t=0$ 时，位移为 y_0，并以速度 k 运动。现考虑经过了若干时间 t 后的点 x（见图 7.1.1 b）。由于要服从式 (7.1.10)，所以在点 x 处的变位与 $t=0$ 时 x_0 处的变位一样为 y_0，这就证明了这是一束向正向行进的波列。同样也可以证明 $F(x+kt)$为向负向行进的波列。

式(7.1.8)表示沿一定方向的传播波，这种传播着的波叫做行波。行波的特点在于管道内各点的压力或位移皆以相同的振幅、相同的频率作振动，所不同的是各点间存在着相位的差异。

第二种解法称为驻波法，采用变量分离，令 $u(x,\ t)=X(x)T(t)$，代入式 (7.1.7) 后得到

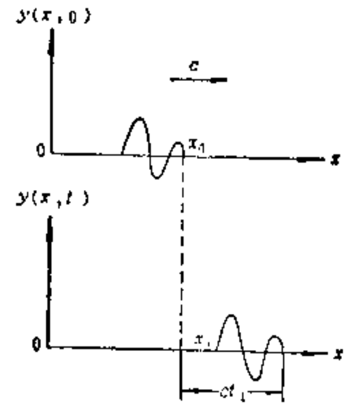
$$\frac{1}{k^2}\cdot\frac{T''}{T}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\alpha^2,$$

令 $k^2\alpha^2=\overline{\omega}^2$，则得解

$$u(x,\ t)=(A\cos\overline{\omega}t+B\sin\overline{\omega}t)(C\cos\alpha x+D\sin\alpha x), \tag{7.1.11}$$

式中，A、B、C、D为任意常数，可由初始条件及边界条件决定。

由上面结果可以看出，在一般情况下，管道内的脉动压力取入射波和反射波两者叠加的形式。只有在管道为无限长或者管道端点不具有反射条件时，管道内的脉冲才以单一的入射波的形式出现。



b

图 7.1.1 b

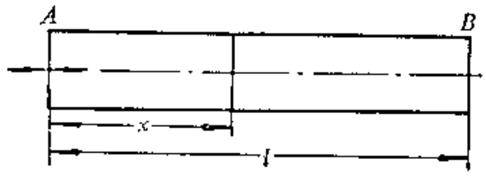


图 7.1.2

二、在无摩擦管道中液体的强迫振动

设有如图 7.1.2 所示的管道，管道中充满液体，并假定在截面A处有一扰动源 $p=p_0e^{i\omega t}$，则管道中的液体应满足波动方程(7.1.7)。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{7.1.12}$$

上式的特解可具有如下形式：

$$u(x,\ t)=Ae^{i(\omega t-cx)}, \tag{7.1.13}$$

式中 $c=\omega/k$。

通过对式(7.1.13)进行微分，不难证明式(7.1.13)满足式(7.1.12)。

在 x 正向行进波列的速度为：

$$\begin{aligned}v_+=\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_+&=Ai\omega e^{i(\omega t-cx)}\\&=Be^{i(\omega t-cx)},\end{aligned} \tag{7.1.14}$$

式中，A、B均为常数。向负方向行进波列的速度为：

$$v_-=\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_-=-De^{i(\omega t+cx)}, \tag{7.1.15}$$

式中，D为常数。负号表示这列波列向着 x 的负向行进。这样，在任一截面 x 处的合速度

$$v=\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=Be^{i(\omega t-cx)}-De^{i(\omega t+cx)}. \tag{7.1.16}$$

如果以 Δp 代表管道任一截面 x 处的瞬时脉动压力，则由式(7.1.4)可得：

$$\Delta p=p-p_0=-\rho_0k^2\frac{\partial u}{\partial x}.$$

另一方面，从式(7.1.9)可知

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{k}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}.$$

故

$$\Delta p=\pm\rho_0k\frac{\partial u}{\partial t},^* \tag{7.1.17}$$

式中，正号表示由正方向行进波列产生的脉动压力，负号表示由负向行进的波列产生的脉动压力。因此，在管道中任意点的瞬时脉动压力为：

$$p=\rho_0k[Be^{i(\omega t-cx)}+De^{i(\omega t+cx)}]. \tag{7.1.18}$$

下面，我们将仍以简单管系为例，来建立起管道截面上的脉冲压力 p，速度 v 随截面位置变化时的关系。设在图 7.1.2 上在 $x=0$ 处为一压缩机， 它所提供的脉动量为：

$$\left.\begin{aligned}p&=p_0e^{i\omega t},\\ v&=v_0e^{i\omega t}.\end{aligned}\right\} \tag{7.1.19}$$

把式(7.1.19)代入式(7.1.16)和(7.1.18)，得到：

$$\left.\begin{aligned}p_0&=\rho_0k(B+D),\\ v_0&=B-D.\end{aligned}\right\}$$

由上式得出积分常数：

$$B=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_0k}p_0+v_0\right),$$

$$D=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_0k}p_0-v_0\right). \tag{7.1.20}$$

我们暂时把公因子 $e^{i\omega t}$ 撇开不管，把式(7.1.20)代回式(7.1.16)和(7.1.18)，则有：

$$\begin{aligned}p_x&=\frac{1}{2}(p_0+\rho_0kv_0)e^{-icx}+\frac{1}{2}(p_0-\rho_0kv_0)e^{icx}\\ &=p_0\frac{e^{icx}+e^{-icx}}{2}-p_0kv_0\frac{e^{icx}-e^{-icx}}{2}\\ &=p_0\cos cx-i\rho_0kv_0\sin cx,\end{aligned} \tag{7.1.21}$$

$$\begin{aligned}v_x&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_0k}p_0+v_0\right)e^{-icx}-\frac{1}{2}\left(\frac{p_0}{\rho_0k}-v_0\right)e^{icx}\\ &=\frac{1}{\rho_0k}\left[p_0\frac{e^{icx}-e^{-icx}}{2}-\rho_0cv_0\frac{e^{icx}+e^{-icx}}{2}\right]\\ &=-i\frac{p_0}{\rho_0k}\sin cx+v_0\cos cx,\end{aligned} \tag{7.1.22}$$

将式(7.1.21)，(7.1.22)写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}p_x\\ v_x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos cx & -i\rho_0k\sin cx\\ -i\frac{1}{\rho_0k}\sin cx & \cos cx\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_0\\ v_0\end{bmatrix}. \tag{7.1.23}$$

* 为了讨论方便起见，今后除非特别声明外，仍以 p 代替 Δp。

若在 $x=l$ 处为一足够大的容器，则可以认为在该容器入口处压力脉动为零。于是由式(7.1.23)求得：

$$\begin{bmatrix} 0 \\ v_l \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos cl & -ip_0c\sin cx \\ -i\dfrac{1}{\rho_0 k}\sin cl & \cos cl \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_0 \\ v_0 \end{bmatrix}. \tag{7.1.24}$$

这就是振源处(压缩机处)脉动量 p_0，v_0 和管道尾端(大容器入口处)脉动量 $p_l(=0)$和 v_l 之间的关系。式(7.1.24)和文献[2]从不同出发点所得的结果是相同的。式(7.1.23)表示在管道中任一点 x 处的压力、速度和振动源处的压力、速度间的关系。

三、考虑摩擦阻力时管内液体的振动

(一) 运动方程

假定液体介质具有粘滞性和可压缩性，介质运动所产生的正压力沿截面呈均匀分布，同时考虑摩擦阻力的影响。根据达朗培尔原理，可得运动方程为：

$$\frac{\partial p}{\partial x}dxF+\rho F\frac{dV}{dt}dx+\tau\pi d dx=0, \tag{7.1.25}$$

式中，d 为管道直径；V 为运动介质的速度；τ 为管道内壁单位面积上产生的摩阻力，$\tau=\left(\frac{\lambda}{8}\right)\rho V^2$；$\lambda$ 为阻抗系数，对于直径为 d 的管道 $\lambda=64/\mathrm{Re}$；Re 为雷诺数；F 为管道截面积，$F=\pi d^2/4$。

经整理后，式 (7.1.25) 可以表示为：

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=\rho\left(\frac{dV}{dt}+\frac{\lambda V^2}{2d}\right). \tag{7.1.26}$$

考虑到速度 V 为 t 和 x 的函数：

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{\partial V}{\partial t}+V\frac{\partial V}{\partial x},$$

若认为 $V(\partial V/\partial x)$ 为微量而可以略去，则式 (7.1.26) 可以表示为：

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=\rho\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\lambda V^2}{2d}\right). \tag{7.1.27}$$

式 (7.1.27) 中包含非线性项 $\lambda\rho V^2/2d$，故要求数值积分。作为一种近似，可将这平方项写为：

$$\frac{\lambda V^2\rho}{2d}\approx\lambda\frac{V_{cp}}{2d}V\rho=2a\rho V,$$

式中，$a=\lambda(V_{cp}/4d)$，V_{cp} 为平均流速。故式 (7.1.27) 最终可表示为：

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=\rho\left(\frac{\partial V}{\partial t}+2aV\right). \tag{7.1.28}$$

对照式 (7.1.5) 可知，考虑摩擦力影响后，将增加一项 $2aV$。方程 (7.1.28) 也可用以描述电缆中电流的扩散，因此，也称为电报方程。

(二) 连续性方程

弹性介质（流体）在管道中流动时，将产生脉动压力，而连续性方程将把速度 V、压力 p 和密度 ρ 三者紧密地联系起来，对于图 7.1.1 a 的流体，其连续性方程为：

$$\frac{\partial}{\partial t}(F\rho)+\frac{\partial M}{\partial x}=0, \tag{7.1.29}$$

式中，F 为横截面积；M 为单位时间通过 x 处的流体质量。

若M通过截面的平均流速为V，则连续性方程可表示为：

$$\frac{\partial}{\partial t}(F\rho)+\frac{\partial}{\partial x}(F\rho V)=0,$$

或

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+V\frac{\partial \rho}{\partial x}\right). \tag{7.1.30}$$

当管道中的流速不超过声速时，则$V(\partial\rho/\partial x)$ 项可以忽略，即：

$$\frac{\partial V}{\partial x}\approx-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{7.1.31}$$

因此，对于可压缩性流体的连续性方程，也可以表达为压力和密度相联系的形式：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=\frac{1}{k^2}\cdot\frac{\partial p}{\partial t}=-\rho\frac{\partial V}{\partial x}. \tag{7.1.32}$$

假定压力和密度仍满足状态方程 $p/p_0=(\rho/\rho_0)^\beta$，这样，由式（7.1.28）、（7.1.32）将组成下列方程组：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+2aV=0,\\&\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial V}{\partial x}=0,\\&\frac{p}{\rho^\beta}=\text{常数}.\end{aligned}\right\} \tag{7.1.33}$$

式（7.1.33）为一组非线性方程。如果所研究的为小振动情况，则可以得到如下一组线性化了的方程：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}+2aV=0,\\&\frac{\partial \rho}{\partial t}=-\rho_0\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{1}{k^2}\frac{\partial p}{\partial t}.\end{aligned}\right\} \tag{7.1.34}$$

式中，ρ_0为时间的平均密度；k 为声速。

若将式（7.1.34）的第一式对 t 微分，第二式对 x 微分，再第一式对X微分，第二式对 t 微分整理后可得：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+2a\frac{\partial V}{\partial t}=k^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2},\\&\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}+2a\frac{\partial p}{\partial t}=k^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.\end{aligned}\right\} \tag{7.1.35}$$

式（7.1.35）为描述具有粘滞性液体在微振动时速度和压力的方程。

（三）管道中可压缩粘滞性液体的压力和速度的计算

上面所导得的方程（7.1.34）或（7.1.35）确定了管道中的压力和速度随时间和空间的变化关系。下面我们将转入研究当外部扰动源具有确定频率ω的简谐振动时的各种反应。此时，我们可以用 $i\omega$ 代替算符 $\partial/\partial t$，并引入仅与 x 有关的速度矢量 $\overline{V}$ 和压力矢量 $\overline{p}$。把它们代入式（7.1.34），得到：

$$\left.\begin{aligned}-\frac{d\bar{p}}{dx}&=(2a\rho_0+i\omega\rho_0)\bar{V},\\-\frac{d\bar{V}}{dx}&=\frac{1}{k^2\rho_0}i\omega\bar{p}.\end{aligned}\right\}\tag{7.1.36}$$

将上式对 x 微分，

$$\left.\begin{aligned}-\frac{d^2\bar{p}}{dx^2}&=(2a\rho_0+i\omega\rho_0)\frac{d\bar{V}}{dx},\\-\frac{d^2\bar{V}}{dx^2}&=\frac{1}{k^2\rho_0}i\omega\frac{d\bar{p}}{dx}.\end{aligned}\right\}\tag{7.1.37}$$

将式 (7.1.36) 中的 $d\bar{p}/dx$ 及 $d\bar{V}/dx$ 代入式 (7.1.37)，即得：

$$\frac{d^2\bar{p}}{dx^2}-(2a+i\omega)\frac{i\omega}{k^2}\bar{p}=0,\tag{7.1.38}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2}-(2a+i\omega)\frac{i\omega}{k^2}\bar{V}=0.\tag{7.1.39}$$

所得到的两个方程的形式完全相同，因此，我们只要求解一个方程，另一个方程的解可仿照求出。式 (7.1.38) 的解可表示为：

$$\bar{p}=Ce^{rx}.\tag{7.1.40}$$

将式 (7.1.40) 代入式 (7.1.38)，经过运算可求得特征方程的根为：

$$r=\pm\sqrt{(2a+i\omega)\frac{i\omega}{k^2}}\tag{7.1.41}$$

故式 (7.1.38) 的全解为：

$$\bar{p}=C_1e^{rx}+C_2e^{-rx}.\tag{7.1.42}$$

注意到式 (7.1.36) 的第一式，则可以得到速度为：

$$\begin{aligned}\bar{V}&=-\frac{1}{(2a+i\omega)\rho_0}\cdot\frac{d\bar{p}}{dx}\\&=\sqrt{\frac{i\omega}{k^2\rho^2(2a+i\omega)}}(C_2e^{-rx}-C_1e^{rx}).\end{aligned}\tag{7.1.43}$$

从以上分析可以看出，沿着管道的压力和速度将由两组分布在空间的阻尼简谐波构成。式 (7.1.42) 和 (7.1.43) 所代表的均为四束行进波。其中向 x 正向行进的，我们称基波或入射波；而向 x 负向行进的，则称为反射波。从式 (7.1.41) 可见，r 一般为复数值，它既表征了阻尼也表征了相移。

将 r 的实数和虚数部分分开，即

$$r=m+ik,$$

$$\left.\begin{aligned}m&=\frac{1}{k}\sqrt{\frac{\sqrt{\omega^4+4a^2\omega^2}-\omega^2}{2}},\\k&=\frac{1}{k}\sqrt{\frac{\sqrt{\omega^4+4a^2\omega}+\omega^2}{2}}\end{aligned}\right\}\tag{7.1.44}$$

如果我们在矢量图上，压力矢量 C 用 $\bar{C}e^{i\omega t}$ 表示，$\bar{C}$为其模，并注意到 $\pm r=\pm(m+ik)$，则

$$p=\bar{C}e^{i\omega t}e^{\pm(m+ik)x}=\bar{C}e^{i(\omega t\pm kx)}e^{\pm mx}. \qquad (7.1.45)$$

由此可以看出，在管道中的压力波将由两组谐和行波所组成。但由于参与了乘子 $e^{\pm mx}$，所以当这些波各自向正 x 向或负 x 向行进时，其衰减度将取决于阻尼系数 m。至于式中的系数 C_1 和 C_2 仍可如上一节那样，根据边界条件确定。

四、弹性管道具有液体时的纵向振动

上面我们讨论了管道内流动液体的纵向振动，并且求得了当外界扰动呈谐和振动时，管道内任意点的压力和流速的表达式。需要指出的是，此时我们没有考虑管道弹性变形的影响。要同时考虑流速和弹性变形影响将使问题变得很复杂。因此，在这里先略去流速的影响(留待以后讨论)而求导具有液体弹性管道的纵向振动。这里，我们假定振动很微小，故液体随管壁一起振动。

（一） 动水压力

关于刚性运动或简谐强迫振动作用下的动水压力计算问题，前面已有所介绍。所以这里仅介绍弹性振动动水压力。液体所满足的仍为一维波动方程：

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \qquad (7.1.46)$$

边界条件为：

① 两端固结，

$$\frac{\partial p}{\partial x}(0,t)=0, \qquad \frac{\partial p}{\partial x}(l,t)=0, \qquad (7.1.47)$$

沿管壁面上有

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \qquad (7.1.47')$$

② 一端自由（接大容器情况）一端固结，

$$\frac{\partial p}{\partial x}(0,t)=0, \qquad p(l,t)=0 \qquad (7.1.47'')$$

界面上的边界条件同式（7.1.47）。

令 $p=P(x)e^{i\omega t}$，代入式（7.1.46）得到

$$\frac{d^2P}{dx^2}+c^2P=0, \qquad (7.1.48)$$

式中

$$c=\frac{\omega}{K}.$$

故式（7.1.48）的解为

$$p(x,t)=(Ae^{icx}+Be^{-icx})e^{i\omega t}. \qquad (7.1.49)$$

代入式（7.1.47）得到

$$A-B=0,\ Ae^{icl}-Be^{-icl}=0,$$
$$A=Be^{-2icl}.$$

要满足上述条件必有

$$c_n=\frac{n\pi}{l}, \quad (n=0,1,2,3,\cdots)$$

故

$$p(x,t)=\sum_{n=0,1,2}^{\infty} A_n \cos c_n x e^{i\omega t}. \tag{7.1.50}$$

将上式代入式（7.1.47′），并在两端乘以 $\sin c_n x$，从 0 到 l 积分，则得

$$A_n=\frac{2\rho_0}{c_n l}\int_0^l \frac{d^2u}{dt^2}\sin c_n x dx$$

$$=\frac{2\rho_0}{n\pi}\int_0^l \frac{d^2u}{dt^2}\sin c_n x dx. \tag{7.1.51}$$

同理，对于一端固定，一端自由的管道，可将式（7.1.49）代入式（7.1.47″）得到

$$A-B=0$$

$$Ae^{icl}+Be^{-icl}=0$$

即

$$A=-Be^{-2icl}.$$

要满足上述条件，必有

$$c_n=\frac{n\pi}{2l}. \quad (n=1,3,5,\cdots)$$

所以

$$p(x,t)=\sum_{n=1,3}^{\infty} A_n \cos c_n x e^{i\omega t}. \tag{7.1.52}$$

将上式代入边界条件式（7.1.47′），同样可以得到：

$$A_n=\frac{4\rho_0}{n\pi}\int_0^l \frac{d^2u}{dt^2}\sin c_n x dx. \tag{7.1.53}$$

（二）自由振动

下面，我们研究等截面圆管的纵向自由振动，其运动方程可表示为：

$$EF_t\frac{d^2u_n}{dx^2}+[\rho_o F+\overline{M}_n(x)]\omega_n^2 u_n=0, \tag{7.1.54}$$

式中，ω_n 为含有液体的管道第 n 振型的自振圆频率；E 为管壁材料的弹性模量；F_t 为管道壁的截面积；$F=\pi d^2/4$ 为管道的截面积；$\overline{M}(x)$ 为水体的附加质量；$u_n(x)$ 为管道第 n 振型时的纵向弹性位移。

对于两端为固定的管道其附加折算质量为：

$$\overline{M}_n(x)=\frac{2\rho_o F}{n\pi u_n}\left(\int_0^l u_n \sin c_n x dx\right)\cos c_n x$$

$$=\frac{\rho_o d^2}{2nu_n}\cos c_n x\int_0^l u_n \sin c_n x dx. \tag{7.1.55}$$

式（7.1.54）和第六章的式（6.5.1）剪切梁的自由振动方程完全相同。其频率方程当可用相同方法求得。可以相信，对于一端固定一端自由的管道，其频率方程将和一端固定一端自由的剪切梁具有完全相同的形式。

（三）强迫振动

对于管端有简谐扰动力作用的情况，可以根据所给的条件定出相应的积分常数 A 和 B。动水压力一经求得，则不难组成相应的运动方程，并依赖似于第六章关于剪切梁的求解方法，求出其强迫振动解。

第二节　管道内具有液体时的弯曲振动

当管道进行弯曲振动时，在不考虑流速情况下，管道内动水压力的求解问题，实际上已在第六章中给出。这一节主要研究由于液体流速而造成的哥利奥利斯 (Coriolis) 惯性力对振动特性的影响。因此在以下的分析中，把管内液体近似地作为附加质量考虑而不再进行详细的动水压力分析。

关于管道的运动微分方程为[3-5]：

$$EI\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}+\bar{\rho}v^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\,\bar{\rho}v\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial t}+m\frac{\partial^2 z}{\partial t_2}=0,^{*} \tag{7.2.1}$$

式中，z 为管道的弹性位移；EI 为管道的弯曲刚度；v 为管内液体的流速；$\bar{\rho}$ 为管内单位长度液体的质量密度；m为管道以及液体的单位长度的质量。

式 (7.2.1) 不同于一般的梁式结构的振动方程，主要在于它含有 $2\,\bar{\rho}v(\partial^2 z/\partial x\partial t)$项。有时我们也称它为哥氏惯性力。虽然它亦仅为时间的一次导数，但其影响则与速度 $\partial z/\partial t$ 成比例的粘滞阻尼项截然不同。

一、自由振动

首先，我们把式 (7.2.1) 改写成下列形式：

$$EI\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}+\bar{\rho}v^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=F(x,t),$$

式中，$F(x,t)$与$-\partial^2 z/\partial x\partial t$成比例，考虑为作用力。

如所周知，当长度为 l 的两端简支梁在自由振动时，其振型可表示为：

$$z_n=A_n\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\omega_n t, \tag{7.2.2}$$

故$F(x,t)$为$-A_n\omega_n\frac{n\pi}{l}\cos\frac{n\pi}{l}x\cos\omega_n t$.此力与位移的相位差为 90°，但其强度不与位移成比例。假若 $\sin\frac{n\pi}{l}x$ 对称于梁的跨中，则力 $F(x,t)$ 反对称，对该振型不作功。即$-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial t}$代表动耦连。它本身存在于这样的自由振动中是不可能的，因为反对称力微起反对称振型，而反对称振型不可能激起对称的力。所以，此时简支梁的振型将不再是简单的正弦函数，而是由对称及反对称振型的线性组合，即

$$z_i=\sum_{n=1}^{\infty}A_{2n-1}\sin(2\,n-1)\frac{\pi}{l}\sin\omega_i t+\sum_{k=1}^{\infty}A_{2k}\sin 2\,k\frac{\pi}{l}x\cos\omega_i t. \tag{7.2.3}$$

将 (7.2.3) 代入 (7.2.1)，则得到含有复偏导数$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial t}\right)$项的系数为 $\cos(2\,n-1)\frac{\pi}{l}x$ 及 $\cos 2\,k\frac{\pi}{l}x$。这些项可以展为富氏级数：

$$\left.\begin{aligned}\cos(2\,n-1)\frac{\pi}{l}x&=\sum_{k=1}C_{2k}\sin 2\,k\frac{\pi}{l}x,\\ \cos 2\,k\frac{\pi}{l}x&=\sum_{n=1}^{\infty}C_{2n-1}\sin(2\,n-1)\frac{\pi}{l}x.\end{aligned}\right\} \tag{7.2.4}$$

* 暂不考虑阻尼影响。

由三角函数的正交关系，可以得到：

$$C_{2k}=\frac{4}{\pi}\frac{2n-1}{(2k)^2-(2n-1)^2},$$

$$C_{2n-1}=\frac{4}{\pi}\frac{2k}{(2k)^2-(2n-1)^2}.$$

在方程(7.2.1)中，将所有这些项集合起来，为了满足微分方程(7.2.1)，必须使这些项前面的系数为零。这样，就给出下列的方程式：

$$\left.\begin{aligned}&A_{2n-1}\left[EI(2n-1)^4\left(\frac{\pi}{l}\right)^4-\bar{\rho}v^2(2n-1)^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^2-m\omega_i^2\right]\\&=\frac{8\rho v\omega_i}{l}\sum_k A_{2k}\frac{(2k)^2}{(2k)^2-(2n-1)^2},\\&A_{2k}\left[EI(2k)^4\left(\frac{\pi}{l}\right)^4-\bar{\rho}v^2(2k)^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^2-m\omega_i^2\right]\\&=\frac{8\rho v\omega_i}{l}\sum_n A_{2n-1}\frac{(2n-1)^2}{(2n-1)^2-(2k)^2}.\end{aligned}\right\}\tag{7.2.5}$$

$(n=1,2,3,\cdots)$；$(k=1,2,3,\cdots)$

从式(7.2.5)中的系数行列式为零，就得到了频率方程。频率求得后再代回(7.2.5)就可以求出振型A的相对值。假使除第一、第二振型外，其它的均忽略，则得到频率方程为：

$$\frac{32\rho v\omega_i}{3l\left[EI\left(\frac{\pi}{l}\right)^4-\bar{\rho}v^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^2-m\omega_i^2\right]}=\frac{-3l}{8}\frac{\left[EI\left(\frac{2\pi}{l}\right)^4-\bar{\rho}v^2\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2-m\omega_i^2\right]}{\bar{\rho}v\omega_i}\tag{7.2.6}$$

振型系数的相对值为：

$$A_2=-A_1\frac{8\bar{\rho}v\omega_1}{3l\left[EI\left(\frac{2\pi}{l}\right)^4-\bar{\rho}v^2\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2-m\omega_1^2\right]}\tag{7.2.7}$$

由(7.2.5)可以确定A_{2n-1}及A_{2k}，再把它们代回式(7.2.3)，就可得到自由振动的全解。

若当ω为某一值时，使$A\to\infty$，则就达到了临界的共振状态。

有一简单的情况是需要考虑的，即当管中流速达到

$$v=\sqrt{\frac{EI\pi^2}{\bar{\rho}l^2}}\tag{7.2.7'}$$

时，振幅将变为无限大。这个速度称为临界流速，当然它应该是第一临界流速。式(7.2.7′)也可以从压杆的稳定理论中得到解释。

在B.И.费奥道谢夫(Феодосъев)的工作中[5]也研究了类似的问题，所得运动方程和式(7.2.1)相同，并整理为如下形式：

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}+a\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+b\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial t}+c\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\tag{7.2.8}$$

式中，
$$a=\frac{(\rho F)_{管}+(\rho_0 F)_{水}}{EI},\quad b=\frac{2v(\rho_0 F)_{水}}{EI},$$
$$c=\frac{v^2(\rho_0 F)_{水}}{EI}.$$

若令 $z=W(x)e^{\omega t}$*，

则可以得到：
$$W^{IV}+a\omega^2 W+b\omega W'+cW''=0. \tag{7.2.9}$$

由于直接积分十分困难，故采用伽辽金近似法。对两端简支管道，可取
$$W=A\sin\frac{\pi x}{l}+B\sin\frac{2\pi x}{l}, \tag{7.2.10}$$

将 W 代入式(7.2.9)得到
$$\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\left[A\sin\frac{\pi x}{l}+16B\sin\frac{2\pi x}{l}\right]+a\omega^2\left[A\sin\frac{\pi x}{l}+B\sin\frac{2\pi x}{l}\right]+$$
$$+b\omega\frac{\pi}{l}\left[A\cos\frac{\pi x}{l}+2B\cos\frac{2\pi x}{l}\right]-c\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\left[A\sin\frac{\pi x}{l}+4B\sin\frac{2\pi x}{l}\right]=0.$$

将上式先后乘以 $\sin\frac{\pi x}{l}$ 及 $\sin\frac{2\pi}{l}x$，并沿全长 l 积分，则得
$$\left.\begin{aligned}&A\left[\left(\frac{\pi}{l}\right)^4+a\omega^2-c\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\right]-\frac{8}{3}\frac{b\omega}{l}B=0,\\&\frac{8}{3}\frac{b\omega}{l}+B\left[16\left(\frac{\pi}{l}\right)^4+a\omega^2-4c\left(\frac{\pi}{l}\right)^2=0.\right.\end{aligned}\right\} \tag{7.2.11}$$

使上式的系数行列式为零，就得到频率方程为：
$$a^2\omega^4+\omega^2\left[17a\left(\frac{\pi}{l}\right)^4-5ac\left(\frac{\pi}{l}\right)^2+\frac{8b}{3l}\right)^2\right]+4\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\left[\left(\frac{\pi}{l}\right)^2-c\right]\left[4\left(\frac{\pi}{l}\right)^2-c\right]=0. \tag{7.2.12}$$

若 $v=0$，则 $b=c=0$，相应于所考虑体系的自振方程，其解为：
$$\omega_1=i\frac{\pi^2}{l^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}},\qquad \omega_2=i\frac{(2\pi)^2}{l^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}. \tag{7.2.13}$$

若令
$$\Omega=\omega\frac{l^2}{\pi^2}\sqrt{a},\quad \alpha=\frac{cl^2}{\pi^2},\quad \beta=\frac{(\rho_0 F)_{水}}{(\rho F)_{管}+(\rho_0 F)_{水}}, \tag{7.2.14}$$

则式(7.2.12)成为：
$$\Omega^4+\Omega^2\left(17-5\alpha+\frac{256}{9\pi^2}\beta\alpha\right)+4(-\alpha)(4-\alpha)=0. \tag{7.2.15}$$

当 $0\leqslant\alpha\leqslant1$，而 β 在 0 到 1 的范围内变化，则可以认为 Ω 的值与 β 无关，故上面方程可近似表示为：
$$\Omega^4+\Omega^2(17-5\alpha)+4(1-\alpha)(4-\alpha)=[\Omega^2+(1-\alpha)][\Omega^2+4(4-\alpha)]=0. \tag{7.2.16}$$

由此方程解得：
$$\Omega_1=i\sqrt{1-\alpha},\qquad \Omega_2=2i\sqrt{4-\alpha}. \tag{7.2.17}$$

从式(7.2.13)、(7.2.14)和(7.2.17)就可得到：

---

* 这里采用实指数是为了运算上的方便．最终的 ω 带有虚数 i。

$$\omega_1 = i\frac{\pi^2}{l^2\sqrt{a}}\sqrt{1 - v^2\frac{l^2(\rho_0 F)_水}{\pi^2 EI}},$$

$$\omega_2 = i\frac{2\pi^2}{l^2\sqrt{a}}\sqrt{4 - v^2\frac{l^2(\rho_0 F)_水}{\pi^2 EI}}. \tag{7.2.18}$$

当 $v=0$ 时，则式(7.2.18)过渡到式(7.2.13)。

若 $$v^2 = v_k^2 - \frac{\pi^2 EI}{l^2(\rho_0 F)_水},$$

即 $$v_k = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{EI}{(\rho_0 F)_水}}.$$

此时 $\omega=0$，即达到临界流速，并将导致失稳。上式和豪斯纳尔所得结果式(7.2.7′)相一致。此处的$(\rho F)_水$和(7.2.7′)中的 $\bar{\rho}$ 等价。

二、强迫振动

若沿管道的全长上作用有均匀分布的简谐振动力 $p\sin\omega t$，则其运动方程为：

$$EI\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \bar{\rho} v^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\bar{\rho} v\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial t} + m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = p\sin\omega t \tag{7.2.19}$$

若将1按如下级数展开：

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1,2,3}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)\frac{\pi}{l}x,$$

则式(7.2.19)可表示为

$$EI\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \bar{\rho} v^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\bar{\rho} v\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial t} + m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$
$$= \frac{4p}{\pi}\sum_{n=1,2,3}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)\frac{\pi}{l}x\cdot\sin\omega t. \tag{7.2.20}$$

将位移仍按式(7.2.3)展开为富氏级数，并代入式(7.2.9)，则得(比较同类项系数)：

$$\left.\begin{aligned}
&A_{2n-1}\left[EI(2n-1)^4\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 - \bar{\rho} v^2(2n-1)^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 - m\omega^2\right] - \\
&\quad - 2\bar{\rho} v\omega\frac{\pi}{l}\sum_k A_{2k}(2k)C_{2n-1} = \frac{4p}{\pi}\frac{1}{(2n-1)},\\
&A_{2k}\left[EI(2k)^4\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 - \bar{\rho} v^2(2k)^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 - m\omega^2\right] + 2\bar{\rho} v\omega\frac{\pi}{l}\sum_n A_{2n-1}(2n-1)C_{2k} = 0.
\end{aligned}\right\}$$

(7.2.21)

$$(n=1,2,3,\cdots);\ (k=1,2,3,\cdots).$$

由上式就可以确定 A_{2n-1}，$A_{2k}\cdots$等，从而可以求出稳态振动的全解。

若在简支跨上有扰动力 $p\sin\omega t$ 的作用，并假定流体的流速 $v=0$，则可求得强迫振动的位移为

$$Z = \frac{p}{2m\omega^2}\left(\frac{\cos 2\lambda\frac{x}{l}}{\cos\lambda} + \frac{\cosh 2\lambda\frac{x}{l}}{\cosh\lambda} - 2\right)\sin\omega t.$$

式中 $$\lambda=\sqrt{\frac{m\omega^2}{EI}\left(\frac{l}{2}\right)^4}.$$

第三节　平板在流体作用下的振动

平板在流体作用下的振动问题，具有一定的实际意义。在水利设施、港埠和海湾工程中，有时会遇到这种类似的问题。我国郑哲敏教授曾经研究过这个问题[7]。

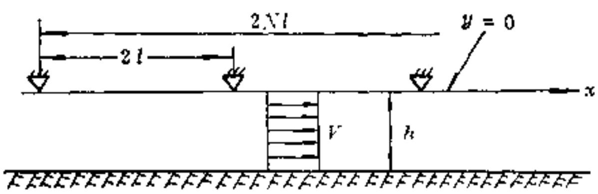


图 7.3.1

我们假设平板在 x 方向为无限长(图 7.3.1)，在等间隔上设置简支铰座，在平板和平行墙之间有不可压缩的、无粘滞性的水流，它在 x 方向的流速是 V。

这里将讨论这个由板和流体构成的振动体系的一些特殊振动特性。在以下的讨论中，为了简单起见，板的运动方程实际上是由梁的方程来近似，即其运动微分方程可写为：

$$B\frac{d^4w}{dx^4}-\rho h\omega^2 w=P, \tag{7.3.1}$$

其中，$we^{i\omega t}$ 是板的挠度；t 为时间；ω 为待求圆频率；B 是板的每单位宽度的抗弯刚度；h 是板的厚度；ρ 是板的质量密度；$pe^{i\omega t}$ 中除了包含动水压力以外，还包含支点的作用力。

设流体的扰动速度势为 $\varphi e^{i\omega t}$，则动水压力 p 由下式给出：

$$p(x,y,t)=-\gamma\left[i\omega\varphi+V\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right],\quad (y=0) \tag{7.3.2}$$

式中，$\gamma=\frac{\rho_0}{g}$，为水的质量密度；φ 满足二维拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0, \tag{7.3.3}$$

而且在 $y=0$ 和 $y=-h$ 处应分别满足以下的边界条件：

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y=0}=i\omega w+V\frac{\partial w}{\partial x}, \tag{7.3.4}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y=-h}=0 \tag{7.3.5}$$

我们可以假定 w 和 φ 是 x 的周期函数，而无损于解的一般性。可以取其周期为 $2Nl$ (N = 正整数)。于是，我们可以用富氏级数将 w，φ 和 p 表示如下：

$$w=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n e^{i\frac{n\pi x}{Nl}}, \tag{7.3.6}$$

$$\varphi=\sum_{n=-\infty}^{\infty}B_n(y)e^{i\frac{n\pi x}{Nl}}, \tag{7.3.7}$$

$$P=p+\sum_{k=0}^{N-1}R_k\delta(x-2kl)=p+\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{R_k}{2Nl}e^{-i\frac{2nk\pi}{N}+i\frac{n\pi x}{Nl}}.$$

$$(-\infty < x < \infty). \tag{7.3.8}$$

上式中 $R_k(k=0,\cdots,N-1)$代表各支座加于板的线载荷，它们也是 x 的周期函数；δ是狄拉克函数；p是流体的脉动压力。ω的表示式必须在支座上满足挠度恒等于零的条件，因此有：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\frac{2ns\pi}{N}}=0,\ (s=0,1,\cdots,N-1) \tag{7.3.9}$$

问题的求解过程在于系数 A_n，R_k和圆频率ω的确定。首先根据方程(7.3.3)和边条件式(7.3.4)、(7.3.5)确定速度势φ，从而确定动水压力p。由于在x方向已假定呈周期性函数，所以只要求确定式(7.3.7)中的函数$B(y)$。根据变量分离，$B(y)$满足下列方程：

$$B''(y)-\lambda^2 B(y)=0, \tag{7.3.10}$$

式中，

$$\lambda_n=\frac{n\pi}{Nl},$$

$$B_n(y)=\bar{A}_n \sinh \lambda_n y+\bar{B}_n \cosh \lambda_n y. \tag{7.3.11}$$

由边界条件式(7.3.5)得到

$$\bar{A}_n\lambda_n \cosh(-\lambda_n h)+\bar{B}_n\lambda_n \sinh(-\lambda_n h)=0.$$

由边条件式(7.3.4)求得：

$$\bar{A}_n\lambda_n=\left(i\omega w_n+V\frac{\partial w_n}{\partial x}\right)\frac{1}{e^{i\frac{n\pi x}{N}}}w_n=A_n e^{i\frac{n\pi x}{Nl}}.$$

所以求得积分常数为：

$$\left.\begin{aligned}\bar{A}_n&=\frac{i\omega w_n+V\dfrac{\partial w_n}{\partial x}}{\lambda_n}\cdot\frac{1}{e^{i\frac{n\pi x}{Nl}}},\\ \bar{B}_n&=-\bar{A}_n\coth(-\lambda_n h)=\bar{A}_n\coth(\lambda_n h).\end{aligned}\right\} \tag{7.3.12}$$

把它们代回式(7.3.11)，则得

$$B_n(y)=\left(\frac{i\omega w_n+V\dfrac{\partial w_n}{\partial x}}{e^{i\frac{n\pi x}{Nl}}\cdot\lambda_n}\right)[\sinh\lambda_n y+\cosh \lambda_n y\cdot\coth(\lambda_n h)]. \tag{7.3.13}$$

在 $y=0$ 的界面上，则有：

$$B_n(0)=\frac{i\omega w_n+V\dfrac{\partial w_n}{\partial x}}{e^{i\frac{n\pi x}{Nl}}\cdot\lambda_n}\coth(\lambda_n h), \tag{7.3.14}$$

所以速度势($y=0$ 处)

$$\varphi=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(i\omega w_n+V\frac{\partial w_n}{\partial x}\right)\frac{Nl}{n\pi}\coth\left(\frac{n\pi}{Nl}h\right). \tag{7.3.15}$$

把 w_n 表示式代入式(7.3.15)，然后应用式(7.3.2)，就可以求得 $p(x,0,t)$的表示式：

$$p=\gamma\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\omega+V\frac{n\pi}{Nl}\right)^2\frac{Nl}{n\pi}A_n e^{i\frac{n\pi x}{Nl}}\cdot\coth\left(\frac{n\pi}{Nl}h\right). \tag{7.3.16}$$

将上式代入式(7.3.8)，并将 P 代入式(7.3.1)，比较富氏级数的各项系数，就得到 A_n 与 R_k 的关系为：

$$A_n = F_{n/N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{R_k}{2Nl}e^{-i\frac{2kn\pi}{N}}, \tag{7.3.17}$$

其中，

$$F_{n/N}=F_{n/N}(\omega)=\left\{B\left(\frac{n}{N}\right)^4\frac{\pi^4}{l^4}-\rho h\omega^2-\frac{\gamma l}{\pi\left(\frac{n}{N}\right)}\left[\omega+\frac{\pi V}{l}\frac{n}{N}\right]^2\coth\frac{\pi h}{l}\frac{n}{N}\right)\right\}^{-1}. \tag{7.3.18}$$

如将式(7.3.17)代入支座上挠度等于零的条件式(7.3.9)，便得到决定 R_k 的齐次线性联立方程。写成矩阵形式，则为

$$\begin{Bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{N-1}\end{Bmatrix}=[\delta_{sk}]\begin{Bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ \vdots \\ R_{N-1}\end{Bmatrix}=0,$$

展开之，得到：

$$\begin{bmatrix}\delta_{00} & \delta_{01} & \cdots & \delta_{0,N-1}\\ \delta_{10} & \delta_{11} & \cdot & \delta_{1,N-1}\\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \delta_{N-1,0} & \delta_{N-1,1} & \cdots & \delta_{N-1,N-1}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ \vdots \\ R_{N-1}\end{Bmatrix}=0, \tag{7.3.19}$$

式中，

$$\delta_{sk}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_{n/N}\frac{1}{2Nl}e^{-i\frac{2kn\pi}{N}}\cdot e^{i\frac{2ns\pi}{N}}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_{n/N}e^{i2\pi\left(\frac{n}{N}\right)[s-k]}\quad(s,\ k=0,1,\cdots,N-1).$$

频率方程即为 $[\delta_{sk}]=0$.

为了简化式(7.3.19)的计算，还可以采用以下的线性转换，令

$$n=Nq+s,\quad s=0,1,\cdots,N-1;\quad q=\cdots,-1,0,+1,\cdots.$$

于是式(7.3.17)可以写为

$$A_{Nq+s}=T_{s/N}F_{q+s/N}, \tag{7.3.20 a}$$

其中，

$$T_{s/N}=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{R_k}{2Nl}e^{-i\frac{2ks\pi}{N}}. \tag{7.3.20 b}$$

利用同样的转换，式(7.3.9)可以变为

$$\sum_{s'=0}^{N-1}e^{i\frac{2ss'\pi}{N}}\sum_{q=-\infty}^{\infty}A_{Nq+s}=0.$$

上式的唯一解是

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} A_{Nq+s}=0.$$

将式(7.3.20)代入上式，得到

$$T_{s/N}\sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{q+s/N}=0. (s=0,1,\cdots,N-1) \tag{7.3.21}$$

这便是经过线性转换之后的联立方程组。但事实上通过这样的转换，它们已经成为互不相关的正则形式了，它们的解或者是

$$T_{s/N}=0;\ (s=0,1,\cdots,N-1) \tag{7.3.22}$$

或者是

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{q+s/N}=0,\\&T_{s/N}\neq 0.\end{aligned}\right\} \tag{7.3.23 a}$$

$$T_{s'/N}=0.\ s'\neq s \tag{7.3.23 b}$$

在第二种情况下，式(7.3.23 a)便是频率方程 如果ω是式(7.3.23 a) 的一个根，与其相应的 w 便是

$$w=T_{s/N}e^{i\frac{s\pi x}{Nl}}\sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{q+s/N}e^{i\frac{q\pi x}{l}}. \tag{7.3.24}$$

从式(7.3.20 b)又可以解得

$$R_k=2lT_{s/N}e^{i\frac{2ks\pi}{N}}. \tag{7.3.25}$$

在第一种情况下，通常 $w\equiv 0$，这也就是说没有振动。但也有例外的情况，若所有振动节点正好落在支座上，即转化为单跨的情形。可以作为式(7.3.23)当 $T_{s/N}\to 0$ 时的特殊情况。

根据式(7.3.16)和 (7.3.23 a) 可知，在一般情况下，就一定的 s/N 而言，如果ω是一个根，$-\omega$便不是根。但是$-\omega$却是 $1-s/N$ 代替 s/N 之后的频率方程的根。这是因为

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{q+(1-s/N)}(-\omega)=\sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{-q-(1-s/N)}(\omega)$$

$$=\sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{q+s/N}(\omega)=0. \tag{7.3.26}$$

因此，为了求得所有的频率值，我们仅需令 s/N 为 0 与 1/2 之间的任一个分数值。但是，需要注意的是对于一定的 s/N 值，式(7.3.23 a) 有无穷多个分离的根．故根的分布将是十分密集的。

当不考虑流体的影响时，若借助于留数定理，可以把式 (7.3.23 a) 表示为封闭的解析解。如令式(7.3.23 a)中的 $\gamma=0$，则有

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(q+\frac{s}{N}\right)^4-\Omega^2}=0, \tag{7.3.27}$$

其中 $\Omega^2=\rho h\omega^2l^4/B\pi^4$。若我们再进行某些数学运算(见附录一)，就可以得到

$$\cos\frac{2\pi s}{N}=\frac{\sinh 2\pi\sqrt{\Omega}\cos 2\pi\sqrt{\Omega}+\cosh 2\pi\sqrt{\Omega}\sin 2\pi\sqrt{\Omega}}{\sinh 2\pi\sqrt{\Omega}+\sin 2\pi\sqrt{\Omega}}. \qquad (7.3.28)$$

当 Ω 较大时，上式可渐近地表示为

$$\cos\frac{2\pi s}{N}=\sqrt{2}\cos 2\pi\left(\sqrt{\Omega}+\frac{1}{8}\right).$$

第四节 有限及无限长管道具有加劲圆环及弹簧支承时的振动*

管道振动实际上可以分为两种类型。第一种相当于梁的横向振动，振动时管道截面保持原来形状，地震荷载、风荷载和一些机械振动荷载常引起管道的这类振动。第二种相当于圆柱薄壳的径向振动，振动时管道截面发生变形。管道内部的流体脉动压力，水泵内的扰动压力常引起这种类型的振动。

下面，我们将介绍如何按圆柱薄壳理论和位势理论来分析输水管道的径向自由振动。

一、运动方程的建立

设有一无限长管道，在其轴线的等间隔上用圆环加劲并支承在弹簧支座上，如图 7.4.1 所示。假设加劲圆环的宽度很小，管道变形时它不会引起管道沿轴向的弯矩，也不约束管壁在轴向和圆周方向的滑动，管道中流体的静压力设为 p_0，流体的平均流速为 V，p_0 和 V 均

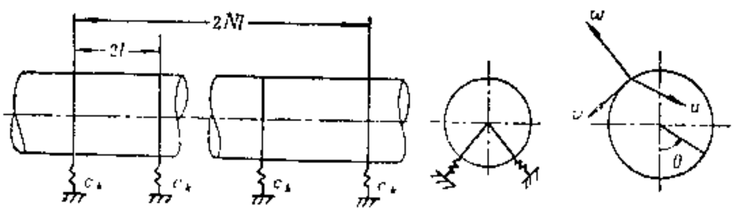


图 7.4.1

为常数。将管道看成薄壁圆筒壳。设管壁各点的位移分量为 $u(x, \theta, t)$，$v(x, \theta, t)$，$w(x, \theta, t)$。在流体静压力作用下，管道的应变能 U_s 可以写为[8][9][13]

$$\begin{aligned}U_s=&\frac{Eab}{2(1-\nu^2)}\iint\left[u_x^2+\left(\frac{v_\theta+w}{a}\right)^2+2\nu u_x\left(\frac{v_\theta+w}{a}\right)+\frac{1-\nu}{2}\left(v_x+\frac{u_\theta}{a}\right)^2\right]\times\\&\times d\theta\, dx+\frac{Eh^3}{24a(1-\nu^2)}\iint\left[a^2w_{xx}^2+\left(\frac{w_{\theta\theta}+w}{a}\right)^2+2\nu w_{xx}\left(w_{\theta\theta}-\frac{v_\theta}{a}\right)+\right.\\&\left.+\frac{1-\nu}{2}\left(w_{x\theta}+\frac{u_\theta}{a}\right)^2+3\left(\frac{1-\nu}{2}\right)(v_x-w_{x\theta})^2-2au_xw_{xx}\right]d\theta\, dx+\\&+p_0a^2\iint\left[\frac{w}{a}+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{a}-\frac{w_\theta}{a}\right)^2\right]d\theta\, dx.\end{aligned} \qquad (7.4.1)$$

加劲圆环的应变能为[10]

$$U_R=\sum_k\frac{EI}{2a^2}\iint(w+w_{\theta\theta}^2)\delta(x-2kl)\,d\theta\, dx. \qquad (7.4.2)$$

* 江近仁、居荣初等. 输水管道的径向振动，中国科学院工程力学研究所研究报告，1964 年.

管道内流体静压力 p_0 和伴随管壁振动而产生的扰动压力 p 及弹簧支承反力 F_r 所作的总功为[9]

$$V=p_0a\iint\left[w+\frac{v^2}{2a}+\frac{w^2}{2a}-uw_x-\frac{1}{a}vw_\theta\right]d\theta\,dx+$$
$$+a\iint pw\,d\theta\,dx+a\iint F_r w\,d\theta\,dx. \tag{7.4.3}$$

式中 $F_r=-\sum_{s,k}c_k w\,\delta(x-2kl)\delta[(\theta-\theta_0)-(\theta_s-\theta_0)]$.

动能的表达式(忽略加劲环的惯性力)为

$$T=\frac{ah\rho}{2}\iint(\dot u^2+\dot v^2+\dot w^2)d\theta\,dx. \tag{7.4.4}$$

上式中 a 是管道的平均半径，h 是管壁厚，ρ 是管壁材料密度，ν 是泊桑比，E 为弹性模量，EI 是加劲圆环的弯曲刚度，c_k 是第 k 个弹簧支承的弹簧常数，k 为沿管轴方向的加劲环或弹簧支承的数目，θ_s 表示 s 弹簧支承的 θ 角，s 表示沿管壁方向（圆周方向）的弹簧支承数目。θ_0 表示 θ 的计算起始角，u，v，w 的脚标 x，θ 表示对于该变量的偏导数，u，v，w 上面 点表示对时间 t 的偏导数。

利用哈密顿原理

$$\delta\int(U-V-T)dt=0, \tag{7.4.5}$$

将式(7.4.1)－(7.4.4)各式代入(7.4.5)，经过变分运算后，可得如下运动方程：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{Eah}{1-\nu^2}\left[u_{xx}+\frac{\nu}{a}(v_{\theta x}+w_x)+\frac{1-\nu}{2a}\left(v_{x\theta}+\frac{u_{\theta\theta}}{a}\right)\right]+\frac{Eh^3}{12a(1-\nu^2)}\left[\frac{1-\nu}{2a}\times\right.\\
&\qquad\left.\times(w_{x\theta\theta}+u_{\theta\theta})-aw_{xxx}\right]+p_0aw_x-ah\rho\ddot u=0,\\
&\frac{Eah}{1-\nu^2}\left[\frac{1}{a^2}(v_{\theta\theta}+w_\theta)+\frac{\nu}{a}u_{x\theta}+\frac{1-\nu}{2}\left(v_{xx}+\frac{u_{\theta x}}{a}\right)\right]+\frac{Eh^3}{12a(1-\nu^2)}\times\\
&\qquad\times\left[\frac{3(1-\nu)}{2}(v_{xx}+w_{xx\theta})-\frac{\nu}{a}w_{xx\theta}\right]-ah\rho\ddot v=0,\\
&\frac{Eah}{1-\nu^2}\left[\frac{1}{a^2}(v_\theta+w)+\frac{\nu}{a}u_x\right]+\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left[a^2w_{xxxx}+\frac{1}{a^2}(w_{\theta\theta\theta\theta}+2w_{\theta\theta}+w)+\right.\\
&\quad+2\nu w_{xx\theta\theta}-\frac{\nu}{a}v_{\theta xx}+\frac{1-\nu}{2}\left(w_{xx\theta\theta}+\frac{1}{a}u_{\theta\theta x}\right)-\frac{3(1-\nu)}{2}(u_{xx\theta}-w_{xx\theta\theta})-\\
&\quad\left.-au_{xxx}\right]-ap+aF_r+\sum_{k=0}^{N-1}\frac{EI}{a^3}(w_{\theta\theta\theta\theta}+2w_{\theta\theta}+w)\delta(x-2kl)+ah\rho\ddot w=0.
\end{aligned}\right\} \tag{7.4.6}$$

由于事先已约定，我们所研究的属于薄壳圆筒，因此，可以采用下列的一些假定：$h/a\ll1$，$w/h\ll1$，$E/\rho ha\omega^2\gg1$，u，$v\sim0\left(\sqrt{\frac{h}{a}}w\right)$，$\frac{\partial}{\partial x}\sim0\left(\frac{1}{\sqrt{ah}}\right)$。

略去 x 和 θ 方向的惯量，方程(7.4.6)可简化为

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\nabla^4\left(\nabla^2+\frac{1}{a^2}\right)^2w+\frac{Eh}{a^2}w_{xxxx}=\nabla^4\left[\frac{p_0}{a}(w_{\theta\theta}+w)+p-\right.$$
$$-\sum_{s,k}c_kw\,\delta(x-2kl)\cdot\delta[(\theta-\theta_0)-(\theta_s-\theta_0)]-\rho h\ddot w-$$

$$-\sum_k \frac{EI}{a^4}(w_{\theta\theta\theta\theta}+2w_{\theta\theta}+w)\delta(x-2kl)\Big],\tag{7.4.7}$$

式中
$$\nabla^2=\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right].$$

二、作用于管壁的流体扰动压力计算

假设流体是不可压缩和无粘性的，当管壁作微幅振动时，伴随管壁而产生的速度变化，可看作是附加于常流速 v 的小量。对于流场内流体所应满足的连续性方程和三个欧拉方程，详见第一章。

流动的速度势 $\varphi(r,\ \theta,\ x,\ t)$应满足三维拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}=0,\tag{7.4.8}$$

相应的边界条件，经线性化后可表示为

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a}=\frac{\partial w}{\partial t}+V\frac{\partial w}{\partial x}.\tag{7.4.9}$$

扰动压力 p 经线性化后可表为

$$p=p_0-\rho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+V\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right).\tag{7.4.10}$$

p_0是静压力，由于其寻求方法极为简单，在以后的讨论中不予考虑。

关于方程(7.4.8)的求解，我们在第六章中曾详细推导过，所不同的是在现在的边界条件式(7.4.9)中增加了与速度(流速)相耦联的项。现设速度势函数 φ 按下式分离变量

$$\varphi(x,\theta,r,t)=R(r)S(x,\theta,t),\tag{7.4.11}$$

则由边界条件(7.4.9)确定函数 S，而得

$$\varphi(x,\theta,r,t)=\frac{R(r)}{R'(a)}\left(\frac{\partial w}{\partial t}+V\frac{\partial w}{\partial x}\right),\tag{7.4.12}$$

式中 $R'(a)$为 $R(r)$对 r 的一次导数在 $r=a$ 处的值。

作用在管壁的压力，则由式(7.4.10)求得为

$$p=-\frac{R(a)}{R'(a)}\rho\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2V\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}+V^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),\tag{7.4.13}$$

式中 $R(a)/R'(a)$可由解方程(7.4.8)确定。事实上此方程的解我们在第六章早已求得[见式(6.2.5)]。目前，中心问题在于如何把位移表达式 w 与速度势 φ 联系起来。

一根无限长管道应具有无穷个数目的自由振动形式和频率。为便于讨论，把每经N节便重复的振动形式归入一类(两加劲圆环之间的管段为一节)，N可以是任意正整数。于是相应于一定的N，由于 w 对于 x 和 θ 的周期性，可以用富氏级数表示为

$$w=We^{i\omega t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{mn}\sin m(\theta-\theta_0)e^{i\frac{n\pi x}{Nl}}e^{i\omega t}.$$

$$(-\infty<x<\infty)\tag{7.4.14}$$

每节管子的长度为 $2l$。

将式(7.4.11)代入(7.4.8)，$R(r)$在 $r=0$ 时，有限的解为 $I_m\left(\frac{n\pi}{Nl}r\right)$，因此有

$$\frac{R(a)}{R'(a)}=\frac{I_m\left(\frac{n\pi}{Nl}a\right)}{\frac{n\pi}{Nl}I'_m\left(\frac{n\pi}{Nl}a\right)},\tag{7.4.15}$$

式中 I_m 为第一类 m 阶修正的贝塞尔函数，这样，由式(7.4.13)求得作用于管壁的扰动压力为

$$p=\gamma a\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\omega+\frac{n\pi}{Nl}V\right)^2\frac{I_m\left(\frac{n\pi}{Nl}a\right)}{\frac{n\pi}{Nl}aI'_m\left(\frac{n\pi}{Nl}a\right)}A_{mn}\sin m(\theta-\theta_0)\times$$

$$\times e^{i\frac{n\pi}{Nl}x}e^{i\omega t}.\tag{7.4.16}$$

三、频率方程求解

由于 w 对于 x 的周期性，如以 $0\leqslant x\leqslant 2Nl$ 这一段为代表，则在此段中加劲圆环的数目为 N，亦即方程(7.4.7)中的和式 k 取 0 到 $N-1$。现将狄拉克函数在此段上也展成富氏级数，可得

$$\left.\begin{aligned}&\delta(x-2kl)=\frac{1}{2Nl}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-i\frac{2kn\pi}{N}+i\frac{n\pi x}{Nl}},\\&\delta[(\theta-\theta_0)-(\theta_s-\theta_0)]=\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\sin m(\theta-\theta_0)\sin m(\theta_s-\theta_0).\end{aligned}\right\}\tag{7.4.17}$$

将式(7.4.14)，(7.4.16)和(7.4.17)代入式(7.4.7)，消去共同因子后可得

$$\left\{\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left[\left(\frac{n\pi}{Nl}\right)^2+\frac{m^2}{a^2}-\frac{1}{a^2}\right]^2+\frac{\frac{Eh}{a^2}\left(\frac{n\pi}{Nl}\right)^4}{\left[\left(\frac{n\pi}{Nl}\right)^2+\frac{m^2}{a^2}\right]^2}+\frac{p_0}{a}(m^2-1)-\rho h\left[\omega^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\gamma a}{\rho h}\left(\omega+\frac{n\pi}{Nl}V\right)^2\frac{I_m\left(\frac{n\pi}{Nl}a\right)}{\frac{n\pi}{Nl}aI'_m\left(\frac{n\pi}{Nl}a\right)}\right]\right\}A_{mn}=-\frac{EI}{a^4}\frac{(m^4-2m^2+1)}{2Nl}\times$$

$$\times\sum_{s=-\infty}^{\infty}A_{ms}\sum_{k=0}^{N-1}e^{i2k\pi\left(\frac{s-n}{N}\right)}-\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{s}{}^{*}\frac{c_k}{2Nl\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}A_{ij}\sin m(\theta_s-\theta_0)\times$$

$$\times\sin i(\theta_s-\theta_0)e^{i2k\pi\left(\frac{j-n}{N}\right)}.\tag{7.4.18}$$

式(7.4.18)为一组无穷多个线性联立代数方程组，若有非零解，则其系数行列式为零，就得到了频率方程。为了简化分析，我们仍采用如本章第三节的线性变换。

设 $n=jN+k$，或 $\frac{n}{N}=j+\frac{k}{N}$，$j=0,\pm1,\pm2,\cdots,k=0,1,\cdots,N-1.$ (7.4.19)

则式(7.4.18)可写为

$$F_{m,j+\frac{k}{N}}A_{mn}=\tau_m\frac{1}{N}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{N-1}A_{ms}e^{i2k\pi\left(\frac{s-n}{N}\right)}-$$

---

* 未标上限的和号 $\sum_s$ 是指沿管壁分布的弹性支承求和。

$$-\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{s}\frac{c_k}{2Nl\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}A_{ij}\sin m(\theta_s-\theta_0)\sin i(\theta_s-\theta_0)e^{i2k\pi\left(\frac{s-n}{N}\right)}, \quad (7.4.20)$$

其中

$$F_{m,j+\frac{k}{N}}=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)a^4}\left\{\left[\left(j+\frac{k}{N}\right)\frac{\pi a}{l}\right]^2+m^2-1\right\}^2+\frac{\frac{Eh}{a^2}\left[\left(j+\frac{k}{N}\right)\frac{\pi a}{l}\right]^4}{\left\{\left[\left(j+\frac{k}{N}\right)\frac{\pi a}{l}\right]^2+m^2\right\}^2}+$$

$$+\frac{p_0}{a}(m^2-1)-\rho h\left\{\omega^2+\frac{\gamma}{\rho}\frac{a}{h}\left[\omega+\left(j+\frac{k}{N}\right)\frac{\pi a}{l}\frac{U}{a}\right]^2\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{I_m\left[\left(j+\frac{k}{N}\right)\frac{\pi a}{l}\right]}{\left(j+\frac{k}{N}\right)\frac{\pi a}{l}I'_m\left[\left(j+\frac{k}{N}\right)\frac{\pi a}{l}\right]}\right\}, \quad (7.4.21)$$

$$\tau_m=-\frac{EI(m^4-2m^2+1)}{2a^4l}. \quad (7.4.22)$$

根据前面对振动形式的分类原则，k/N 可以是位于 0 和 1 之间的任意有理数，但事实上只要使 k/N 位于 0 和 1/2 之间，便足以确定全部自由振动频率和形式[11]。我们将 k/N 分为两种情形来讨论方程(7.4.20)[12]。

① 当 $k/N=0$ 或 1/2 时，

$$\sum_{k=0}^{N-1}e^{i2k\pi\left(\frac{s-n}{N}\right)}=0, \quad (7.4.23)$$

方程(7.4.20)可化为

$$F_{m,j+\frac{k}{N}}\cdot A_{m,j+\frac{k}{N}}=0,$$

于是频率方程变为

$$F_{m,j+\frac{k}{N}}=0. \qquad \left(\frac{k}{N}=0\text{ 或 }\frac{1}{2}\right) \quad (7.4.24)$$

频率方程(7.4.24)与管道加劲圆环的刚度无关，说明在这种情况下振动形式的节点正好通过所有的加劲圆环。相应于式(7.4.24)给出频率的自由振动形式由式(7.4.14)求得为

$$W=A\sin m(\theta-\theta_0)e^{i\frac{j\pi}{l}x}, \ (\omega=\omega_{m,j}, \ k/N=0) \quad (7.4.25)$$

$$W=A'\sin m(\theta-\theta_0)e^{\frac{i(2j+1)\pi x}{2l}}. \left(\omega=\omega_{m,j+\frac{1}{2}}, \ k/N=\frac{1}{2}\right) \quad (7.4.26)$$

② 当$\frac{s-n}{N}=j$ 时，即 j 为整数时，

$$\sum_{k=0}^{N-1}e^{i2k\pi\left(\frac{s-n}{N}\right)}=N,$$

当 $\frac{s-n}{N}\neq j$ 时，则

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{i2k\pi\left(\frac{s-n}{N}\right)}=0.$$

下面分析振动节点不完全通过加劲圆环时的情况，并且先略去弹簧支承的作用。往后我们将会证明它的影响是很小的。这样一来，方程(7.4.20)可以写为

$$F_{m,n}A_{m,n}=\tau_m \sum_{s=iN+n}^{\infty}\sum_{k=0}^{N-1}A_{ms}. \tag{7.4.27}$$

此式又可以写成如下形式的$N-1$个独立方程组：

$$\left.\begin{array}{l}
(F_{m,k}-\tau_m)A_{mk}-\tau_m A_{m,N+k}-\tau_m A_{m,-N+k}-\tau_m A_{m,2N+k}-\tau_m A_{m,-2N+k}-\cdots=0,\\
-\tau_m A_{mk}+(F_{m,N+k}-\tau_m)A_{m,N+k}-\tau_m A_{m,-N+k}-\tau_m A_{m,2N+k}-\tau_m A_{m,-2N+k}-\cdots=0,\\
-\tau_m A_{mk}-\tau_m A_{m,N+k}+(F_{m,-N+k}-\tau_m)A_{m,-N+k}-\tau_m A_{m,2N+k}-\tau_m A_{m,-2N+k}-\cdots=0,\\
-\tau_m A_{mk}-\tau_m A_{m,N+k}-\tau_m A_{m,-N+k}+(F_{m,2N+k}-\tau_m)A_{m,2N+k}-\tau_m A_{m,-2N+k}-\cdots=0,\\
-\tau_m A_{mk}-\tau_m A_{m,N+k}-\tau_m A_{m,-N+k}-\tau_m A_{m,2N+k}+(F_{m,-2N+k}-\tau_m)A_{m,-2N+k}-\cdots=0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\} \tag{7.4.28}$$

$$(k=1,2,\cdots,N-1)$$

将此方程组中的每一个方程与第一个方程相减，则 $A_{m,N+k}$，$A_{m,-N+k}\cdots$可用 A_{mk}表示。由第一方程减第二方程得

$$F_{m,k}A_{m,k}-F_{m,N+k}A_{m,N+k}=0,$$

所以
$$\left.\begin{array}{l}
A_{m,N+k}=\dfrac{F_{mk}}{F_{m,N+k}}A_{m,k},\\
A_{m,-N+k}=\dfrac{F_{mk}}{F_{m,-N+k}}A_{m,k},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\} \tag{7.4.29}$$
类似地有

将式(7.4.29)代入(7.4.28)的第一式得到

$$A_{m,k}\left[(F_{m,k}-\tau_m)-\tau_m\frac{F_{mk}}{F_{m,N+k}}-\tau_m\frac{F_{mk}}{F_{m,-N+k}}-\tau_m\frac{F_{mk}}{F_{m,2N+k}}-\cdots\right]=0.$$

或者可以写为

$$A_{m,k/N}F_{m,k/N}\left[1-\tau_m\left(\frac{1}{F_{m,k/N}}+\frac{1}{F_{m,1+k/N}}+\frac{1}{F_{m,-1+k/N}}+\frac{1}{F_{m,2+k/N}}\right)+\cdots\right]=0. \tag{7.4.30}$$

对于频率$\omega_{m,k/N}\left(0<k/N<\dfrac{1}{2}\right)$，$F_{m,k/N}\neq 0$，于是得到频率方程为

$$1-\tau_m\left(\frac{1}{F_{m,k/N}}+\frac{1}{F_{m,1+k/N}}+\frac{1}{F_{m,-1+k/N}}+\frac{1}{F_{m,2+k/N}}+\cdots\right)=0. \tag{7.4.31}$$

对于频率 $\omega_{m,1+k/N}$，$\omega_{m,-1+k/N}$，$\omega_{m,2+k/N}\cdots\left(0<\dfrac{k}{N}<\dfrac{1}{2}\right)$，可得到类似的频率方程，于是得到当$0<\dfrac{k}{N}<1/2$的一般情况下的频率方程为

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{1}{F_{m,i+k/N}}=\frac{1}{\tau_m}. \tag{7.4.32}$$

相应于这种情况的自由振动形式，由式(7.4.14)和(7.4.29)求得为

$$W=A_{m,k/N}\sin m(\theta-\theta_0)\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{F_{m,k/N}}{F_{m,j+k/N}}e^{i(j+k/N)\frac{\pi}{l}x},\quad\left(0<k/N<\frac{1}{2}\right)\tag{7.4.33}$$

由频率方程(7.4.24)和(7.4.32)可以看出，管道自由振动的频率和形式随流体速度的增加而发生相应的变化。当流速 V 不等于零时，管壁上沿 x 向各点的振动具有不同的振相；若随着流速 V 的增加，所给出的频率变为虚数或复数时，则振动成为不稳定。产生不稳定振动的临界流速可在频率方程中令 ω 为零求得。这里不讨论不稳定问题。详细的讨论可参考有关文献[11]。

由方程(7.4.18)可计算，弹性加劲圆环对自由振动的形式的耦联作用。如果我们取第一次近似，即忽略这种耦联影响，则式(7.4.18)可以写为

$$\left\{\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left[\left(\frac{n\pi}{Nl}\right)^2+\frac{m^2}{a^2}-\frac{1}{a^2}\right]^2+\frac{\frac{Eh}{a^2}\left(\frac{n\pi}{Nl}\right)^4}{\left[\left(\frac{n\pi}{Nl}\right)^2+\frac{m^2}{a^2}\right]^2}+\frac{p_0}{a}(m^2-1)-ph\right[\omega^2+$$

$$\left.+\frac{\gamma a}{\rho h}\left(\omega+\frac{n\pi}{Nl}U\right)^2\frac{I_m\left(\frac{n\pi a}{Nl}\right)}{\frac{n\pi a}{Nl}I'_m\left(\frac{n\pi a}{Nl}\right)}\right]\right\}A_{mn}=\begin{cases}-\frac{FI}{a^4}\frac{(m^4-2m+1)}{2l}A_{mm}, & \left(\text{当 } 0<k/N<\frac{1}{2}\right)\\ 0, & \left(\text{当 } k/N=0,\frac{1}{2}\right)\end{cases}$$

(7.4.34)

于是得到当仅考虑弹性加劲圆环时的频率方程为

$$F_{m,j+k/N}=\begin{cases}0; & \text{当 } k/N=\begin{cases}0\\1/2\end{cases} \quad (7.4.35\text{a})\\ \tau_m, & \text{当 } 0<k/N<1/2 \quad (7.4.35\text{b})\end{cases}$$

式(7.4.35 b)为一次近似值。

四、多跨弹性支承有限管道的径向振动

当流速不大时，则流速对于自振频率和振型的影响很小，因此近似地可取流速为零。在此情况下来考虑中间弹性支承对管道径向自由振动的影响。设管道在两端壁上为简支，在中间断面 x_k 处用圆环加劲，并在该断面沿圆周方向 θ_s 处用相同的弹簧支承，见图 7.4.2 。

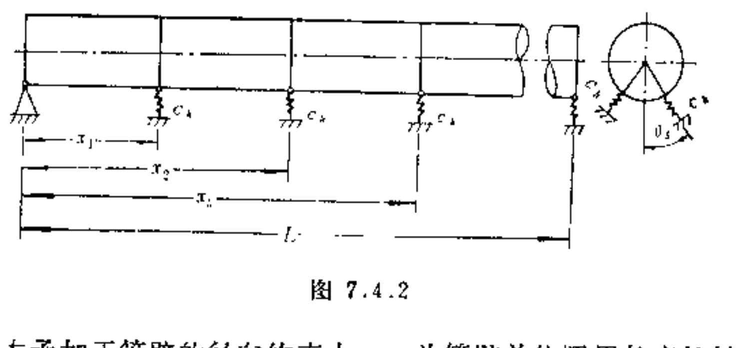


图 7.4.2

设 F_r 为弹簧支承加于管壁的径向约束力，s 为管壁单位圆周长度的轴向压力，则运动

方程(7.4.7)可化为

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\nabla^4\left(\nabla^2+\frac{1}{a^2}\right)^2 w+\frac{Eh}{a^2}w_{xxxx}=\nabla^4\left[\frac{p_0}{a}(w_{\theta\theta}+w)+s-\rho h\ddot{w}+\right.$$

$$\left.+F_r+p-\sum_k\frac{EI}{a^4}(w_{\theta\theta\theta\theta}+2w_{\theta\theta}+w)\delta(x-x_k)\right],\qquad(4.4.36)$$

满足管壁两端简支边界条件的方程(7.4.36)的解可表示为

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{mn}\sin m(\theta-\theta_0)\sin\frac{n\pi}{L}x\sin\omega t,\qquad(7.4.37)$$

式中 L 是管道总长，θ_0 是 θ 的计算起始角。

流体作用于管壁的扰动压力为

$$p=\gamma a\omega^2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{mn}\frac{I_m\left(\frac{n\pi}{L}a\right)}{\frac{n\pi a}{L}I'_m\left(\frac{n\pi a}{L}\right)}\sin m(\theta-\theta_0)\sin\omega t,\qquad(7.4.38)$$

相当于(7.4.37)的集中弹性支承反力 F_r 可表为

$$F_r=-\sum_k\sum_s c_k w\delta(x-x_k)\delta[(\theta-\theta_0)-(\theta_s-\theta_0)].\qquad(7.4.39)$$

将狄拉克函数展为富氏级数：

$$\delta(x-x_k)=\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{L}x\sin\frac{n\pi}{L}x_k,\qquad(7.4.40)$$

$$\delta[(\theta-\theta_0)-(\theta_s-\theta_0)]=\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\sin m(\theta-\theta_0)\sin m(\theta_s-\theta_0).\qquad(7.4.41)$$

于是得到：

$$F_r=-\sum_k\sum_s\left[c_k\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{n\pi}{L}x\sin m(\theta_s-\theta_0)\right]\cdot\left[\frac{2}{\pi L}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\right.$$

$$\left.\sin m(\theta_s-\theta_0)\sin\frac{n\pi}{L}x_k\sin m(\theta-\theta_0)\sin\frac{n\pi}{L}x\right]\sin\omega t$$

$$=-\sum_k\sum_s\frac{2c_k}{\pi L}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}A_{ij}\sin m(\theta_s-\theta_0)\sin i(\theta_s-\theta_0)\sin\frac{n\pi}{L}x_k$$

$$\sin\frac{j\pi}{L}x_k\sin m(\theta-\theta_0)\sin\frac{n\pi}{L}x\sin\omega t.\qquad(7.4.42)$$

将式(7.4.37)、(7.4.38)、(7.4.42)代入方程(7.4.36)则得到

$$\left\{\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)a^4}\left[\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2+m^2-1\right]^2+\frac{\frac{Eh}{a^2}\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^4}{\left[\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2+m^2\right]^2}+\frac{p_0}{a}(m^2-1)-\frac{s}{a^2}\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2-\right.$$

$$\left.-\rho h\omega^2\left[1+\frac{\gamma a}{\rho h}\frac{I_m\left(\frac{n\pi a}{L}\right)}{\frac{n\pi a}{L}I'_m\left(\frac{n\pi a}{L}\right)}\right]\right\}A_{mn}$$

$$=-\frac{EI}{a^4}\frac{2}{L}(m^4-2m^2+1)\sum_{i=1}^{\infty}A_{mi}\sum_k\sin\frac{n\pi}{L}x_k\sin\frac{i\pi}{L}x_k-\sum_k\sum_s\frac{2c_k}{\pi L}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}A_{ij}\sin m(\theta_s-\theta_0)\sin i(\theta_s-\theta_0)\sin\frac{n\pi}{L}x_k\sin\frac{j\pi}{L}x_k. \qquad (7.4.43)$$

若取一次近似，则式(7.4.43)可以写为

$$\left\{\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)a^4}\left[\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2+m^2-1\right]^2+\cdots\right\}A_{mn}=-\left\{\frac{EI}{a^4}\frac{2}{L}(m^4-2m^2+1)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sum_k\sin^2\frac{n\pi}{L}x_k+\frac{2}{\pi L}\sum_k\sum_s c_k\sin^2\frac{n\pi}{L}x_k\sin^2 m(\theta_s-\theta_0)\right\}A_{mn}.$$

所以第一次近似的频率方程为

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)a^4}\left[\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2+m^2-1\right]^2+\frac{\frac{Eh}{a^2}\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^4}{\left[\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2+m^2\right]^2}+\frac{p_0}{a}(m^2-1)-\frac{s}{a^2}\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2+$$

$$+\frac{EI}{a^4}\frac{2}{L}(m^4-2m^2+1)\sum_k\sin^2\frac{n\pi}{L}x_k+\frac{2}{\pi L}\sum_k\sum_s c_k\sin^2 m(\theta_s-\theta_0).$$

$$\sin^2\frac{n\pi}{L}x_k-\rho h\omega^2\left[1+\frac{\gamma a}{\rho h}\frac{I_m\left(\frac{n\pi}{L}a\right)}{\frac{n\pi a}{L}I_m'\left(\frac{n\pi}{L}a\right)}\right]=0. \qquad (7.4.44)$$

由方程(7.4.44)可以看出，频率取决于一个由 0 到 2π 范围内变化的任意参数 θ_0，相应于一给定的 m 和 n 值，可得到一段密集的频谱。

圆周向波数 $m=0$ 和 $m=1$，分别相应于管道的扭转振动和横向振动。这里我们不予讨论。

五、管道径向自振频率的数值计算实例

我们曾选取两根实际管道，按前面所推导的公式计算自振频率。管道的材料性质和尺寸列于表 7.4.1 。

表 7.4.1　　　　**管道材料性质及尺寸**

管道号	管壁材料容重(考虑保温层) ρ 克/厘米^3	弹性模量 公斤/厘米^2	泊桑比 ν	管道平均半径 a 厘米	管壁厚 h 厘米	水体容重(考虑温度影响) γ 克/厘米^3
I	11.6	2.1×10^6	0.3	40.20	1.60	0.87
II	16.66	2.1×10^6	0.3	40.20	1.60	0.87

管道号	管内静水压力 p_0 公斤/厘米^2	水流速度 V 米/秒	加劲环间距 $2l$ 米	加劲环弯曲刚度 EI (公斤·厘米^2)	弹簧支承常数 c_k (公斤/厘米)
I	30	3	5	56×10^9(环厚2厘米)	507
II	25	3	5	56×10^9	

（一）首先考虑管道为无限长，忽略弹簧支承的影响，取 $j+k/N=1/16$ 和 $m=2$，分别按精确频率方程(7.4.32)和近似频率方程(7.4.35 a)，(7.4.35 b) 就不同刚度加劲圆环计算管道频率。按式(7.4.32)计算时，式中级数取 11 项，计算结果见图(7.4.3)。由图可见，对于不是十分刚劲的加劲圆环，近似公式计算结果与精确公式计算结果非常接近。

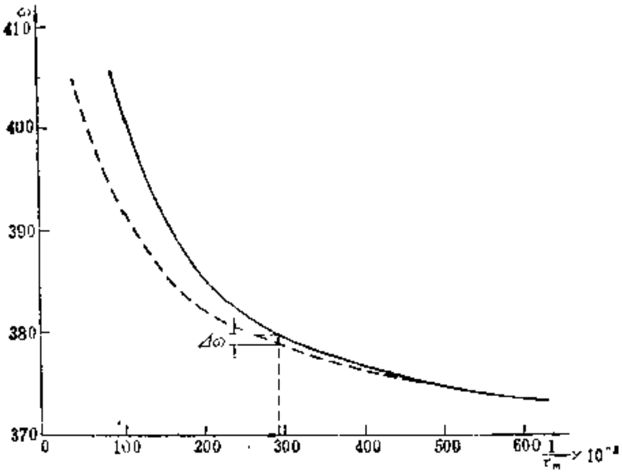


图 7.4.3

——公式(7.4.32)[即公式(7.4.35)取首项]；－－－公式(7.4.35)取到第 12 项；$\Delta\omega=0.7$，误差 1.8%[$m=2$，$\frac{1}{\tau_m}=295.4\times10^{-6}$]

（二）假设管道为无限长，忽略弹簧支承的影响，按近似公式（7.4.35）计算管道 I 和 II 的自振频率。计算结果列于表 7.4.2。

由表 7.4.2 可见，在所取的 $j+k/N$ 范围内，频率随 $j+k/N$ 的变化很小，这是因为相应于所取 $j+k/N$ 值的轴向波长甚大的缘故。$j+k/N=\frac{1}{12}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{6}$和$\frac{1}{4}$分别相应于轴向半波长的管道为 6，4，3 和 2 跨，其中最小的轴向波长已为管径的 24 倍。

表 7.4.2　　按式(7.4.35)计算的管道径向自振频率(周/秒)

管道	$j+k/N$ \ m	考虑加径圆环				不考虑加劲圆环			
		2	3	4	5	2	3	4	5
I	$\frac{1}{12}$	60.3	150.0	282	454	58.4	144	268	430
	$\frac{1}{8}$	60.3	150.5	282	455	58.4	144	268	431
	$\frac{1}{6}$	60.5	151	282	455	58.4	144	268	431
	$\frac{1}{4}$	60.5	151	282	455	58.5	144	268	431
II	$\frac{1}{12}$	45.8	102.5	183	288	43.1	91.7	159	245
	$\frac{1}{4}$	46.2	103	183	288	43.4	92	159	245

比较表 7.4.2 中考虑和忽略加劲圆环的计算频率可以看出，对于较厚的管道 I，两者相

差甚小，当 $m=2$ 时相差约 2.5%，当 $m=5$ 时相差亦不过 5%；但对于较薄的管道Ⅱ，则两者相差较大，当 $m=2$ 时相差 5%，而当 $m=5$ 时相差约达 16%。由此可见，当加劲圆环的刚度相对于管道来说比较大时，管道径向自振频率的计算必须考虑加劲圆环的影响

（三）为了估计弹簧支承对管道径向自振频率的影响，我们取长度 $L=20.2$ 米的管道Ⅰ，假设它在两端壁上简单支承，在中间的加劲圆环上用两个与铅垂线呈 30° 角的弹簧支承，忽略管中水流速度，按式（7.4.42）计算自振频率，结果列于表 7.4.3。

表 7.4.3　　按式(7.4.44)计算的管道Ⅰ的径向自振频率(周/秒)

n \ m	考虑加劲圆环和弹簧支承				不考虑加劲圆环和弹簧支承			
	2	3	4	5	2	3	4	5
1	60.7	152	284	458	58.4	144	268	431

由表可见，对于管道Ⅰ加劲圆环和弹簧支承对频率的影响不大。当 $n=1$ 和 $m=1—5$ 时，相差约 2.5—5.8%。这说明，当管道的加劲环和弹簧支承的刚度不大时，管道径向自振频率的计算可以近似地略去加劲圆环和弹簧支承的影响。

在计算过程中我们发现，当取流速 $V=3$ 米/秒时，对于管道自振频率的影响很小，可以不予考虑。

（四）为了解流体静内压力对管道径向自振频率的影响，曾按式（7.4.35）计算了当考虑或忽略流体内压力时的管道的自振频率。结果列于表 7.4.4。由表 7.4.4 可见，流体的静内压力将提高管道的径向自振频率，管壁越薄和 m 越小，亦即圆周向振动波数越少，内压对频率的影响就越大。不考虑内压时，较厚的管道Ⅰ和较薄的管道Ⅱ，当 $m=2,3,5$ 时的自振频率比考虑内压时低 20%，10%，4%，和 50%，25%，10%，由此可见，内压对管道的影响不容忽视，特别是当管壁薄而圆周向波数又小时，在计算其自振频率时是必须加以考虑的因素。

表 7.4.4　　按式(7.4.35)计算的流体静压力对管道径向自振频率的影响

管道	压力 公斤/厘米²	$j+h/N$ \ m	考虑内部流体静压力				不考虑内部流体静压力			
			2	3	4	5	2	3	4	5
Ⅰ	30	$\frac{1}{12}$	60.3	150.5	282	454	45.8	134	263	434
Ⅱ	25	$\frac{1}{12}$	45.8	102.5	183	288	27	78	157	259

六、管道径向振动的模型试验

为了检验管道径向自振频率理论公式的可靠性，我们曾就实验管道进行了振动试验。选择 ϕ 620×12(毫米)和 ϕ 820×16(毫米)的两根管道，分别按 1:1 和 1:4 的模型率进行管道的振动试验。

（一）模型

1. 模型Ⅰ为 1:1 的管道，外径 620 毫米，壁厚 12 毫米，长 8.2 米，由钢板卷焊而成，管端焊接厚 14 毫米的加劲端板封闭，管道在两端用弹簧支座支承。为了试验管壁外部的保

温层的阻尼特性及对管壁自振特性的影响，在管壁外表面敷设了特制的石棉保温层，厚度为 11 厘米。其容重为 360 公斤/米^3。

2. 模型Ⅱ为 1:4 的管道。管道外径为 205 毫米，壁厚 4 毫米，长 8.0 米，用每段长约 0.6 米的无缝钢管焊接而成。所模拟的原型管道即为管道Ⅰ。管端焊接厚 8 毫米的端板。模型管道的支承弹簧常数按相似关系以 1:4 的比例缩小。

（二）实验方法及仪器

管道由电磁激振器激振，最大激振力为 10 公斤。模型Ⅱ所用激振器的最大激振力为 1 公斤。激振模型Ⅰ时，激振力通过管道轴线水平地作用在管道上。其激振点的位置则依所需激起管道的轴向波数而分别置于跨度中间，1/4 跨度处及离跨中的 1/8 跨度处。激振模型Ⅱ时，激振器置于管道跨中。激振力通过管轴垂直地向上作用。由于作为壳体的管道振动的频谱是非常密集的，因此，必需在正确地确定轴向波数和圆周向波数后，才能知道它们所对应的频率序号。为此，我们在管道的表面划分成网格点。当管道达到某一共振频率后，就依次在管道的轴向和圆周向测量出各点的振幅，并定出其相位，从而可以确定沿管壁向和轴向的振动波型。

为了试验管道内部静压力对频率的影响，在模型端部装有专门的加压泵。试验时，内压力由 0 起，每 5 公斤/厘米^2 为一级，逐步增大到 30 公斤/厘米^2。

（三）试验结果

两根管道的径向自振频率试验结果分别列于表 7.4.5，7.4.6。

表 7.4.5　　无保温层 ϕ 620 管道的径向自振频率(周/秒) $\frac{试验值}{计算值}$

圆周向波数 (m)		2					3					4				
轴向半波数 (n)		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
内部水压力（公斤/厘米^2）	0	59	64	78	107	142	180	181	183	192	[illegible]	358		368		374
		60	61.7	79.7	108		178	180	183	190		358	359	362	365	389
	5	62.5		80		142	178		185			367		371		392
		64	68.5	83	110		183	185	187	194		[illegible]	[illegible]	366	370	
	10	66.5		[illegible]		141	181		188			370		[illegible]		400
		67.8	72	85	112		187	189	193	198		365	[illegible]	372	375	
	15	69.5		86		146	188		195		201	375		[illegible]		400
		71.5	75.5	89	115		192	194	196	202		374	374	378	380	
	20	73.3		88.5		148	191		199		201			381		405
		75	79	92	117		197	198	[illegible]	[illegible]		378	[illegible]	380	384	
	25	76.5		91		151	[illegible]		202					383		393
		78.2	83	94.4	119		200	202	205	209		383	384	386	389	
	30	79		94		158	201		207		212			[illegible]		[illegible]
		81	85	97	122		201	206	209	214		387	387	390	[illegible]	

表 7.4.6　　　　ϕ820 管道的径向自振频率（周/秒）$\frac{试验值}{计算值}$

圆周向波数 (m)	2			3			4		
$j+k/n$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$
内部静水压力（公斤/厘米²） 0	44	48.5	51.2	130	146	162	265	277	289
	48.2	48.3	48.4	144	144	160	290	290	290
5	45	47	50	129	151	160	268	287	308
	51	51.2	51.2	147	147	147.4	294	294	294
10	48	49.8	50.8	133	146	155	256	269	289
	53.7	53.9	54	149	150	150.5	297	297	297
15	50.2	51.8	54.5	135	155	164	259	271	284
	56.3	56.5	58	154	154	154	300	301	301
20	52.5	54	55	132	153	167	262	275	293
	58.7	58.7	59	157	157	157	303	304	304
25	55	56.2	59.8	140	155	168	267	278	296
	61.3	61.3	61.3	159	160	160	307	307	307
30	57.2	61.8	68.5	143	161	170	282	292	304
	63.5	63.5	64.2	163	163	163	310	312	312

图 7.4.4 为 ϕ 620 管道没有保温层时的几个典型试验振型曲线。图 7.4.5 为共振曲线。

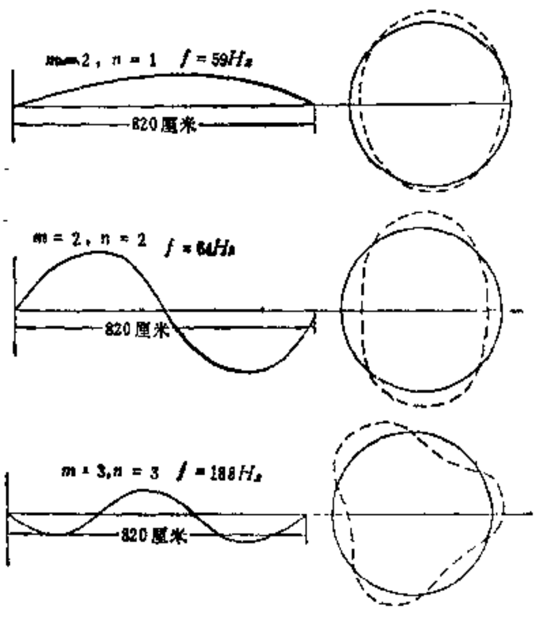


图 7.4.4

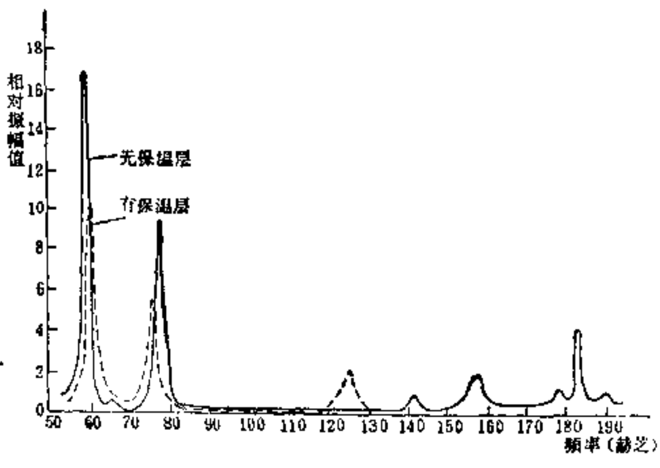


图 7.4.5

通过理论计算和试验结果的比较，可以认为试验和计算结果是很接近的。因此，按理论

公式(7.4.35)和(7.4.42)计算是足够精确的。

加劲圆环对管道径向自振频率的影响，随管壁厚度的减小和加劲环本身刚度的增大以及圆周向振动波数的增大而增大，所以当计算薄壁管的自振特性时，加劲圆环的影响必须加以考虑。一般，弹簧支承的影响很小，可以忽略。

管道内部流体静压力对于自振特性有很大的影响，随着压力的增加，管道的自振频率会明显提高，特别是当管壁薄而圆周向波数和轴向波数小时，这种提高也就越大。因此，在计算管道自振频率时，内压力是不可忽略的因素。

当管内流体的流速不大，例如低于 3 米/秒时，它对自振频率的影响很小，可以忽略。

第五节　无限长管道具有中间“固定”支承时的振动

一、引言

在第四节里，我们介绍了管道具有加劲圆环和弹簧支承时的振动分析。而在工程结构中，有时我们将会遇到某些中间连续支承的管道。虽然，计算的原理和上一节所介绍的十分相似，但由于中间支承处要满足径向位移等于零的条件，问题要更复杂一点[1]。

设有如图 7.5.1 所示的管道，我们假设管道中部的等间隔上用完全相同的圆环支承。并认为支撑圆环的刚度很大，宽度很小，因此在支撑的位置上，管壁的径向挠度等于零。支撑间距为 $2l$，并以 σ_0 表示在没有振动时管壁里所存在的法向应力，管道中液体的平均流速为 U。略去液体的可压缩性和粘滞性。为了讨论管子和流体相互作用下的自由振动，我们把管壁各点的位移分量写成如下形式：

$$\left.\begin{aligned} &u(x,\theta)e^{i\omega t},\\ &v(x,\theta)e^{i\omega t},\\ &w(x,\theta)e^{i\omega t}.\end{aligned}\right\}\tag{7.5.1}$$

流体中随振动而发生的扰到速度势和扰动压力函数可写作

$$\left.\begin{aligned} &\varphi e^{i\omega t},\\ &p e^{i\omega t}.\end{aligned}\right\}\tag{7.5.2}$$

其中 ω 是待定的圆频率，t 代表时间。采用这样的表示以后，便可以在下面的分析里消去关于时间的公因子 $e^{i\omega t}$。管壁的变形和坐标系如图 7.5.2 所示。

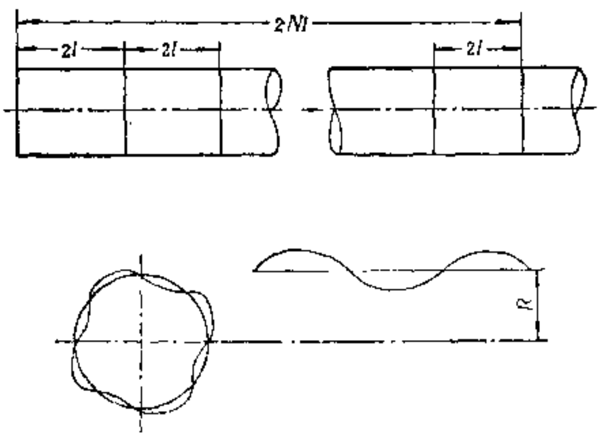


图 7.5.1

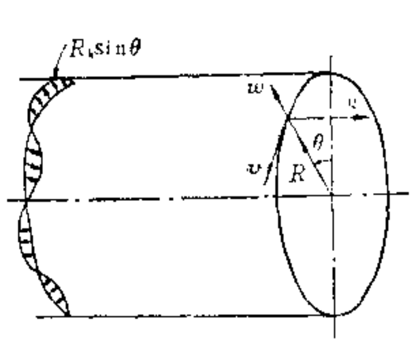


图 7.5.2

根据振动理论可知，当考虑管壁变形后，一个单节管子将具有双重无穷多个自由振动形式和频率，而无穷多节管子便自然具有三重无穷多个自由振动形式和频率，所以其频谱虽然是分离的，但是很密集。这是壳体振动的一般特点。作为圆柱壳的管道也会具有这种特点。

在以下的分析中，我们可把每经N节便重复的振动形式归入一类，N可以是任意正整数，于是，相应于一定的N，由于w对于x和θ的周期性，可以用富氏级数表示为

$$w=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(B_m\sin m\theta+C_m\cos m\theta)A_{mn}e^{i\frac{n\pi x}{Nl}}. \tag{7.5.3}$$

考虑到线性系统的叠加原理，不失一般性，在以下的分析中取

$$w=\sin m\theta\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_{mn}e^{i\frac{n\pi x}{Nl}}. \qquad -\infty<x<\infty \tag{7.5.4}$$

显然，求出了相应于式(7.5.4)的解，则式(7.5.3)所代表的更普遍的解很容易求得。当x为$2l$的整数倍时，即在支撑的位置上w恒等于零，因此有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_{mn}e^{i\frac{2n\pi s}{N}}=0. \qquad (s=0,1,\cdots,N-1) \tag{7.5.5}$$

为了以后计算上方便起见，仍采用第三节的线性变换，将n写作

$$n=Nq+k,\ q=0,\pm1,\pm2,\ \cdots\pm\infty,$$
$$k=0,1,\cdots N-1.$$

这样式(7.5.3)和(7.5.4)可以改写为

$$w=\sin m\theta\sum_{k=0}^{N-1}e^{i\frac{k\pi x}{Nl}}\sum_{q=-\infty}^{\infty}A_{m,qN+k}e^{i\frac{q\pi x}{l}}, \tag{7.5.6}$$

故
$$\sum_{k=0}^{N-1}e^{i\frac{2k\pi s}{N}}\sum_{q=-1}^{\infty}A_{m,qN+k}=0. \qquad (s=0,1,\cdots,N-1) \tag{7.5.7}$$

由于行列系

$$D_{et}a_{sk}\neq0,\ a_{sk}=e^{i\frac{2K\pi s}{N}},$$

故(7.5.7)相当于

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty}A_{m,qN+k}=0.$$

所以中心问题在于如何求得频率ω和系数$A_{m,qN+k}$。

二、流体动压力

速度势函数$\varphi e^{i\omega t}$应满足下面的拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}=0. \tag{7.5.9}$$

在流体和管壁的接触面上，φ必须满足垂直于这个面的速度连续性条件。经线性化后这个条件为

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right|_{r=R} = i\omega w + V\frac{\partial w}{\partial x}. \qquad (7.5.10)$$

φ 必须满足的另一个条件是对于 x 和 θ 呈周期性的条件。

关于拉普拉斯方程的求解问题，我们已在第六章梁式结构的耦联振动中详细推导过，这里唯一不同的是边界条件式(7.5.10)中增加了速度耦联项。但是，对于这一项给最终结果所带来的影响，我们也已在第三节(平板的振动)中详细地求导过。根据上述关系，式(7.5.9)，(7.5.10)和(7.5.4)给出

$$\varphi = i\sin m\theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\omega + \frac{n\pi}{Nl}V\right) \frac{I_m\left(\frac{n\pi r}{Nl}\right)}{\frac{n\pi}{Nl} I_m'\left(\frac{n\pi R}{Nl}\right)} A_{mn} e^{i\frac{n\pi x}{Nl}}. \qquad (7.5.11)$$

流体动压力 p 的公式为

$$p = -\gamma\left(i\omega\varphi + V\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right).$$

将(7.5.11)的 φ 代入上式，便得到扰动压力

$$p|_{r=R} = \gamma \sin m\theta \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\omega + \frac{n\pi}{Nl}V\right)^2 \frac{I_m\left(\frac{n\pi R}{Nl}\right)}{\frac{n\pi}{Nl} I_m'\left(\frac{n\pi R}{Nl}\right)} A_{mn} e^{i\frac{n\pi x}{Nl}}. \qquad (7.5.12)$$

三、管道的运动方程和频率方程的求解

根据薄壳理论，若我们可略去 x 向和 θ 向的惯性力，则可以得到唐纳尔(Donnell) 型的运动微分方程：

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \nabla^4\nabla^4 w + \frac{Eh}{R^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \nabla^4\left(\frac{\sigma_0 h}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + p + \rho h\omega^2 w + F_r\right), \qquad (7.5.13)$$

其中

$$\nabla^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)^2,$$

h 是管壁厚度，ρ 是管壁密度，ν 是泊桑比，E 是弹性模量，F_r 为代表支承加压管壁的约束力。关于支撑情况，我们还作如下的规定：

① 在支撑的位置上 $w=0$；

② $F_x = F_\theta = 0$，F_r 是作用在 $x=2sl$ 的线集中载荷。按照这个规定，支撑环不加 x 方向的弯矩于管壁，它也不约束在 x 和 θ 方向的滑动。

F_r 和 w 对于 x 和 θ 必须有相同的周期性，如果以 $0 \leqslant x < 2Nl$ 这一段为代表，则线集中载荷可以表示为

$$F_r = \sin m\theta \sum_{k=0}^{N-1} R_{mk}\delta(x - 2kl),$$

其中 $\delta(x)$ 是狄拉克函数，R_{mk} 是待定常数。将 $\delta(x)$ 展为富氏级数，代入上式即得

$$F_r = \frac{\sin m\theta}{2Nl}\sum_{k=0}^{N-1} R_{mk} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{2k\pi n}{N} + i\frac{n\pi x}{Nl}}, \qquad (7.5.14)$$

把已经表示成富氏级数形式的式(7.5.4)，(7.5.12)，(7.5.14)代入式(7.5.13)并比较系数，便得到如下关系式：

$$A_{mn}=F_{m,\frac{n}{N}}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{R_{mk}}{2Nl}e^{i\frac{2kn\pi}{N}}=\tau_{m,\frac{n}{N}}F_{m,\frac{n}{N}}\ , \tag{7.5.15}$$

其中

$$\frac{1}{F_{m,\frac{n}{N}}}=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left[\left(\frac{n\pi}{Nl}\right)^2+\left(\frac{m^2}{R^2}\right)\right]^2+\frac{\frac{Eh}{R^2}\left(\frac{n\pi}{Nl}\right)^4}{\left[\left(\frac{n\pi}{Nl}\right)^2+\frac{m^2}{R^2}\right]^2}+\frac{m^2\sigma_0 h}{R^2}-$$

$$-\rho h\left(\omega^2+\beta_{m,\frac{n}{N}}\right)\ , \tag{7.5.16}$$

$$\tau_{m,\frac{n}{N}}=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{R_{mk}}{2Nl}e^{-i\frac{2kn\pi}{N}}, \tag{7.5.17}$$

$$\beta_{m,\frac{n}{N}}=\frac{\gamma R}{\rho h}\left(\omega+\frac{n\pi}{Nl}V\right)^2\frac{I_m\left(\frac{n\pi R}{Nl}\right)}{\frac{n\pi R}{Nl}I'_m\left(\frac{n\pi R}{Nl}\right)} \tag{7.5.18}$$

于是，因为 $\tau_{m,q+\frac{k}{N}}=\tau_{m,\frac{k}{N}}$，故有

$$A_{m,qN+k}=\tau_{m,\frac{k}{N}}\quad F_{m,q+\frac{k}{N}}\ , \tag{7.5.19}$$

代入式(7.5.8) 即得

$$\tau_{m,\frac{k}{N}}\sum_{q=-\infty}^{\infty}F_{m,q+\frac{k}{N}}=0\ .\ (k=0,1,\cdots,N-1) \tag{7.5.20}$$

$\tau_{m,\frac{k}{N}}$ 可以认为是N个基本待定常数，这些常数代表着支撑外力，所以当知道了$\tau_{m,\frac{k}{N}}$ 后便可以从式(7.5.15)求出$A_{m,n}$。一般情况下，支撑反力恒等于零的解是没有意义的，因为这表示水管没有振动，或者是所有振动节点全部落在支撑上的情况。因此，要同时满足式(7.5.20)的N个条件，可以取

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty}F_{m,q+\frac{k_0}{N}}=0\ , \tag{7.5.21 a}$$

$$\tau_{m,\frac{k_0}{N}}\neq 0\ , \tag{7.5.21 b}$$

$$\tau_{m,\frac{k}{N}}=0\ .\quad 当\ k\neq k_0 \tag{7.5.21 c}$$

式(7.5.21 a)只包含ω这一未知值，它就是决定自由振动频率的方程式。相应于一定的m和$\frac{k_0}{N}$值，就可以从式(7.5.21 a)求出一系列的频率值。k_0/N可以是位于0和1之间的任意有理数。而事实上，正如平板振动这一节所证明的一样，只要使k_0/N位于0和1/2之间，便足以确定全部自由振动频率和振型。从对称性来理解，也会得到这个结果。

如果ω_0是式(7.5.21 a)的一个根，则相应的振型可以从式(7.5.6)求得为

$$w=\tau_{m,\frac{k_0}{N}}\sin\ m\theta e^{i\frac{k_0\pi x}{Nl}}\sum_{q=-\infty}^{\infty}F_{m,q+\frac{k_0}{N}}e^{i\frac{q\pi x}{l}}, \tag{7.5.22}$$

从(7.5.17)式得出

$$R_{m,k}=2Nl\tau_{m,\frac{k_0}{N}}e^{i\frac{2kk_0\pi}{N}}. \tag{7.5.23}$$

以上结果是在 $\tau_{m,\frac{k}{N}}$不全等于零的情况下得到的。倘若 $\tau_{m,\frac{k}{N}}$ 对于每个 k 都等于零，则应采用极限法得出相应的结果。从(7.5.22)式看出，假使 $\tau_{m,\frac{k_0}{N}}\to 0$ 而 w 并不趋于零的话，则对某些 q 值而言， $\tau_{m,\frac{k_0}{N}}F_{m,q+\frac{k_0}{N}}$必须趋近于一些不等于零的有限值。因此，对这些 q 而言，$F_{m,q+\frac{k_0}{N}}\to\infty$，从 $F_{m,q+\frac{k_0}{N}}$的定义，即由式(7.5.16)，我们知道同时只能有两个这样的 q 值，令其为 q_1 和 q_2，于是我们有

$$\frac{1}{F_{m,q_1+\frac{k_0}{N}}}=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left[\frac{\pi^2}{l^2}\left(q_1+\frac{k_0}{N}\right)^2+\frac{m^2}{R^2}\right]^2+\frac{\frac{Eh}{R^2}\frac{\pi^4}{l^4}\left(q_1+\frac{k_0}{N}\right)^4}{\left[\frac{\pi^2}{l^2}\left(q_1+\frac{k_0}{N}\right)^2+\frac{m^2}{R^2}\right]^2}+$$

$$+\frac{m^2\sigma_0h}{R^2}-\rho h(\omega^2+\beta_{m,q_1+k_0/N})=0,$$

$$\frac{1}{F_{m,q_2+k_0/N}}=0\,. \tag{7.5.24}$$

用这两个式子可以同时计算出 ω 和 V。这说明当 V 等于某些特殊数值时，对于某些振动形式，支撑与管子之间没有作用力。

附带需要指出，q_1 和 q_2 可以是任意整数。但只有当所给出的 V 为实 数时，结果才具有物理意义。同时，为了满足式(7.5.24)，q_1 和 q_2 还存在如下的关系：

$$q_1=-q_2-2k/N. \tag{7.5.25}$$

由于 q_1 和 q_2 应为 整数，而 $0\leqslant k/N\leqslant\frac{1}{2}$，故我们有

$$k/N=0 \text{ 或 } k/N=1/2.$$

这一点和我们在 第四节中 所指出 的当 $k/N=0$ 或$\frac{1}{2}$时，振动节点通过加劲圆环的物理意义完全相同。

若取 $\gamma=0$，便得到空管自由振动的频率公式为

$$\Omega^2=\Omega^2_{m,q\lambda},\ (k/N=0) \tag{7.5.26}$$

$$\Omega^2=\Omega^2_{m,(q+\frac{1}{2})\lambda},\ (k/N=1/2) \tag{7.5.27}$$

式中

$$\Omega^2=\frac{12(1-\nu^2)\rho\omega^2R^4}{Eh^2},$$

$$\Omega^2_{m,(q+k/N)\lambda}=\left[\lambda^2\left(q+\frac{h}{N}\right)^2+m^2\right]^2+12(1-\nu^2)\frac{R^2}{h^2}\frac{\lambda^4(q+k/N)^4}{[\lambda^2(q+k/N)^2+m^2]^2}+$$

$$+12(1-\nu^2)\frac{\sigma_0R^2m^2}{Eh},$$

$$\lambda=\frac{\pi R}{l}.$$

以上是 $R_k\equiv 0$ 的特殊解。相应的振型为

$$W=A\sin m\theta\sin\frac{q\pi x}{l},\qquad \left(\frac{k}{N}=0\right) \tag{7.5.28}$$

$$W=A\sin m\theta\sin\frac{(2q+1)\pi x}{2l},\qquad \left(\frac{k}{N}=\frac{1}{2}\right) \tag{7.5.29}$$

空管振动的一般解为

$$W=A\sin m\theta e^{i\frac{k\pi x}{Nl}}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\frac{q\pi x}{l}}}{\Omega^2_{m,(q+k/N)\lambda}-\Omega^2}. \tag{7.5.30}$$

Ω^2 是下列频率方程的根：

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\Omega^2_{m,(q+\frac{k}{N})\lambda}-\Omega^2}=0. \tag{7.5.31}$$

式(7.5.31)的推导过程过程同第三节的式(7.3.27)，读者还可以直接参见文献[11]。

参 考 文 献

[1] П. А. Гладких, С. А. Хачатурян, Вибрации В Трубопроводах и Методы их устранения, Машгиз. Москва, 1959.

[2] 党锡淇、陈守五、麦永源，孔板消减气流脉动的机理计算与试验研究，西安交通大学学报，1979 年，第三期。

[3] G. W. Housner, Bending Vibration of a pipe line containing flowing fluid, Joural of Applied Machanics, ASME vol. 19, No. 2, 1952.

[4] R. H. Long, Jr., Experimental and theoretical study of transverse vibration of a tube containing flowing fluid, Journal of Applied Mechanics., Trans. ASME, 22 (1955).

[5] H. Ashley, G. Haviland, Bending vibration of a pipe line containing flowing fluid, Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, 72, 1950, 229—232.

[6] В. И. Феодосьев, О колебаниях и устойчивости труды при притекачии через нее жидкости, Инженерный сборник, Том X, 1951.

[7] 郑哲敏，平板在流体作用下的振动，力学学报，第 2 卷，第 1 期，1958 年 1 月。

[8] H. H. Blich and F. Dimaggis, A strain energy expreision for thin cylindrical shells. J. Appl. Mech., Tran. ASME vol. 20, No. 3, 1953.

[9] W. A. Nash, Buckling of multiple-bay ringrenforced cylindrical shells subject to hydrostatic pressure, J. Appl. Mech. Tran. ASME vol. 22, No. 4, 1953.

[10] S. Timoshenko, Vibration problems in engineering, 1955.

[11] 郑哲敏，输入管道的振动，力学学报，2 卷 3 期，1958 年。

[12] Ю. Козомин свободные колебание многопролетнное Балок на упругие опурах, Стру. Меха, расн. соору., 1960, 4.

[13] L. S. D. Mooley, An Improvement of Donnells Approximation for Thin-Walled Circular Cylinders, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, vol. Ⅻ, part I, 1959.

第八章　泄水闸的抗震分析

第一节　概　　述

泄水闸是水工建筑中重要的工程项目之一，它们在构造上有的是属于自成体系的结构物，有的是属于修建在混凝土主坝上的附属结构物。

应当指出，在以往的研究工作中，人们对于坝体本身振动特性的研究很多，而对于闸墩这类结构则重视不够或很少注意，以致形成坝体的抗震分析已逐渐从不符实际的静力计算过渡到更为合理的动力分析，而对于闸墩结构，则由于缺乏足够的科学依据，仍沿袭传统的设计经验。然而，随着我国"四化"建设事业的蓬勃开展，中、小型水利工程的大量兴建，必将会有大量工程采用泄水闸型式的结构。不仅如此，大型水利枢纽，事实上有的也采用了泄水闸型式的结构。例如长江葛洲坝水利枢纽即为一例。基于上述原因，对闸墩结构的振动问题，作必要的深入研究是有实际意义的。在这一章中主要将介绍近几年我们对这一问题所获得的一些研究成果。

闸墩结构一般多为简支的多跨梁式体系，偶尔也采用连续梁体系，具有相同的结构单元。其上部一般均架有门机、启闭机、公路和铁路桥梁等。但是，在以往及现今的水工抗震设计规范中，对于上部结构均作为集中质量考虑[1,2]。而对于这种图式的合理性如何，没有作充分的讨论。为此，我们曾结合我国的一些重要工程中的闸墩结构进行了较为深入的理论分析和模型试验研究。

这一章主要介绍用有限元法的动水压力和地震反应计算，择要介绍模型试验的若干结果。在研究中，我们曾作了下列假定：

一、对于闸墩，其纵向刚度（顺河向）远大于横向（顺坝轴向）刚度。当地震来自顺坝轴向时，将是闸墩结构的最不利荷载情况。即重点应考虑其横向抗震性能。

二、鉴于混凝土坝坝体顺坝轴向的刚度很大，所以对建于坝顶上的闸墩，也直接把地面加速度作为墩底处的输入加速度。同时，不考虑地震波的相位差影响。

三、在一般情况下，闸墩结构为一多跨体系。由于不考虑相位差的影响，故可以从中切取一跨的结构单元进行分析，但在切取处应附以位移和应力的约束条件。同时，由于仅考虑闸墩的横向振动状态，因而可进一步归结为求解平面应变问题。

四、上部结构的影响应在分析中加以考虑。主要应根据端部支承条件，在单元的边界处理上加以反映。

五、为了节省计算机的存储单元和提高运算速度，可以利用在地震作用下结构及荷载的对称性关系进行简化处理。

第二节　动水压力计算

泄水闸结构一般两侧临水，且除了本身振动时会使墩身产生动水压力外，由于左、右邻接

墩体的振动也会引起另一墩的动水压力。所以在计算时必须考虑到这种影响。我们假定在流体为不可压缩和无疑的理想液体，并略去表面波的影响。这样，动水压力将由二维拉普拉斯方程和相应的边界条件描述。对于多跨结构，其计算图式如图 8.21 所示。动水压力 p 应满足的方程为：

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=0, \tag{8.2.1}$$

边界条件为：

① 在运动边界面上有

$$\frac{\partial p}{\partial n}=-\frac{\gamma_0}{g}\ddot{u}_n,$$

② 在自由水面上

$$p=0,$$

③ 在底部（$y=0$） $\qquad \frac{\partial p}{\partial y}=0.$

计算中曾就两种不同的$\frac{\partial p}{\partial n}$分布情况，即按平均分布和按直线变化规律分布的情况进行了比较，计算结果没有太多的差别。我们曾用 DJS-6 机的 ALGOL 语言，编制了三角形和矩形两种单元形式的动力水压力计算程序，计算出当结构物临水面各节点依次给予单位加速度 $\ddot{u}_n=1$ 时的影响矩阵 $[M_0]$。然后，再把它组合到结构的运动微分方程中，求解结构的地震反应。

我们将水域划分为矩形单元和三角形单元两种情况。对于这两种单元的单元"刚度"阵的详细推导，请见第五章。这里仅对边界面上的附加项作些说明。对于所有的内节点，式（5.4.84）的右端为零，对于结构底部（$y=0$）各节点，由于$\frac{\partial p}{\partial y}=0$，所以附加项也为等，而对于运动边界上的各节点，依如下两种情形，分别为：

一、假定$\frac{\partial p}{\partial n}$在节点 j, m 间呈线性变化（图 8.2.2），动水压力 p 亦呈线变化，附加项

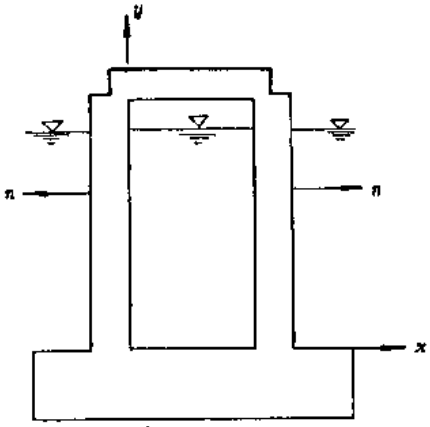


图 8.2.1

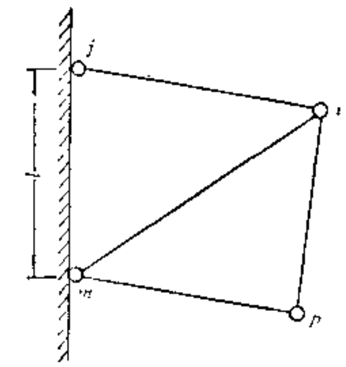


图 8.2.2

为

$$\frac{\partial}{\partial p_j}\int_{\Delta a}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right) p^e ds=\frac{l}{3}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_j+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_m\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial p_m}\int_{\Delta a}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right) p^e ds=\frac{l}{3}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_m+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_j\right].$$

二、假定$\frac{\partial p}{\partial n}$在节点 j，m 间为常数，动水压力 p 呈线性变化，则附加项为

$$\frac{\partial}{\partial p_j}\int_{\Delta a}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right) p^e ds=\frac{l}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_j,$$

$$\frac{\partial}{\partial p_m}\int_{\Delta a}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right) p^e ds=\frac{l}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_m.$$

式中 n 是边界的外法线方向，以指向水库外部为正。根据问题的线性性质，在求地震动水压力时，我们亦采用振型分解法（详见第五章第四节），即

$$p=p_0+\sum_{j=1}^{n}p_j.$$

式中 p_0 是闸墩作刚体运动时的动水压力，p_j 是第 j 阶振型的动水压力。如果已经知道闸墩表面某个振型加速度分布，则很容易求出 p_j。这里，我们采用整体模型试验法，直接求出振型加速度，然后再通过数值计算求出 p_j。求刚性动水压力 p_0 时，边界条件①中的 $\ddot{u}_n=\ddot{u}_0$ 即为地基的水平加速度（仅适用于竖直面）。

如果已知地震时结构表面的加速度时程反应，则也可相应地求出动水压力的时程反应。

借助于变分原理，问题的求解将归结为求解式（5.4.84）。

第三节　对称性的利用

在结构的静力或动力分析中，对结构计算模型的合理选取是一个极为重要的问题。它往往要遵循以下两个原则：1. 所选取的计算模型要能真实地代表实际结构的工作情况；2. 所选择的计算模型不仅在计算上能够实现，而且它应是合理的。所谓合理，这里指的是计算时所需求解方程数或矩阵的阶数应当最低。根据以上原则，我们有必要对结构和荷载的特点进行深入的考察，以期能得到合理的计算模型。

在结构的静力和动力分析中，例如在杆系，特别是在刚架结构的动力分析中，人们早就知道利用结构物及荷载的对称性原理来简化计算[3]。但是，对于象地震这样的复杂荷载，特别是业经离散化后的平面或空间结构是否仍然可以利用上述关系呢？通过我们对实际结构的自振特性和地震反应的计算表明，同样是可行的*。我们曾证明如果在对称结构抗震计算中，仅考虑单分向（水平或垂直）的地震作用，那么单独的水平地震荷载，就可以作为瞬态的反对称荷载，垂直地震荷载可以作为瞬态的对称荷载。因此，无论是对于自振特性或者是地震反应的计算均可以得到简化。这里所指的简化，是对结构本身进行的，即舍弃部分结构，而代之以某些附加的位移或者力的约束条件，这种简化与所使用的计算方法无关，因此，它对不同的计算方法都是适用的。

闸墩结构大多为对称的平面结构，各跨的几何形态基本相同。因此，正可以利用上述特点简化计算。设有如图 8.3.1 所示的闸墩结构，A-B 为其对称轴。在计算时只要在 A-B 轴上

---

* 居荣初、陈冬生、曾心传，地震作用下对称结构计算模型的简化，国家地震局地震研究所研究报告，1978 年 8 月。

给予一定的约束条件，就可以只计算一半结构，但仍能获得全部的振动参数。

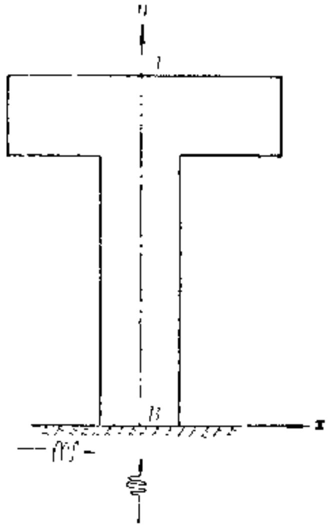


图 8.3.1

下面我们以平面应变为例来推导其相应的约束条件。

设 u，v 分别代表 x 方向和 y 方向的位移，则有

一、对称振型

$$
\left.\begin{aligned}
u(x,y)&=-u(-x,y),\\
v(x,y)&=v(-x,y).
\end{aligned}\right\}\tag{8.3.1}
$$

二、反对称振型

$$
\left.\begin{aligned}
u(x,y)&=u(-x,y),\\
v(x,y)&=-v(-x,y).
\end{aligned}\right\}\tag{8.3.2}
$$

下面来推导 $x=0$ 轴线（对称轴）上的约束条件。

（一）对于对称轴呈对称性的位移分量，有

$$f_s(x,y)=f_s(-x,y),\tag{8.3.3}$$

对（8.3.3）取导数，必有

$$\frac{\partial}{\partial x}f_s(x,y)=-\frac{\partial}{\partial x}f_s(-x,y),\tag{8.3.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}f_s(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}f_s(-x,y).\tag{8.3.5}$$

而在对称轴线上（$x=0$）必满足

$$\frac{\partial}{\partial x}f_s(0,y)=0.\tag{8.3.6}$$

（二）对于对称轴呈反对称性的位移分量，有

$$f_a(x,y)=f_a(-x,y).\tag{8.3.7}$$

对（8.3.7）取导数，必有

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}f_a(x,y)&=\frac{\partial}{\partial x}f_a(-x,y),\\
\frac{\partial}{\partial y}f_a(x,y)&=-\frac{\partial}{\partial y}f_a(-x,y).
\end{aligned}\right\}\tag{8.3.8}
$$

在对称轴上，显然满足

$$\frac{\partial}{\partial y}f_a(0,y)=0,\quad f_a(0,y)=0.\tag{8.3.9}$$

利用这些关系，我们就能得到在对称轴上相应的边界条件为

（三）正对称振型

此时 $f_a=u,\quad f_s=v.$

所以有

$$
\left.\begin{aligned}
&u(0,y)=0,\\
&\tau_{x,y}(0,y)=\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0
\end{aligned}\right\}\tag{8.3.10}
$$

（四）反对称振型

此时 $f_s=u,\quad f_a=v.$

所以有

$$\left.\begin{aligned}&v(0,y)=0,\\&\sigma_x(0,y)=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left(\frac{\mu}{1-\mu}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0,\\&\sigma_y(0,y)=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\mu}{1-\mu}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0.\end{aligned}\right\}\tag{8.3.11}$$

根据应力分量的定义有

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x\\\sigma_y\\\tau_{xy}\end{matrix}\right\}=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left\{\begin{aligned}&c_1\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x},\\&\frac{\partial v}{\partial y}+c_1\frac{\partial u}{\partial x},\\&c_2\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right).\end{aligned}\right.\tag{8.3.12}$$

式中

$$c_1=\frac{\mu}{1-\mu},\quad c_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1-2\mu}{1-\mu}\right).$$

故对于对称振型，结构上的对应点有如下关系

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\\sigma_y\\\tau_{xy}\end{Bmatrix}_{-x,y}=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\\sigma_y\\-\tau_{xy}\end{Bmatrix}_{-x,y}.\tag{8.3.13}$$

对于反对称振型，结构上的对应点有

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\\sigma_y\\\tau_{xy}\end{Bmatrix}_{x,y}=\begin{Bmatrix}-\sigma_x\\-\sigma_y\\\tau_{xy}\end{Bmatrix}_{-x,y}.\tag{8.3.14}$$

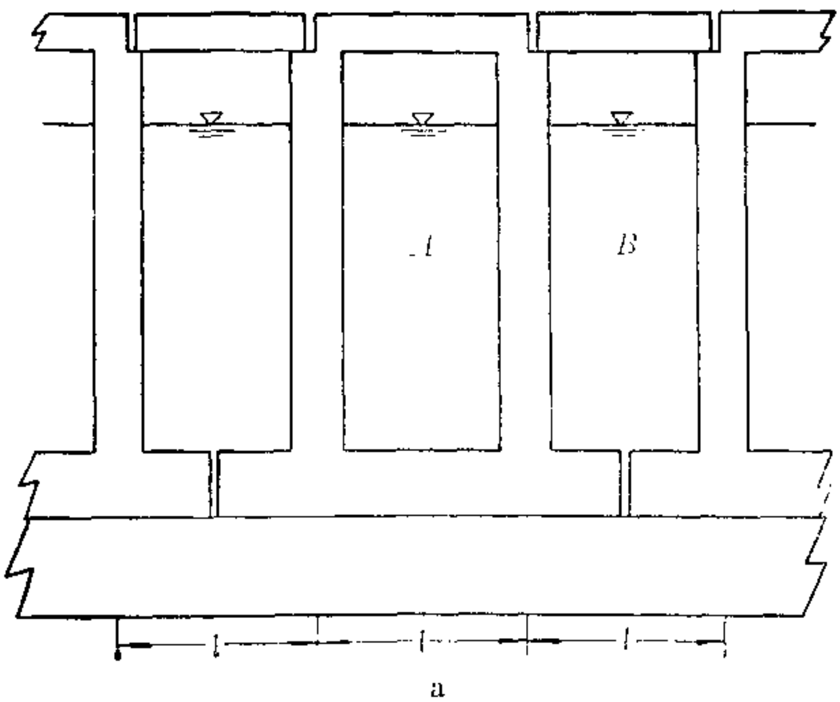


图 8.3.2a

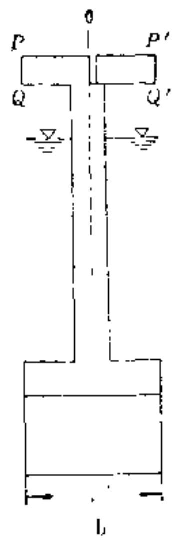


图 8.3.2b

上面，我们对单跨结构如何截取计算模型作了较详细的介绍。下面，转入具有多跨结构的情况，如图 8.3.2 所示。对于这种结构，如果我们不考虑地震波相位差的影响，则根据对称性的原理，只要截取如图 8.3.2 b 所示的结构进行分析（由于所截取的结构单元又可认为是一对称结构，故实际计算时可取半个结构单元），就能得到原结构的全部振动参数。但需施以附加约束条件。

1．求对称振型以及计算垂直地震反应时，在$\overline{PQ}$和$\overline{OO}$轴线上有

$$\left.\begin{array}{l} u=0, \\ \tau_{xy}=0. \end{array}\right\} \tag{8.3.15}$$

2．求反对称振型或计算水平地震反应时，在$\overline{PQ}$和$\overline{OO}$轴线上有

$$\left.\begin{array}{l} v=0, \\ \sigma_x=\sigma_y=0. \end{array}\right\} \tag{8.3.16}$$

对于在计算连续拱桥、板壳结构时的简化处理问题，也同样可以利用上述推理（详情将另文介绍）。

第四节　运动方程及其解

一、运动方程

当求得了动水压力的影响矩阵$[M_0]$以后，我们就可以求出闸墩上各节点在任意加速度之下所产生的动水压力$\{P\}$及节点荷载$\{R_p\}$。设结构临水面共有m个点，则

$$\{P\}_m=\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{Bmatrix}=-[M_0]\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix}=-[M_0]\{a\},$$

式中$\{a\}$代表闸墩临水面各节点的加速度反应。在地震作用下，它应该是地面运动加速度和相对加速度之和。再把分布压力转化为节点荷载

$$\{R_p\}=\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{Bmatrix}=-[A][M_0]\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix}=-[M_p]\{a\},$$

式中$[A]$是将分布压力转化为节点荷载时的分配矩阵。$[M_p]$为附加质量矩阵。

在第五章中我们曾导得了在地震作用下，当考虑库水耦联作用影响后的运动方程为(5.4.106)。

$$([M]+[M_p])\{\ddot{\delta}\}+[C]\{\dot{\delta}\}+[K]\{\delta\}=-([M]+[M_p])[G]\{\ddot{\delta}_g\}. \tag{8.4.1}$$

在这里，我们将介绍对这一方程的具体解法。

二、特征值的解法

若式(8.4.1)的右端项为零，则就成为考虑阻尼影响的自由振动方程。不过，在通常情况下，在求解特征值时，为了运算上的方便，往往忽略阻尼的微小影响。这样，结构无阻尼自由振动方程成为

$$[\hat{M}]\{\ddot{\delta}\}+[K]\{\delta\}=0, \tag{8.4.2}$$

式中

$$[\hat{M}]=[M]+[M_p];\quad（满库情况）$$

$$[\hat{M}]=[M].\quad（空库情况）$$

令 $\delta=\delta_0 e^{i\omega t}$，代入式(8.4.2)则得到

$$(K-\lambda\hat{M})\delta_0=0, \tag{8.4.3}$$

式中 $\lambda=\omega^2$，ω 即为待求的自振频率。

求解式(8.4.3)的方法很多，无法一一列举。这里仅将经过我们几次实践认为是较好的子空间叠代法，作一梗概陈述。

式(8.4.3)是一个广义的特征值问题。一般解法总是先将它化成标准形。若采用广义雅可比法，就无需转换成标准形。特征方程(8.4.3)在理论上将有 $2n$ 个特征值和特征向量(n 为结构的单元节点数)。但是，对于地震作用情况，具有重要意义的将是结构物周期最大的几个频率和振型。因此，求出全部的特征值和特征向量，对解决实际问题是没有意义的。这样，若能将高阶的特征值问题化为低阶的特征值问题，将是十分必要的。而子空间叠代法正是从这一构思而发展起来的。这一方法的主要运算步骤如下[43]：

设需求解 p 个最低特征值和相应的特征向量，它们满足

$$K\Phi=M\Phi\Omega^2 \tag{8.4.4}$$

式中 Φ 存放 p 个特征值，Ω^2 存放相应特征值的对角矩阵。令 X_0 放 q 个起始向量(q 必须大于 p，以保证计算精度)，它们构成起始子空间 E_0。

对于 $k=1, 2, \cdots$，从子空间 E_k 叠代到子空间 E_{k+1}

$$K\overline{X}_{k+1}=MX_k, \tag{8.4.5}$$

求算子 K 和 M 在 E_{k+1} 上的投影

$$K_{k+1}=\overline{X}^T_{k+1}K\overline{X}_{k+1}, \tag{8.4.6}$$

$$M_{k+1}=\overline{X}^T_{k+1}M\overline{X}_{k+1} \tag{8.4.7}$$

求解投影算子特征系统

$$K_{k+1}Q_{k+1}=M_{k+1}Q_{k+1}\Omega^2_{k+1} \tag{8.4.8}$$

式(8.4.8)为已经过降阶后的特征方程。这里，我们采用了广义雅可比法。当然也可采用其它方法。找出新的改进后的特征向量

$$X_{k+1}=\overline{X}_{k+1}Q_{k+1}. \tag{8.4.9}$$

则只要起始子空间不与所求的特征向量之一正交，我们就有

$$\Omega^2{}_{k+1}\to\Omega^2,\ X_{k+1}\to\Phi.\quad (\text{随着 } k\to\infty)$$

当自振频率和振型求得之后，我们就能很容易地求出振型参与系数、振型应力、振型加速度等其它物理量。从而可根据振型叠加原理求得结构在地震作用下的实时反应。如果根据标准反应谱原理，则很容易求出结构物地震反应的幅值。

三、地震反应的逐步积分法

求解运动方程(8.4.1)，除了常用的振型分解法外，也可以采用逐步积分方法。前一种方法的优点，在于求解地震反应时仅需求解和所取振型数相同的独立微分方程。其缺点在于要先求出结构物的自振特性，因此要求解相应的特征方程。这个方法对于高振型影响小而频谱稀疏的结构物是适宜的。因只要取少量振型进行叠加就能逼近于真实解。后一种方法的优点，在于无需求解特征值。但其缺点在于每求解一步都要解和自由度数目相同的线性联立代数方程组。下面仅对线性加速度逐步积分法作一介绍。

假定弹性体系每一点的加速度在 $\tau=2\Delta t$ 时间间隔内呈线性变化，则直接对加速度在 $(t-\Delta t,\ t+\Delta t)$ 间隔上积分，可得 $t+\Delta t$ 时的速度和加速度公式为：

$$\{\ddot{\delta}\}_{t+\Delta t}=\frac{6}{\tau^2}\{\delta\}_{t+\Delta t}-\frac{6}{\tau^2}\{\delta\}_{t-\Delta t}-\frac{6}{\tau}\{\dot{\delta}\}_{t-\Delta t}-2\{\ddot{\delta}\}_{t-\Delta t}, \tag{8.4.10}$$

$$\{\dot{\delta}\}_{t+\Delta t}=\frac{3}{\tau}\{\delta\}_{t+\Delta t}-\frac{3}{\tau}\{\delta\}_{t-\Delta t}-2\{\dot{\delta}\}_{t-\Delta t}-\frac{\tau}{2}\{\ddot{\delta}\}_{t-\Delta t}. \tag{8.4.11}$$

而在 t 时刻的加速度、速度和位移为

$$\{\ddot{\delta}\}_t=\frac{1}{2}(\{\ddot{\delta}\}_{t-\Delta t}+\{\ddot{\delta}\}_{t+\Delta t}), \tag{8.4.12}$$

$$\{\dot{\delta}\}_t=\{\dot{\delta}\}_{t-\Delta t}+\frac{\Delta t}{2}\{\ddot{\delta}\}_{t-\Delta t}+\frac{\Delta t^2}{2}\{\ddot{\delta}\}_t, \tag{8.4.13}$$

$$\{\delta\}_t=\{\delta\}_{t-\Delta t}+\Delta t\{\dot{\delta}\}_{t-\Delta t}+\frac{\Delta t^2}{3}\{\ddot{\delta}\}_{t-\Delta t}+\frac{\Delta t^2}{6}\{\ddot{\delta}\}_t. \tag{8.4.14}$$

将式(8.4.10)和(8.4.11)代入式(8.4.1)，即得一组以$\{\delta\}_{t+\Delta t}$为未知量的线性方程组，解出$\{\delta\}_{t+\Delta t}$后，则立刻可以从式(8.4.12)、(8.4.13)和(8.4.14)求出$\{\ddot{\delta}\}_t$，$\{\dot{\delta}\}_t$和$\{\delta\}_t$。

为便于应用电子计算机运算，将式(8.4.10)、(8.4.11)代入(8.4.1)，经整理归纳后，可得等效方程组

$$[\bar{K}]\{\delta\}_{t+\Delta t}=\{\bar{P}\}_{t+\Delta t}, \tag{8.4.15}$$

等效荷载为

$$\begin{aligned}\{\bar{P}\}_{t+\Delta t}=&-\{[M]+[M_p]\}\{\ddot{\delta}_g\}_{t+\Delta t}+[M](a_1\{\delta\}_{t-\Delta t}+a_2\{\dot{\delta}\}_{t-\Delta t}+\\&+a_3\{\ddot{\delta}\}_{t-\Delta t})+[M_p](a_{11}\{\delta\}_{t-\Delta t}+a_{12}\{\dot{\delta}\}_{t-\Delta t}+\\&+a_{13}\{\ddot{\delta}\}_{t-\Delta t}),\end{aligned} \tag{8.4.16}$$

等效位移为

$$\{\bar{\delta}\}_{t+\Delta t}=\frac{3\beta+\tau}{\tau}\{\delta\}_{t+\Delta t}-\beta\Big(\frac{3}{\tau}\{\delta\}_{t-\Delta t}+2\{\dot{\delta}\}_{t-\Delta t}+\frac{\tau}{2}\{\ddot{\delta}\}_{t-\Delta t}, \tag{8.4.17}$$

$$[\bar{K}]=[K]+a_0[M]+a_{14}[M_p],$$

上面所列公式的常数为

$$\tau=2\Delta t,\qquad a_0=\frac{6+3\alpha\tau}{\tau^2+3\beta\tau},\qquad a_1=\frac{6}{\tau^2}+\frac{3}{\tau}(\alpha-\beta a_0),$$

$$a_2=\frac{6}{\tau}+2(\alpha-\beta a_0),\qquad a_3=2+\frac{\tau}{2}(\alpha-\beta a_0),$$

$$a_4=\frac{3}{3\beta\tau+\tau^2},\qquad a_5=\frac{3\beta}{\tau}a_4-\frac{3}{\tau^2},$$

$$a_6=2\beta a_4-\frac{3}{\tau},\qquad a_7=\frac{\beta\tau a_4-1}{2},$$

$$a_8=\frac{\Delta t}{2},\qquad a_9=\frac{\Delta t^2}{3},$$

$$a_{10}=\frac{\Delta t^2}{6},\qquad a_{11}=\frac{6}{\tau^2}-a_{14}\beta\frac{3}{\tau},$$

$$a_{12}=\frac{6}{\tau}-2a_{14}\beta,\qquad a_{13}=2-\frac{\tau}{2}a_{14}\beta,$$

$$a_{14}=\frac{6}{3\beta\tau+\tau^2}.$$

式中 α 和 β 为确定阻尼矩阵的常数，即

$$[C]=\alpha[M]+\beta[K],$$

并可按下式求解：

$$\eta_i=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\omega_i}+\beta\omega_i\right),$$

ω_i和η_i分别为结构第i振型的自振圆频率和阻尼比。

如仅考虑空库情况，则仅需在上列公式中令$[M_p]=[0]$即可。

解方程组(8.4.15)，利用式(8.4.17)、(8.4.10)、(8.4.12)、(8.4.13)、(8.4.14)即得t时刻的加速度、速变和位移

$$\{\ddot{\delta}\}_t=a_4\{\bar{\delta}\}_{t+\Delta t}+a_5\{\delta\}_{t-\Delta t}+a_6\{\dot{\delta}\}_{t-\Delta t}+a_7\{\ddot{\delta}\}_{t-\Delta t}, \tag{8.4.18}$$

$$\{\dot{\delta}\}_t=\{\dot{\delta}\}_{t-\Delta t}+a_8(\{\ddot{\delta}\}_{t-\Delta t}+\{\ddot{\delta}\}_t), \tag{8.4.19}$$

$$\{\delta\}_t=\{\delta\}_{t-\Delta t}+\Delta t\{\dot{\delta}\}_{t-\Delta t}+a_9\{\ddot{\delta}\}_{t-\Delta t}+a_{10}\{\ddot{\delta}\}_t. \tag{8.4.20}$$

求出t时刻的位移，就可以计算t时刻各节点的应变和应力。再以t时刻的位移、速度和加速度为初始量，重复上述过程，即可求得下一时刻的所需量。

第五节 算　　例

一、例一

所计算结构为一设有底板的多跨闸墩(图 8.3.2 a)。在确定计算简图时，充分考虑了结构物的对称性和地震荷载(水平)为瞬态反对称荷载的特点进行了简化处理，如图 8.5.1 所示。

基本数据如下：

结构高度$h=30$米，$l=18$米；混凝土弹性模量$E=3\times10^5$公斤/厘米²，泊桑比$\mu=0.167$；基岩平均弹模取$E_{基}=3.5\times10^4$公斤/厘米²，混凝土容重$\gamma=2.4\times10^3$公升/米³。

边界条件为：

① 在DH上，$u=v\equiv0$；

② 在AB, PD, EF, GH上，$v\equiv0$(结构作反对称振动时，对称轴上的位移恒等于零；

③ 在LN段，结构Ⅱ和Ⅰ仅在LN中点连接；

④ 在IJ, K_m段均作用动水压力；

⑤ 其余边界为自由边。

①中u代表结构的水平弹性位移，v代表垂直弹性位移。

我们曾取一个结构单元，并考虑左右邻跨的影响进行动力分析。所得结果与按图 8.5.1 的简化模型计算结果完全一致。但后者却大大减少了机器的存储单元和节省了计算时间。

首先，我们计算了闸墩两侧的动水压力影响矩阵。然后，对结构输入我国新丰江坝区 1 967 年 7 月 29 日实测地震加速度记录，并将其幅值线性放大至 287 厘米/秒²≈3.30 g.波形图见图 8.5.2。用前面介绍过的逐步积分法，求解方程(8.4.1)，求得结构顶部的地震应力σ_y、绝对加速度反应和位移反应(如图 8.5.3—图 8.5.6 所示)。在图 8.5.6 上给出了空、满库时σ_y沿高程的应力包线。

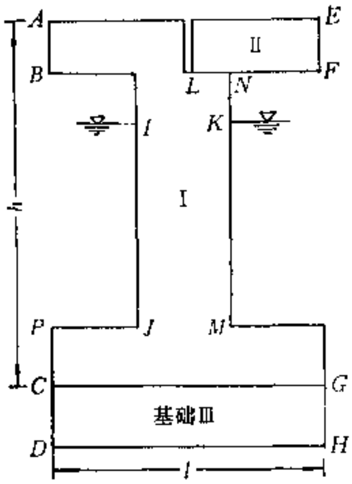


图 8.5.1

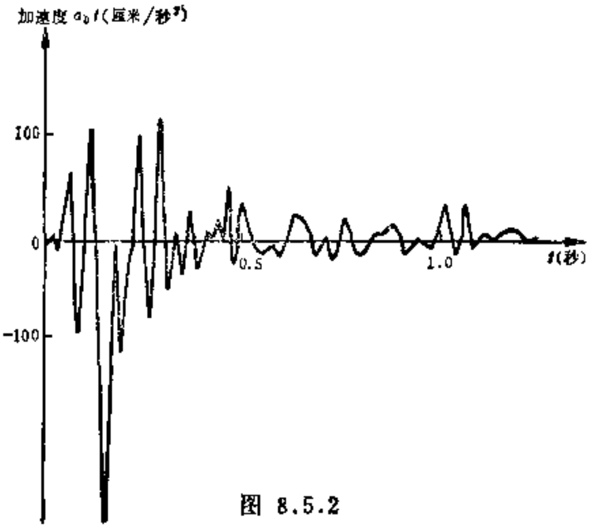


图 8.5.2

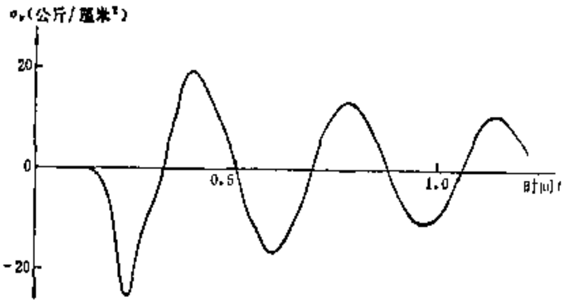


图 8.5.3

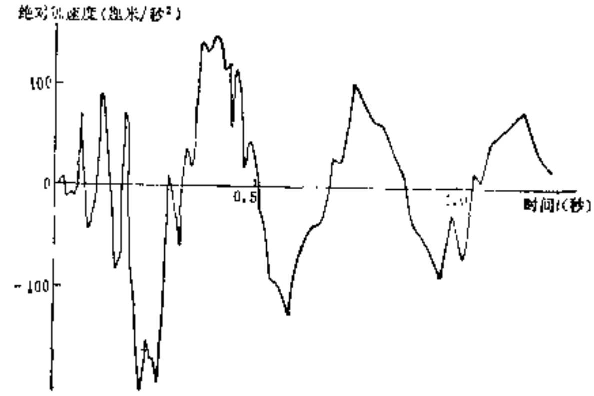


图 8.5.4

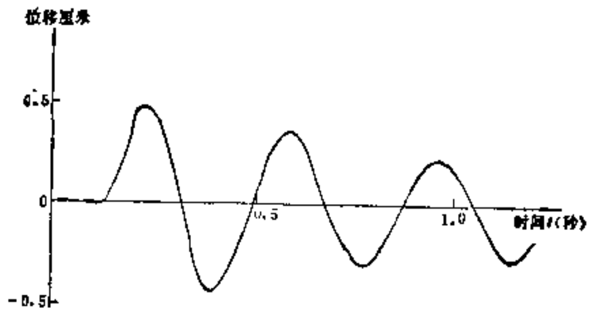


图 8.5.5

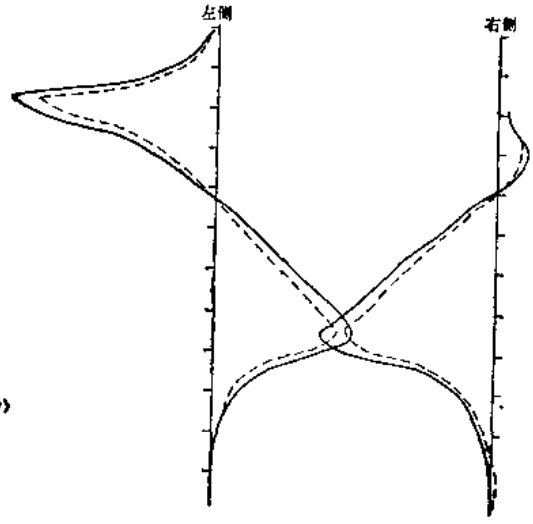


图 8.5.6

胸墙断面空、满库应力 σ_y 沿高程分布

10公斤/厘米² 满库 空库

计算中也考虑了基础弹性的影响，随着所取基础深度的增加应力亦随之增加（见图 8.5.7）；但当基础深度变化率达到$\frac{D}{H}>0.7$（D为所取基础深度，H为闸墩高度）以后，应力增

加很缓慢；当$\frac{D}{H}=1$时应力已不再增加。此时闸墩应力比刚性基础时约增加50%，应力增加和基础深度的依赖关系见图8.5.8。但需要指出，从理论上来说，若取不同的基础深度，则应输入不同的地震波强度。基础愈深，地震波强度也愈低，因此，上面所得到的结果，无疑应是上限值。

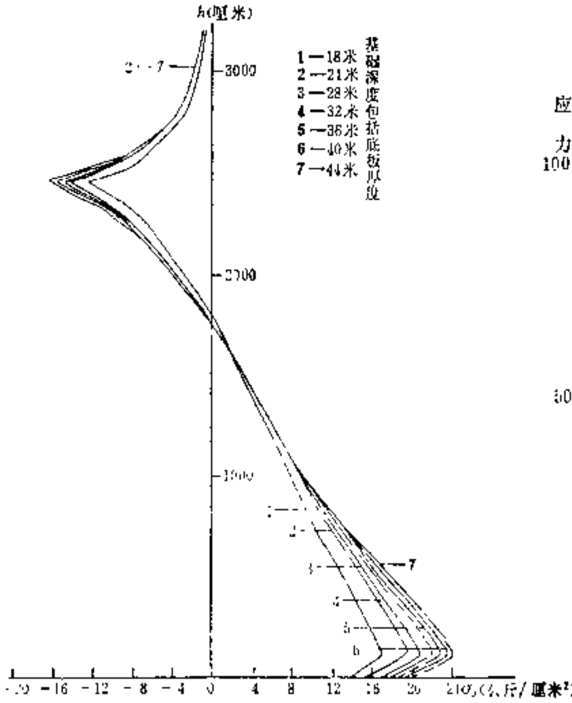


图 8.5.7

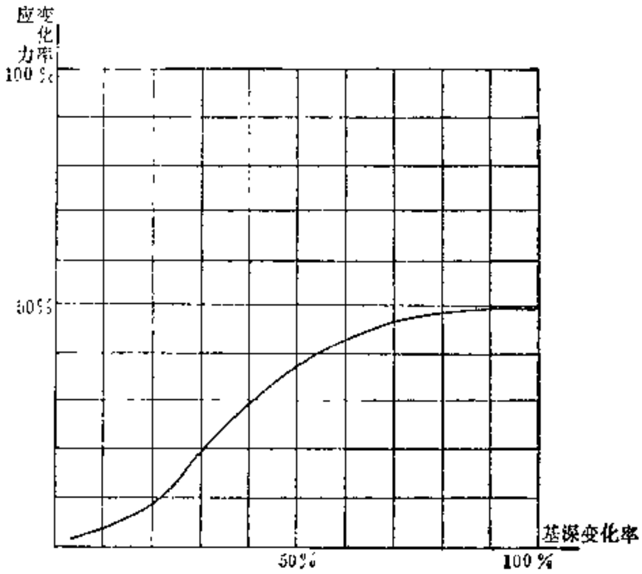


图 8.5.8

二、例二

我们曾就某实际工程闸墩结构进行了自振特性和地震反应的分析*。结构的侧视图如图8.5.9所示。

共选取了五种计算方案

方案(一)考虑上部结构对动力特性的影响，但作为双悬臂结构，即不考虑邻接跨的共同作用。

方案(二)不考虑上部结构的共同作用，亦不考虑上部结构的重量。

方案(三)考虑了上部结构的重量，并考虑了邻接跨的共同作用。

方案(四)、(五)考虑稍许变更闸墩高度的横截面宽度时的影响。

方案(一)至(三)的单元剖分图如图8.5.10所示。很有兴趣的是，方案(三)的节点编号左右两侧是对称的，通过这一技巧就能达到考虑邻跨相互作用的目的。

把闸墩结构作为平面应变问题处理，采用有限元法研究了它的自振特性和地震反应。在自振特性计算中，采用子空间叠代法，求得了这五种方案的前5阶自振频率和振型。在地震反应分析中，对结构物输入了三条地震记录。一条是国家地震局地震研究所设置在丹江坝上

* 居荣初，陈冬生，曾心传，支安邦，丹江坝闸墩结构抗地震性能的有限元分析，国家地震局地震研究所研究报告，1978年8月。

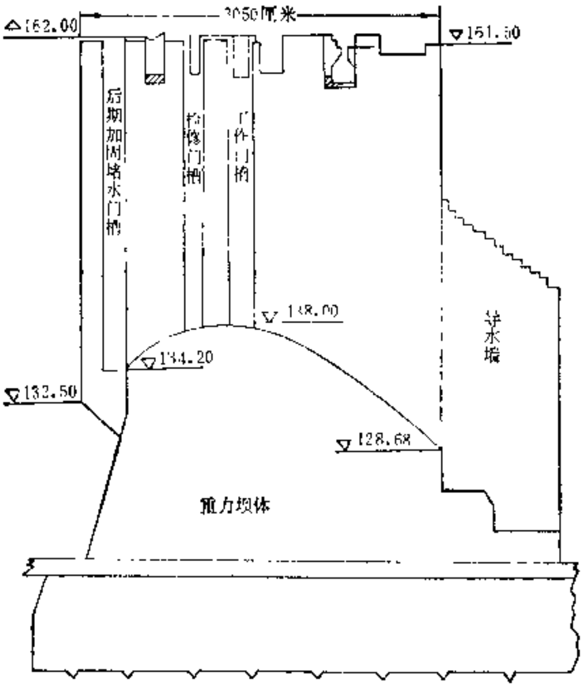

△162.00
3050厘米
▽151.50
后期加固堵水门槽
检修门槽
工作门槽
▽138.00
▽134.20
▽132.50
▽128.68
导水墙
重力坝体

图 8.5.9

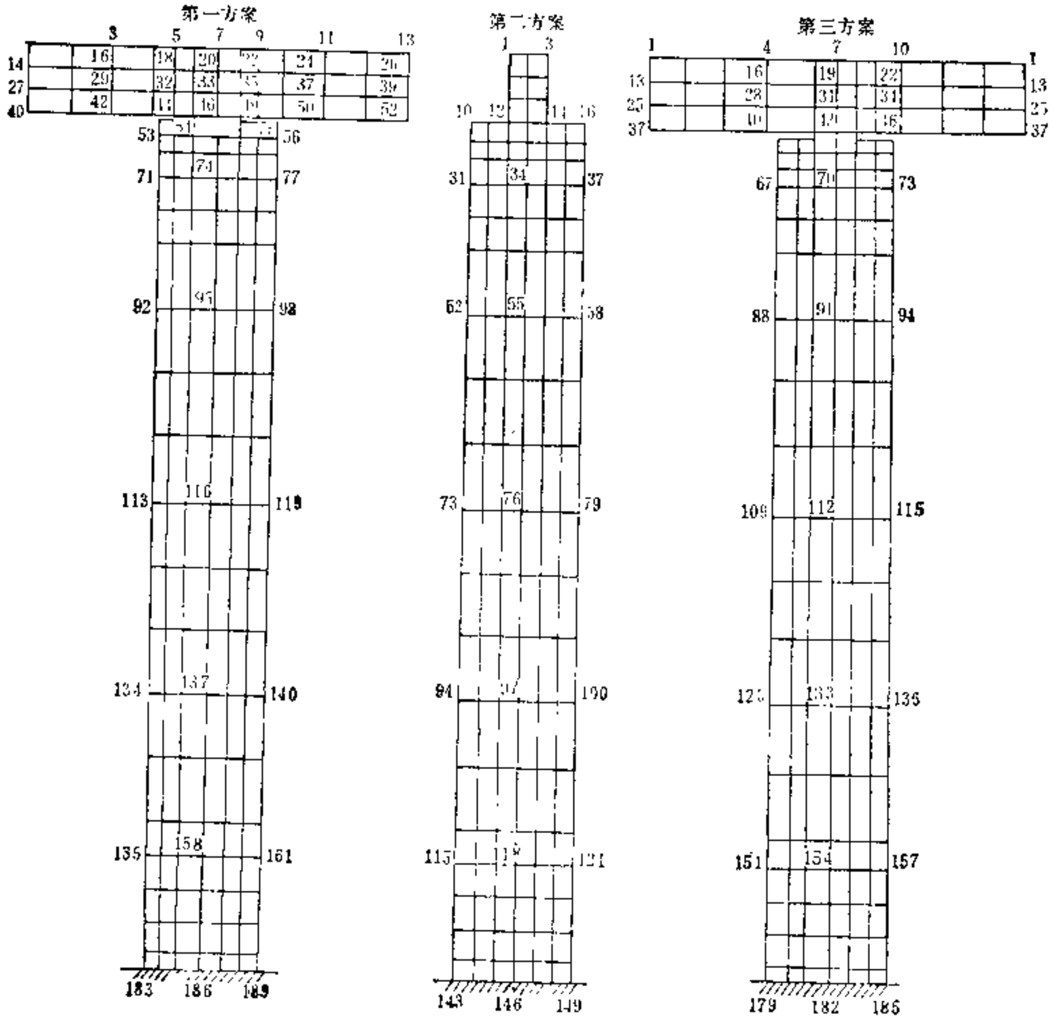

第一方案
第二方案
第三方案

图 8.5.10

的强震仪于 1977 年 8 月 6 日所接收到的地震记录，二条是新丰江坝 1967 年 7 月 29 日的中强震记录，三条是印度柯依那坝 1967 年 12 月 11 日的强震记录。前两条经线性放大至最大加速度为 0.3 g，后一条则线性缩小至 0.3 g。目的在于比较在峰值相同但频谱和持续作用时间不同的情况下，会产生怎样的影响，按振型分解法，求得了结构的实时地震应力。自震特性计算结果见表 8.5.1 。地震应力 σ_y 沿高程的分布图，以及不同方案之间的差异见图 8.5.11。在丹江坝实测地震加速度作用下，闸墩顶部的绝对加速度和应力 σ_y 的时程反应见图 8.5.12。

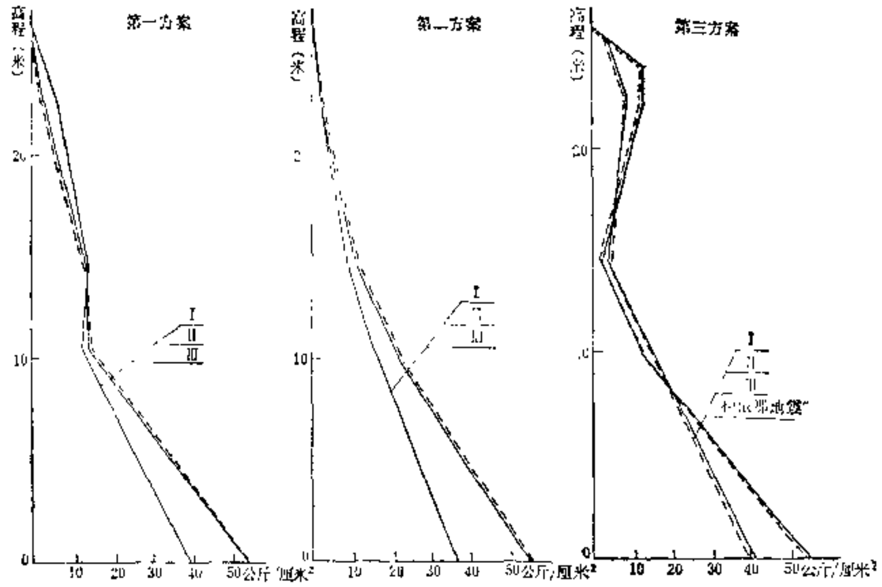


图 8.5.11

注：Ⅰ、Ⅱ表示求得节点荷载后，再用联立解法求节点应力Ⅲ表示直接按振型应力叠加的节点应力。

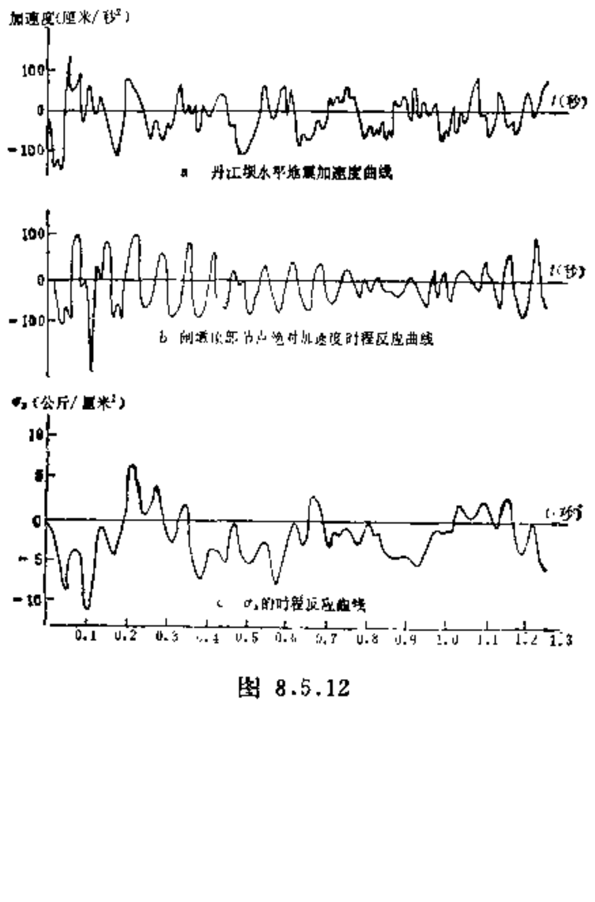


图 8.5.12

表 8.5.1　　方案(一)—(五)自振特性计算结果

计算方案编号	参数	振型序号				
		1	2	3	4	5
一	ω(周/秒)	1.9319	10.5340	18.5220	22.599	41.5470
	T(秒)	0.5176	0.0949	0.0539	0.0424	0.0241
二	ω(周/秒)	2.7593	16.2340	32.3970	41.468	71.6710
	T(秒)	0.3624	0.0616	0.0309	0.0241	0.0140
三	ω(周/秒)	2.6160	15.4130	25.0140	39.3460	56.4810
	T(秒)	0.3822	0.0648	0.0399	0.0254	0.0177
四	ω(周/秒)	2.2505	12.3580	21.044	34.040	57.343
	T(秒)	0.4443	0.0748	0.0416	0.0293	0.0174
五	ω(周/秒)	3.4984	21.075	28.262	52.777	60.835
	T(秒)	0.2858	0.0474	0.0354	0.0189	0.0164

第六节　模　型　试　验

对算例一曾进行了动力模型试验。模型按弹性相似率设计，模型比为 1/120 。模型材料为加重硫化橡胶。模型由中间为固结跨、左右为简支跨的三孔四墩组成的整体式模型。为研究结构—基础—库水的耦联振动，所取模拟水库长度为水深的 1.4 倍。基础深度及向上、下游延伸均取$\frac{1}{2}$墩高。模型总重为 200 余公斤，加上水箱及水体总计重约 500 公斤。图 8.6.1 为模型在振动台上进行试验的情况。



图 8.6.1

试验共分两种情况：

一、输入正弦波，利用共振法量空库和满库时闸墩的自振频率和振型。测量空、满库情况下的振型应力。

二、输入实际的新丰江地震波直接测量空、满库情况下的加速度、应力等反应。

此外，还通过反应谱理论，利用下列公式直接计算各点的地震应力、地震荷载和基底剪力。

应力

$$\sigma_i=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(K_c\beta_j\eta_j\sigma_{ij})^2/\omega_j^4}=K_cg\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\eta_j\beta_j\sigma_{ij})^2/\omega_j^4},$$

地震荷载

$$q_i=K_cg\sqrt{\sum_{j=1}^{n}[\eta_j\beta_jX_j(i)M(i)]^2},$$

满库地震荷载

$$q_i = K_c g \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left[\eta_j \beta_j (X_j(i)\ M(i) + \frac{\gamma_0}{g} p_j(i) \Omega) \right]^2}.$$

基底剪力

$$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i\ .$$

式中 K_c 为地震系数；η_j 为第 i 振型的参与系数；σ_{ij} 为第 i 振型第 i 点的振型应力(包括 σ_x σ_y, τ_{xy})；β_j 为 j 振型的动力放大倍数；$X_j(i)$为第 j 振型第 i 点的振型位移；$M(i)$为结构第 i 点的集中质量；$\Omega(i)$为闸墩迎水面第 i 点的分块面积；$p_j(i)$ 为第 j 振型第 i 点的动水压力(由于实测动水压力的困难，故此值系根据实测振型通过电算求得)。

试验所求得的共振曲线和振型曲线如图 8.6.2 和图 8.6.3 所示。

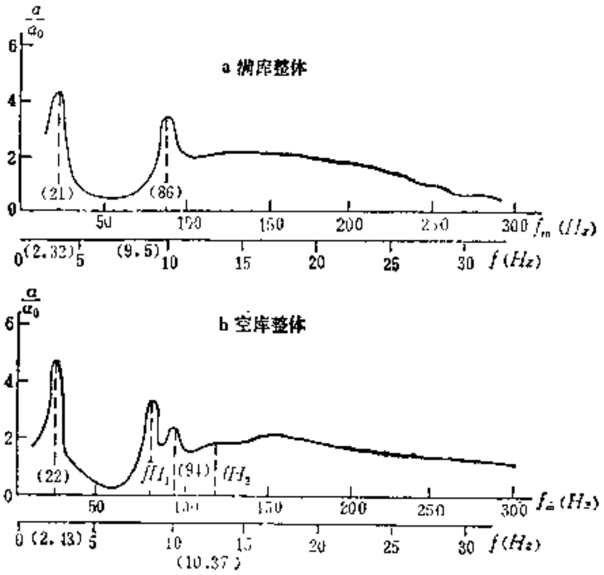


图 8.6.2

试验测得整体模型前两阶自振频率值见表 8.6.1 。华东水利学院曾经对试验结构的单墩情况进行了自振特性的有限元计算*。现将我们的试验结果和计算结果一并列于表 8.6.2 。由表列结果可见，试验和计算结果十分相近。在计算中还考虑了平面应变和平面应力两种情况，对结果影响不大，

表 8.6.1

频率(周/秒)	ω_1	ω_2
空　库	2.43	10.37
满　库	2.32	9.5
满库降低%	12.5%	7.7%

表 8.6.2

频率(周/秒)	ω_1	ω_2
试 验 值**	3.53	10.25
计 算 值	3.72	11.75

* 华东水利学院，330 工程二江泄水闸抗震研究，1967 年 11 月。

** 单墩试验值。

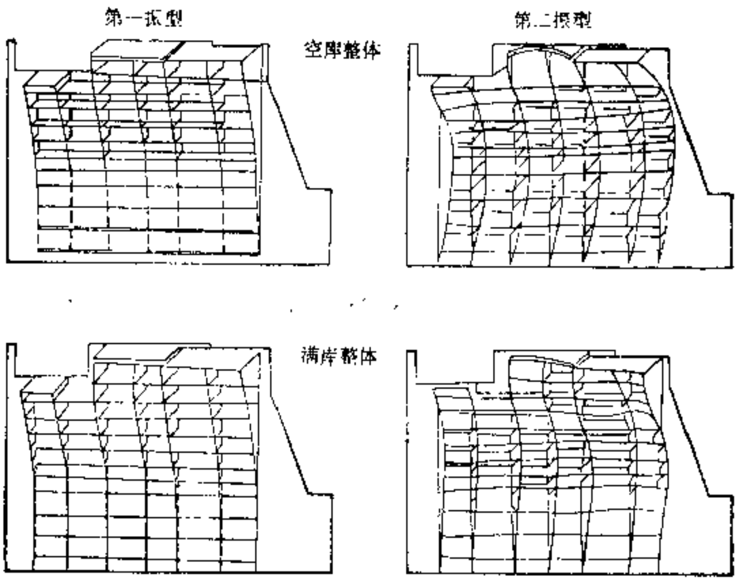


图 8.6.3

试验中还测得了各阶振型应力，经叠加后得到了地震应力。

第七节　对闸墩抗震计算的一些看法

关于闸墩结构的抗震计算，除特别重要的工程外，一般可按现行规定进行验算。但是，通过我们以上的一些工作，认为需要指出以下几点：

一、上部结构的影响，应该在计算中加以考虑，但是，以往均作为附加于墩顶的集中质量考虑，这将使频率显著偏低，不符合实际情况；正确的考虑方法应该是既要顾到上部结构的重量，也要考虑邻接跨的相互作用。

二、上部结构若作为集中质量处理，不仅使刚度矩阵形成畸形分布，造成计算上的不便，而且所求得地震应力的分布情况，将和实际不符，特别是墩体结构的上部区域差别更大。因此，若欲了解结构上部区域的应力分布情况，则必须考虑各跨间的相互作用。

三、按动力分析法，对一般常见的泄水闸，起主要作用的仅限于第一、第二振型。高阶振型影响大多可以忽略不计。

四、闸墩结构仅需考虑水平地震作用，垂直分量的影响是极其微小的。

五、在计算地震应力时，按应力组合比按荷载组合更为合理，而在目前制定的"规定"中仍然沿用荷载组合法。这种组合法是有缺陷的。

六、最大地震应力，常发生在闸墩底部及胸墙连接处。

为避免振动过程中过高的应力集中，建议将这种结构上的突变处做成平滑的弧形，使应力能有一个平顺的过渡区。

七、通过模型试验和计算分析表明，泄水闸满库时的地震应力约比空库增加20%左右。因此，计算中要考虑到动水压力的耦联影响。

八、根据我们多次实际计算比较说明，在计算闸墩的抗震性能时，可以利用对称性原理，以结构中截取一个结构单元进行分析。若这个结构单元又是对称的，则可再取一半进行分析。

这样求得的结果将完全等同于原来的结构，这就大大简化了分析计算工作。

九、一般闸墩结构的动力放大倍数为 2.5 至 3.5 倍左右。

参 考 文 献

[1] 国家地震局南京地震大队编著，挡水建筑物抗震验算，地震出版社，1978 年。

[2] «水工建筑抗震设计规定»编制组，水工建筑物抗震设计规定，1978，北京。

[3] Н. И. Безухов, Динамика сооружений в Примерах и Задачах, Государственное Издательство Строительной Литературы, 1947.

[4] K. J. Bathe and E. L. Wilson, Large eigenvalue problems in dynamic analysis, ASCE, J, Engng Mech. Div., 98 1471—1485 1972.

第九章　随机振动理论在贮液构筑物抗震分析中的应用

以上各章中所讨论的动力分析问题，是以系统遭受预先确定了的随时间变化的动荷载为基础的。这些力可以是周期的或非周期的，这种分析，称为确定性分析。然而，在实践中，随时间变化的力并不总是能预先确定的。这时，分析必须以随机振动理论为基础。以随机理论为基础的结构动力计算，称为概率性分析。概率性分析的任务在于预示结构物在随机荷载作用下出现某种反应的可能机会。

本章中，我们对随机分析在结构——液体耦联振动问题中的应用作一些初步介绍。为了直观起见，我们简化了叙述过程。希望详细了解随机过程理论在振动分析中的应用的读者，可以查找本章末所指出的有关文献。

第一节　线性动力系统对随机荷载的反应

我们来考虑具有 n 个自由度的线性动力系统，其运动微分方程具有如下形式：

$$\left.\begin{aligned}&a_{11}(p)x_1+a_{12}(p)x_2+\cdots+a_{1n}(p)x_n=F_1(t),\\&a_{21}(p)x_1+a_{22}(p)x_2+\cdots+a_{2n}(p)x_n=F_2(t),\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&a_{n1}(p)x_1+a_{n2}(p)x_2+\cdots+a_{nn}(p)x_n=F_n(t),\end{aligned}\right\}\tag{9.1.1}$$

式中　$x_1,\ x_2\cdots,\ x_n$——广义坐标，

$F_1(t),F_2(t),\cdots F_n(t)$——作用力，

$a_{ij}(p)=m_{ij}p^2+b_{ij}p+c_{ij},\ (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，

$m_{ij},\ b_{ij},\ c_{ij}$——描述动力系统之特征的参数，p 是微分运算子：

$$p=\frac{d}{dt}.$$

假定系统具有粘性阻尼。

我们考虑 $F_2(t)=F_3(t)=\cdots=F_n(t)=0$ 时仅一个点运动的情形，消掉 $x_2,\ x_3\cdots,x_n$，从方程(9.1.1)得到一个微分方程

$$a_{2n}\frac{d^{2n}x}{dt^{2n}}+a_{2n-1}\frac{d^{2n-1}x}{dt^{2n-1}}+\cdots+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=b_{2m}\frac{d^{2m}F(t)}{dt^{2m}}+ +b_{2m-1}\frac{d^{2m-1}F(t)}{dt^{2m-1}}+\cdots+b_1\frac{dF(t)}{dt}+b_0F(t).\tag{9.1.2}$$

在推导系统反应之均方值和作用力的功率谱密度间的基本公式以前，我们引入关于线性系统特征的某些性质。

首先，假设系统作用有简谐力

$$F(t)=F_0e^{i\omega t},\tag{9.1.3}$$

这时，系统的反应具有形式

$$x(t)=G(i\omega)F_0e^{i\omega t}. \qquad (9.1.4)$$

将式(9.1.3)、(9.1.4)代入式(9.1.2)，得

$$G(i\omega)=\frac{b_{2m}(i\omega)^{2m}+\cdots+b_1(i\omega)+b_0}{a_{2n}(i\omega)^{2n}+\cdots+a_1(i\omega)+a_0}. \qquad (9.1.5)$$

函数 $G(i\omega)$称为系统的传递函数，且是其频率的特征。

其次，动力系统之另一重要特征是脉冲反应函数 $h(t)$，它表示系统对单位瞬时脉冲的反应．利用杜哈曼积分，系统的反应 $x(t)$可以经过函数 $h(t)$和外作用力 $F(t)$表示为

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}F(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

由于 $\tau>t$ 时，有 $h(t-\tau)=0$，上式又可以写为

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

作变量变换 $\tau'=t-\tau$．从上式得到

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(t-\tau')h(\tau')d\tau'. \qquad (9.1.6)$$

将外力 $F(t)=F_0e^{i\omega t}$ 代入上式，得到

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau')F_0e^{i\omega(t-\tau')}d\tau'=F_0e^{i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau')e^{-i\omega\tau'}d\tau'.$$

将之与方程(9.1.4)比较,给出

$$G(i\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau')e^{-i\omega\tau'}d\tau'. \qquad (9.1.7)$$

由此可见，系统之传递函数是该系统之脉冲反应函数 $h(t)$的富利叶变换．从式(9.1.7)进行富利叶反变换．得到

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(i\omega)e^{i\omega t}d\omega. \qquad (9.1.8)$$

作了以上准备之后，下面，我们来建立系统的作用力及其反应的相关函数 $R_{FF}(\tau)$、$R_{xx}(\tau)$和其功率谱密度 $\Phi_{FF}(\tau)$、$\Phi_{xx}(\omega)$间的联系。

按随机过程 $x(t)$的自相关函数 $R_{xx}(\tau)$的定义：

$$R_{xx}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)x(t+\tau)dt, \qquad (9.1.8')$$

式(9.1.6)代入得

$$R_{xx}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}dt\left[\int_{-\infty}^{\infty}F(t-\varepsilon)h(\varepsilon)d\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}F(t+\tau-\eta)h(\eta)d\eta\right].$$

改变积分次序并计及

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}F(t+\tau-\eta)F(t-\varepsilon)dt=R_{FF}(\tau+\varepsilon-\eta),$$

上式变为

$$R_{xx}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}d\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}h(\eta)h(\varepsilon)R_{FF}(\tau+\varepsilon-\eta)d\eta. \qquad (9.1.9)$$

此公式给出了动力系统作用力和其反应的自相关函数间的关系。

平稳随机函数 $x(t)$的功率谱密度 $\Phi_{xx}(\omega)$和自相关函数 $R_{xx}(\tau)$间存在着如下关系[4]：

$$\Phi_{xx}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{xx}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau. \qquad (9.1.9')$$

将式(9.1.9)代入式(9.1.9′)中，得

$$\begin{aligned}\Phi_{xx}(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}d\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega\tau}h(\eta)h(\varepsilon)R_{FF}(\tau+\varepsilon-\eta)d\eta\\&=\int_{-\infty}^{\infty}h(\eta)e^{i\omega\eta}d\eta\int_{-\infty}^{\infty}h(\varepsilon)e^{i\omega\varepsilon}d\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}R_{FF}(\tau+\varepsilon-\eta)e^{-i\omega(\tau+\varepsilon-\eta)}d\tau.\end{aligned}$$

利用公式(9.1.9′)和(9.1.7)，得到

$$\Phi_{xx}(\omega)=|G(i\omega)|^2\Phi_{FF}(\omega), \qquad (9.1.10)$$

此公式建立了系统的作用力和其反应的功率谱密度间的关系。

又因为随机过程$x(t)$的均方值$\overline{x^2}$可以通过功率谱密度$\Phi_{xx}(\omega)$表示为

$$\overline{x^2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{xx}(\omega)d\omega. \qquad (9.1.9'')$$

将式(9.1.10)中之$\Phi_{xx}(\omega)$代入式(9.1.9″)，即得到系统反应的均方值和作用力的功率谱密度间的如下关系式：

$$\overline{x^2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{FF}(\omega)|G(i\omega)|^2d\omega. \qquad (9.1.11)$$

由此可见，为了寻求系统在平稳随机处荷载作用下的反应的均方值，必须知道系统的传递函数和作用力的谱密度。

在地震反应分析中，常常需要决定反应值$x(t)$超过标准离差$\sqrt{\overline{x^2}}$之k倍的概率，以及在单位时间内超过某一数值ξ的次数。这时，若取$\bar{x}=0$，则可以分别求得为[5]：

$$\left.\begin{aligned}&P\{x\geqslant k\sqrt{\overline{x^2}}\}=\frac{2}{\sqrt{2\pi\overline{x^2}}}\int_{-\infty}^{k\sqrt{\overline{x^2}}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sqrt{\overline{x^2}}}\right)^2}dy,\\&N(x\geqslant\xi)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\sqrt{\overline{x^2}}}\right)^2}\left[\int_0^{\infty}\omega^2G(i\omega)d\omega\Big/\int_0^{\infty}G(i\omega)d\omega\right]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\right\} \qquad (9.1.12)$$

第二节　贮液容器在地震荷载作用下的计算

地震乃是地壳岩体中能量积累达到某种限度，致使岩体中某一局部地方的应力达到或超过该地点的极限强度而破裂所引起的。地震释放出来的能量以波形式向四周扩散。地震波在递过不同性质的岩层时经历了无数次的反射、折射、绕射、弥散和衰减及迭加以后到达地面而引起地面运动。显然，这样的地面运动将是极不规则的。大量地震记录证明，在一般情形下，地震地面运动过程是非平稳随机过程。因此，严格说来，结构在地震力作用下的概率计算方法，均应以非平稳随机过程理论为基础。然而，一方面由于非平稳随机过程理论数学上的复杂性，不易得到结构在地震干扰下的可行计算形式；另一方面，由于按非平稳随机过程考虑必须用足够大量数目的实现来代替一个实现，而要在同一地区取得大量地震记录并不是容易的事。由于这些原因使非平稳随机过程理论的应用变得很困难，以至于在实际计算中往往不得不将它放弃。

从大量强震记录可以看出，它们均有一个共同的特征，即任何一条强震记录曲线均可以分成三段：在记录的开始阶段有较小的振幅和周期（加速度每相邻二零点之间的时间间隔的

二倍）；记录的中段具有最大的振幅和比开始阶段略大的周期。从开始的一段到这一段的过渡是非常明显的；最后一阶段的特点是周期较长，加速度振幅逐步不规则地降低，从中段到这一段的过渡是不太明显的。虽然这三段的频率特征是不同的，但由于第二段常常是危害结构的主要部分，因此仅对此段采取平稳化处理可能不会引入过大的误差。

本节和下节中，我们将叙述贮液容器和构架式贮液容器在地震荷载作用下的计算[5]。在这里，为了简单起见，我们仍然采用定函数来近似描述地震加速度[6]，当然，这样一来势必造成所得到的解在实用上的局限性。但是，由于地震运动和液动压力的计算均相当复杂，不这样处理将会给数学计算带来莫大的困难。由于随机过程理论在液动压力计算中的应用还不广泛，著者期望通过这里所作的引论性介绍，引起对此领域感兴趣的读者的注意，进而去深入研讨。

现在，我们来讨论贮液容器在地震地面运动时贮液在容器侧壁上所产生的液动压力。此时，容器在水平面上作随机前后运动和在垂直平面中作随机旋转运动。为了简单起见，我们假定容器是刚性的。

此问题可以分别求解：首先考虑前后水平移动，然后考虑旋转运动。我们假定前后水平移动的加速度和旋转运动的角加速度均服从高斯（Gauss）正态分布。这时，由于系统是线性的，其反应同样遵守高斯正态分布定律。因此，一俟求出系统反应的均方值，就可以按照公式(9.1.12)算出大于标准离差 R 倍之概率。

在上节中证明了，系统反应之均方值用积分公式(9.1.11)决定。对于无阻尼系统，积分式(9.1.11)是不收敛的。这可以用单自由系统的运动证明如下。

对于单自由度系统，运动方程为

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F(t).$$

令 $F(t)=e^{i\omega_f t}$，代入上方程，可得传递函数为

$$G(i\omega_f)=\frac{1}{m\left(\omega^2-\omega_f^2+i\omega_f\frac{c}{m}\right)},$$

式中，$\omega=\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$是系统的固有频率，$c$ 是其阻尼系数。现在，若令作用于系统之随机激发力为 $F(t)=F_0\sin\omega_f t$。则由式(9.1.8′)，可得激发力的自相关函数为

$$\begin{aligned}R_{FF}(\tau)&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}F_0^2\sin\omega_f t\sin\omega_f(t+\tau)dt\\&=\frac{F_0^2}{2}\cos\omega_f\tau.\end{aligned}$$

将 $R_{FF}(\tau)$代入式(9.1.9′)，算得激发力之功率谱密度为

$$\begin{aligned}\Phi_{FF}(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_0^2}{2}\cos\omega_f\tau e^{-i\omega\tau}d\tau\\&=\frac{\pi}{2}F_0^2[\delta(\omega-\omega_f)+\delta(\omega+\omega_f)],\end{aligned}$$

但由于$\omega,\omega_f>0$，故

$$\delta(\omega+\omega_f)\equiv0,$$

从而有 $\Phi_{FF}(\omega)=\frac{\pi}{2}F_0^2\delta(\omega-\omega_f)$，这里$\delta(\omega)$是频率域中的狄拉克函数。从而，由式(9.1.11)得到系统反应之均方值为

$$\overline{x}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{FF}(\omega)|G_1(i\omega)|^2 d\omega_f$$
$$= \frac{F_0^2}{4m^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(\omega-\omega_f)d\omega_f}{(\omega^2-\omega_f^2)^2+\left(\frac{\omega c}{m}\right)^2}$$

利用 δ-函数的如下性质：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_f)g(\omega_f)d\omega_f = g(\omega),$$

上面等式积出为

$$\overline{x}^2 = \frac{F_0^2}{4\omega^2c^2}.$$

这就证明了，当阻尼系数 c 等于零时，反应之均方值的积分是不收敛的。这在数学上表明此时决定反应之均方值的问题是不定的，而在力学上，则可解释为不满足系统运动稳定性条件。因此，在求解所述的问题时，我们必须计及液体内的阻尼力。

一、我们首先考虑贮液容器的前后运动。这时，作用于容器壁上之液动压力由公式(3.1.25)和(3.1.102)决定：

$$p = -B\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ddot{q}_n(t)}{\ddot{x}_0(t)}B_n\right]\ddot{x}_0(t). \tag{9.2.1}$$

系数 B 和 B_n 对于圆柱形容器和矩形容器按如下公式取值：

对于圆柱形容器

$$B = \rho a\sin\theta,\quad B_n = \frac{d_n\cosh\left(\sigma_n\frac{z+h}{a}\right)}{\cosh(\sigma_n h_0)}, \tag{9.2.2}$$

其中，σ_n 为方程(3.1.10)之根，而

$$h_0 = \frac{h}{a},\qquad d_n = \frac{2}{\sigma_n^2-1};$$

对于矩形容器

$$B = \frac{a\rho}{2},\quad B_n = \frac{8\cosh\frac{n\pi(z+h)}{a}}{\pi^2n^2\cosh(n\pi h_0)}, \tag{9.2.3}$$

$\ddot{q}_n(t)$ 则按如下公式给出：

$$\ddot{q}_n(t)+\nu\dot{q}_n(t)+\tilde{\omega}_n^2 q_n(t) = -\ddot{x}_0(t), \tag{9.2.4}$$

式中 ν 为液体之粘性阻尼系数，$\tilde{\omega}_n^2$ 具有如下值：

对于圆柱形容器

$$\tilde{\omega}_n^2 = \frac{g}{a}\sigma_n\tanh(\sigma_n h_0);$$

对于矩形容器

$$\tilde{\omega}_n^2 = \frac{n\pi g}{a}\tanh(n\pi h_0).$$

为了决定液体在容器壁上之液动压力的均方值，必须知道系统的传递函数，它相应于周期性地面运动作用下液体稳态运动之解。

设 $$\ddot{x}_0(t) = e^{i\omega t},\quad p = G_p(i\omega)e^{i\omega t},$$

将 $x_0(t)$ 代入式(9.2.4)，得

$$\frac{\ddot{q}_n(t)}{\ddot{x}_0(t)}=\frac{\omega^2}{\widetilde{\omega}_n^2-\omega^2+i\nu\omega}.$$

将上式和 p 的表示式代入式(9.2.1)，即得到传递函数

$$G_p(i\omega)=-B\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n\omega^2}{\widetilde{\omega}_1^n-\omega^2-i\nu\omega}\right]. \tag{9.2.5}$$

应当注意到，对于矩形容器，级数(9.2.1)和(9.2.5)仅对于奇数项求和。

由于在利用公式(9.1.11)计算液动压力的均方值时，需要传递函数 $G_p(i\omega)$ 的模的平方值。从式(9.2.5)看出，对于级数之大量的项，计算 $G_p(i\omega)$ 的模的平方是困难的；不言而喻，由于这些困难，亦引起在计算积分(9.1.11)时产生困难。

由于这些计算上的困难，迫使我们在计算 $|G_p(i\omega)|^2$ 时仅限于采用级数的第一项。这意味着我们本质上仅采用容器中液体运动的第一振型，其振幅是时间的随机函数，而运动的所有其余振型不予考虑。这样的简化处理有其明显的实用意义，因为在实验工作中（例如文献[7]）观察到，容器在充分宽频率范围内运动的情况下，液体主要以第一振型运动，而第二和继后的振型几乎观测不到。

取级数(9.2.5)的第一项，我们得到

$$|G_p(i\omega)|^2\approx B^2\left|\frac{\widetilde{\omega}_1^2-\omega^2+i\nu\omega+B_1\omega^2}{\widetilde{\omega}_1^2-\omega^2+i\nu\omega}\right|^2$$

$$=B^2\frac{[(\widetilde{\omega}_1^2-\omega^2+B_1\omega^2)^2+(\nu\omega)^2]\omega^2}{(\widetilde{\omega}_1^2-\omega^2)^2+(\nu\omega)^2}. \tag{9.2.6}$$

在前面已经提到过，我们将地面运动加速度采用定函数来描述。按文献[6]，将平移运动地面加速度的相关函数取为如下形式：

$$R(\tau)=B(0)e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau. \tag{9.2.7}$$

这时，由式(9.1.9′)得到加速度的功率谱密度为

$$\left.\begin{aligned}\Phi(\omega)&=2B(0)\alpha\frac{\omega^2+\overline{m}^2}{\omega^4+2\bar{a}\omega^2+\overline{m}^4},\\ \bar{a}&=\alpha^2-\beta^2,\ \overline{m}^2=\alpha^2+\beta^2,\end{aligned}\right\} \tag{9.2.8}$$

这里，$B(0)$是地面加速度之均方值，等于

$$B(0)=\overline{[\ddot{x}_0(t)]^2}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[x(t)]^2dt. \tag{9.2.9}$$

将式(9.2.6)和(9.2.8)代入式(9.1.11)，得

$$\begin{aligned}\overline{p}^2&=2B(0)\alpha B^2\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i(\omega^2+\overline{m}^2)[(\widetilde{\omega}_1^2-\omega^2+B_1\omega^2)^2+(\nu\omega)^2]d\omega}{(\omega^4+2\bar{a}\omega^2+\overline{m}^4)[(\widetilde{\omega}_1^2-\omega^2)^2+(\nu\omega)^2]}\\ &=2B(0)\alpha B^2J,\end{aligned} \tag{9.2.10}$$

式中

$$J=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\omega)d\omega}{H(\omega)H(-\omega)}, \tag{9.2.11}$$

$$\left.\begin{aligned}g(\omega)&=i(\omega^2+\overline{m}^2)[(\widetilde{\omega}_1^2-\omega^2+B_1\omega^2)^2+(\nu\omega)^2],\\ H(\omega)&=(\omega^2-2i\alpha\omega-\overline{m}^2)(\widetilde{\omega}_1^2-\omega^2-i\nu\omega).\end{aligned}\right\} \tag{9.2.12}$$

式(9.2.11)中之积分可以应用留数定理来进行。在这里，我们直接引用文献[8]的结果。首先，将函数$g(\omega)$和 $H(\omega)$表示为 n 次多项式的形式：

$$\left.\begin{aligned}g(\omega)&=b_0\omega^{2n-2}+b_1\omega^{2n-4}+\cdots+b_{n-1},\\H(\omega)&=a_0\omega^n+a_1\omega^{n-1}+\cdots+a_n,\end{aligned}\right\}\tag{9.2.13}$$

将式(9.2.13)和(9.2.12)相比较，得

$$\left.\begin{aligned}&a_0=-1,\ a_1=i(2\alpha-\nu),\ a_2=(\tilde{\omega}_1^2-2\alpha\nu+\bar{m}^2),\\&a_3=i(\nu\bar{m}^2-2\alpha\tilde{\omega}_1^2),\ a_4=-\bar{m}^2\tilde{\omega}_1^2,\\&b_0=i(B_1-1)^2,\ b_1=i[2(b_1B_1-1)\tilde{\omega}_1^2+\nu^2+(B_1-1)^2\bar{m}^2],\\&b_2=i[\tilde{\omega}_1^4+2(B_1-1)\tilde{\omega}_1^2\bar{m}^2+(\nu\bar{m})^2],\\&b_3=i\tilde{\omega}_1^4\bar{m}^2.\end{aligned}\right\}\tag{9.2.14}$$

表示式 $H(\omega)$之根[即式(9.2.11)中被积函数的极点]位于上半平面内，按文献[8]附录中的表II，求得式(9.2.11)之积分值为

$$J=\frac{b_0(-a_1a_4+a_2a_3)-a_0a_3b_1+a_0a_1b_2+\dfrac{a_0b_3}{a_4}(a_0a_3-a_1a_3)}{2a_0(a_0a_3^2+a_1^2a_4-a_1a_2a_3)}.\tag{9.2.15}$$

可以看出，J 具有实数值。

如果假定地震加速度是平稳的，则量$\sqrt{B(0)}$对于给定区域决定着计算加速度 $a^o=\sqrt{B(0)}$，而比值$\dfrac{a^o}{g}=k$ 乃是相应于该区域烈度的系数(它的值可以按第三章的表 3.3.2 进行选取)。于是，由式(9.2.10)得到液动压力的均方值为

$$\bar{p}^2=2\alpha B^2k^2g^2J.\tag{9.2.16}$$

无容置疑，将地震地面运动作为平稳随机过程推导出的决定稳态压力的公式仅可以作为首次近似来应用于计算。至于贮液容器在平稳随机地面运动下之瞬态反应问题，可以按类似方法求解，但数学运算却比上面繁杂许多。

按上面相同方法，可以发现，液动压力之合力 S 的均方值亦由公式(9.2.16)决定，只不过此时其中的系数为：

a）对于圆柱形容器

$$B=\pi\rho a^3h_0,\qquad B_n=\frac{d_n}{\sigma_nh_0}\tanh(\sigma_nh_0);\tag{9.2.17}$$

b）对于矩形容器

$$B=\rho abh,\qquad B_n=\frac{8}{n^3\pi^3h_0}\tanh(n\pi h_0).\tag{9.2.18}$$

二、上面，我们仅考虑了容器的水平前后运动。按照相同的方法，计算绕任何轴的旋转运动亦不会有任何困难。下面，我们着手进行容器同时作前后运动和旋转运动时液动压力之解。这时，将这些运动考虑为时间的平稳随机函数。

考虑容器围绕 y 轴的旋转和沿 x 轴的前后运动(如图 3.1.1 示)。我们认为前后运动加速度之实现 $\ddot{x}_0$ 和旋转运动之角加速度的实现 $\ddot{\beta}$ 是已知的，且其平均值均为零。将此二平稳随机过程之和考虑为一个平稳随机过程

$$z(t)=x(t)+a\beta(t),$$

其中 a 为一具有长度量纲的量。由式(9.1.8′)，过程 $z(t)$之自相关函数为

$$\begin{aligned}R_{zz}(\tau)&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}z(t)z(t+\tau)dt\\&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[x(t)+a\beta(t)][x(t+\tau)+a\beta(t+\tau)]dt\end{aligned}$$

$$=\lim\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[x(t)x(t+\tau)+ax(t)\beta(t+\tau)+a\beta(t)x(t+\tau)+a^2\beta(t)\beta(t+\tau)]dt$$

$$=R_{xx}(\tau)+aR_{x\beta}(\tau)+aR_{\beta x}(\tau)+a^2R_{\beta\beta}(\tau).$$

我们假定平移运动 $x(t)$和旋转运动 $\beta(t)$是相互无关的，若它们的平均值等于零，于是其互相关函数 $R_{x\beta}(\tau)$和 $R_{\beta x}(\tau)$均等于零，从而，其和的自相关函数等于

$$R_{zz}(\tau)=R_{xx}(\tau)+a^2R_{\beta\beta}(\tau).$$

所以，液体由于前后运动和旋转运动所产生的作用于容器壁之合液动压力的均方值，等于由每种运动所产生的合液动压力的均方值之和，即

$$\bar{p}^2=\bar{p}_x^2+\bar{p}_\beta^2.$$

由于 $\bar{p}_x^2$ 在前面已经讨论过了，我们在这里仅对 $\bar{p}_\beta^2$ 进行讨论。

在文献[9]中，导出了圆柱形容器在作旋转运动时理想流体运动问题之解。作用于容器壁之液动压力由下式给出：

$$p=-B\sum_{n=1}^{\infty}(B_n\ddot{f}_n+C_n\ddot{\beta}),\tag{9.2.19}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&B=\rho a^2\sin\theta,\quad B_n=\frac{d_n\cosh\left(\sigma_n\frac{z+h}{a}\right)}{\cosh(\sigma_nh_0)},\\&C_n=d_n\left[\frac{2}{\sigma_n}\frac{\sinh\left(\sigma_n\frac{z}{a}\right)}{\cosh(\sigma_nh_0)}-\frac{z}{a}\right],\ d_n=\frac{2}{\sigma_n^2-1},\end{aligned}\right\}\tag{9.2.20}$$

$f_n(t)$从方程

$$\ddot{f}_n+\nu\dot{f}_n+\tilde{\omega}_n^2f_n=c_n\beta\tag{9.2.21}$$

在适当初始条件下决定，这里

$$\ddot{f}_n=\frac{g}{a}\left[1-\frac{2}{\cosh(\sigma_nh_0)}\right].\tag{9.2.22}$$

为了决定系统之传递函数，我们设

$$\ddot{\beta}=e^{i\omega t},\quad p_\beta=G_\beta(i\omega)e^{i\omega t},$$

将$\ddot{\beta}$的表示式代入式 (9.2.21)，得

$$\frac{\ddot{f}_n(t)}{\ddot{\beta}}=\frac{c_n}{\omega_n^2-\omega^2+i\nu\omega}.$$

于是，由式 (9.2.19) 得到

$$G_\beta(i\omega)=-B\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{B_nc_n}{\tilde{\omega}_n^2-\omega^2+i\nu\omega}+c_n\right].$$

按照前面的理由，我们仅限于取函数 $G_\beta(i\omega)$ 的级数的第一项：

$$G_\beta(i\omega)\approx-B\left[C_1+\frac{B_1c_1}{\tilde{\omega}_1^2-\omega^2+i\nu\omega}\right],$$

其模的平方为

$$|G_\beta(i\omega)|^2 \approx B^2 \frac{(c_1\tilde{\omega}_1^2 - c_1\omega^2 + c_1B_1)^2 + (c_1\nu\omega)^2}{(\tilde{\omega}_1^2-\omega^2)^2+(\nu\omega)^2}. \tag{9.2.23}$$

和前面一样，设角加速度 $\ddot{\beta}(t)$ 之自相关函数为

$$R_\beta(\tau) = B_1(0)e^{-\alpha_1|\tau|}\cos\beta_1\tau,$$

其功率谱密度为

$$\Phi_\beta(\omega) = 2B_1(0)\alpha_1\frac{\omega^2+\tilde{m}^2}{\omega^4+2\tilde{a}\omega^2+\tilde{m}^4},$$

式中

$$\tilde{a} = \alpha_1^2 - \beta_1^2, \quad \tilde{m}^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2,$$

而 $B_1(0)$ 是角加速度的均方值：

$$B_1(0) = \overline{\ddot{\beta}^2_{(t)}} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\ddot{\beta}^2_{(t)}dt.$$

将 (9.2.23) 和 (9.2.24) 代入 (9.2.11)，得

$$\begin{aligned}\overline{p}_\beta^2 &= 2B_1(0)\alpha_1\frac{B^2}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i(\omega^2+\tilde{m}^2)[(C_1\tilde{\omega}_1^2 - C_1\omega^2+c_1B_1)^2+(c_1\nu\omega)^2]d\omega}{(\omega^4+2\tilde{a}\omega^2+\tilde{m}^4)[(\tilde{\omega}_1^2-\omega^2)^2+(\nu\omega)^2]}\\ &= 2B_1(0)\alpha_1B^2J_1,\end{aligned} \tag{9.2.25}$$

式中之 J_1 按公式 (9.2.11) 计算，式 (9.2.13) 中的系数有如下值：

$$\left.\begin{aligned}&a_0=-1,\ a_1=i(2\alpha_1-\nu),\ a_2=\tilde{\omega}_1^2-2\alpha_1\nu+\tilde{m}^2,\\&a_3=i(\nu\tilde{m}^2-2\alpha_1\tilde{\omega}_1^2),\ a_4=-\tilde{m}^2\tilde{\omega}_1^2,\\&b_0=iC_1^2,\ b_1=i[(C_1\nu)^2-2(C_1\tilde{\omega}_1^2+c_1B_1)C_1+\tilde{m}^2C_1^2],\\&b_2=i[(C_1\tilde{\omega}_1^2+c_1B_1)^2-2\tilde{m}^2(C_1\tilde{\omega}_1^2+c_1B_1)C_1+\tilde{m}^2(C_1\nu)^2],\\&b_3=i\tilde{m}^2(C_1\tilde{\omega}_1^2+c_1B_1)^2.\end{aligned}\right\} \tag{9.2.26}$$

在地面前后运动和旋转运动的情况下，作用于容器之全压力的均方值为

$$\begin{aligned}\overline{p}^2 &= \overline{p}_x^2+\overline{p}_\beta^2\\ &= 2B^2[B(0)\alpha J+B_1(0)\alpha_1J_1]\end{aligned} \tag{9.2.27}$$

三、在第三章中证明了，在水平地震地面运动作用下，贮液容器中液体振动的波浪形式可根据容器形状按照公式 (3.1.20) 和 (3.1.100) 计算。我们将这些公式写为如下形式：

$$f_x = -B\left[\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{\ddot{q}_n}{\ddot{x}_0}+1\right]\ddot{x}_0, \tag{9.2.28}$$

其中系数 B 和 B_n 可按下列情况分别确定：

a）对于圆柱形容器

$$B = \frac{r\sin\theta}{g}, \quad B_n = \frac{2aJ_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)}{r(\sigma_n^2-1)J_1(\sigma_n)}; \tag{9.2.29}$$

b）对于矩形容器

$$B=\frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)}{g},\quad B_n=\frac{4a\cos\frac{n\pi x}{a}}{n^2\pi^2\left(x-\frac{a}{2}\right)}.\tag{9.2.30}$$

将公式 (9.2.28) 和 (9.2.1) 相比较，可以看出它们的形状完全一样。因此，波高之均方值 $\bar{f}_x^2$ 可以按与 $\bar{p}_x^2$ 相同的公式 (9.2.10) 计算，只不过此时该公式中的系数应取式 (9.2.28) 或 (9.2.29) 的值。此外，如果需要决定容器壁处的波高，则在式 (9.2.29) 和 (9.2.30) 中需设 $r=a$，$x=0$。

由圆柱形容器之旋转运动所产生的波高的均方值 $\bar{f}_\beta^2$ 按公式 (9.2.25) 决定，系数 B、B_n 和 C_n 应改变为：

$$B=\frac{a^2\sin\theta}{g},\quad B_n=\frac{2J_1\left(\sigma_n\frac{r}{a}\right)}{(\sigma_n^2-1)J_1(\sigma_n)},\ c_n=0,\tag{9.2.31}$$

c_n 有如下值

$$c_n=\frac{g}{a}\left(1-\frac{2}{\cosh(\sigma_n h_0)}\right).$$

在地面前后运动和旋转运动同时作用的情况下，容器中贮液的总波高之均方值为

$$\bar{f}^2=\bar{f}_x^2+\bar{f}_\beta^2.\tag{9.2.32}$$

第三节　构架式贮液容器在平稳随机干扰作用下的计算

本节中，我们讨论支承部分充满液体容器的结构在平稳随机干扰作用下的计算。为了讨论简单起见，把结构简化为一个自由度的系统。所得到的解可以应用于水塔、海上采油平台以及支承贮液容器之框架在风、波浪或地震荷载作用下的计算。

如在第四章中所指出的那样，具有一个自由度之部分充液容器系统在随机干扰力 $F(t)$ 作用下的运动方程具有如下形式：

$$m\ddot{u}+2\varepsilon\dot{u}+Ru=F(t)+\sum_{n=1}^{\infty}S_n(t),\tag{9.3.1}$$

这里，u 是质点之水平位移，$S_n(t)$ 为作用于第 n 个贮液容器上的液动压力。这里，我们仅考虑一个容器的情形。作用于容器壁之合液动压力可以写为（见第三章）

$$S(t)=-B\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ddot{q}_n(t)}{\ddot{u}(t)}B_n\right]\ddot{u}(t),\tag{9.3.2}$$

式中，对于圆柱形容器

$$B=\pi\rho a^3h_0,\ B_n=\frac{d_n}{h_0\sigma_n}\tanh(\sigma_n h_0);$$

对于矩形容器

$$B=\rho abh,\quad B_n=\frac{8}{n^3\pi^3h_0}\tanh(n\pi h_0)$$

而 $\ddot{q}_n(t)$ 由

$$\ddot{q}_n(t)+\nu\dot{q}_n(t)+\tilde{\omega}_n^2q_n(t)=-\ddot{u}(t)\tag{9.3.3}$$

确定。

为了寻求系统位移之均方值 $\overline{u}^2$，必须决定其传递函数。为此，设

$$F(t)=e^{i\omega t},\quad u(t)=G(i\omega)e^{i\omega t}, \tag{9.3.4}$$

将之代入式 (9.3.3)，得

$$\frac{\ddot{q}_n}{\ddot{u}}=\frac{\omega^2}{\tilde{\omega}_n^2-\omega^2+i\nu\omega}. \tag{9.3.5}$$

将式 (9.3.4) 和 (9.3.5) 代入式 (9.3.2)，得

$$S(t)=\psi(\omega)G(i\omega)e^{i\omega t}, \tag{9.3.6}$$

式中

$$\psi(\omega)=B\omega^2\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega^2B_n}{\tilde{\omega}_n^2-\omega^2+i\nu\omega}\right]. \tag{9.3.7}$$

再将式 (9.3.6) 和 (9.3.4) 代入方程 (9.3.1)，得

$$[-m\omega^2+2\,i\varepsilon\omega+k-\psi(\omega)]G(i\omega)e^{i\omega t}=e^{i\omega t},$$

从而得到传递函数为

$$G(i\omega)=\frac{1}{-\omega^2m+k-\psi(\omega)+2\,i\varepsilon\omega}.$$

其模的平方等于

$$|G(i\omega)|^2=\frac{1}{|-m\omega^2+k-\psi(\omega)+2i\varepsilon\omega|^2}. \tag{9.3.8}$$

若假定干扰力 $F(t)$ 的功率谱密度具有方程 (9.2.8) 的形状，则由公式 (9.1.11)，得到位移之均方值为

$$\overline{u}^2=\frac{2\,B(0)\alpha}{2\,\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i(\omega^2+\overline{m}^2)d\omega}{|-\omega^2m+k-\psi(\omega)+2\,i\varepsilon\omega|^2(\omega^4+2\,\overline{a}\,\omega^2+\overline{m}^4)}. \tag{9.3.9}$$

此积分的计算很麻烦，因为被积函数的分母中包含有函数 $\psi(\omega)$，而它又是用级数来表示的。为了简化起见，我们仍然按第三节中的理由，仅取 $\psi(\omega)$ 之级数的第一项，认为

$$\psi(\omega)\approx B\left[1+\frac{B_1\omega^2}{\tilde{\omega}_1^2-\omega^2+i\nu\omega}\right]\omega^2. \tag{9.3.10}$$

将式 (9.3.10) 代入式 (9.3.9)，得

$$\overline{u}^2=2\,B(0)\alpha J, \tag{9.3.11}$$

式中，J 由式 (9.2.11) 决定，其中，函数 $g(\omega)$ 和 $H(\omega)$ 有如下值：

$$\left.\begin{aligned}&g(\omega)=i(\omega^2+\overline{m}^2)[(\tilde{\omega}_1^2-\omega^2)^2+(\nu\omega)^2],\\&H(\omega)=[\{(k-m\omega^2)(\tilde{\omega}_1^2-\omega^2)-B\omega^2[\tilde{\omega}_1^2-\omega^2+B_1\omega^2]-2\,\varepsilon\nu\omega^2\}+\\&\quad+i\{(k-m\omega^2)\nu\omega-B\nu\omega^3+2\,\varepsilon(\tilde{\omega}_1^2-\omega^2)\omega\}](\omega^2-2\,i\alpha\omega-\overline{m}^2).\end{aligned}\right\} \tag{9.3.12}$$

根据文献[8]附录的表Ⅱ，我们求得 $n=6$ 时之 J 值为

$$J=\frac{M_6}{2\,a_0\Delta_6}, \tag{9.3.13}$$

式中

$$M_6=a_0b_2(-a_0a_5^2-a_1a_3a_6+a_1a_4a_5)+a_0b_3(a_0a_3a_5+a_1^2a_6-$$
$$-a_1a_2a_5)+a_0b_4(a_0a_1a_5-a_0a_3^2-a_1^2a_4+a_1a_2a_3)+\frac{a_0b_5}{a_6}(a_0^2a_5^2+$$

$$+a_0a_1a_3a_6-2\,a_0a_1a_4a_5-a_0a_2a_3a_6+a_0a_3^2a_4-a_1^2a_2a_6+$$
$$a_1^2a_4^2+a_1a_2^2a_5-a_1a_2a_3a_4),$$
$$\Delta_6=a_0^2a_5^3+3\,a_0a_1a_3a_5a_6-2\,a_0a_1a_4a_5^2-a_0a_2a_3a_5^2-a_0a_3^3a_6+$$
$$+a_0a_3^2a_4a_5+a_1^3a_6^2-2\,a_1a_2a_5a_6-a_1^2a_3a_4a_6+a_1^2a_4^2a_5+$$
$$+a_1a_2^2a_5^2+a_1a_2a_3^2a_6-a_1a_2a_3a_4a_5,$$

系数 a_0，$\cdots$，a_6 和 b_0，$\cdots$，b_5 具有如下值：

$$a_0=m+B-BB_1,$$
$$a_1=-i(m\nu+B\nu+2\,\varepsilon+2\,\alpha+2\,\alpha B-2\,\alpha BB_1),$$
$$a_2=-[(k+m\tilde{\omega}_1^2+B\tilde{\omega}_1^2+2\,\varepsilon\nu)+2\,\alpha(m\nu+B\nu+2\,\varepsilon)+$$
$$+\overline{m}^2(m+B-BB_1)],$$
$$a_3=i[(k\nu+2\,\varepsilon\tilde{\omega}_1^2)+2\,\alpha(k+m\tilde{\omega}_1^2-B\tilde{\omega}_1^2+2\,\varepsilon\nu)+$$
$$+\overline{m}^2(m\nu+B\nu+2\,\varepsilon)],$$
$$a_4=[k\tilde{\omega}_1^2+2\,\alpha(k\nu+2\,\varepsilon\tilde{\omega}_1^2)+(k+m\tilde{\omega}_1^2-B\tilde{\omega}_1^2+2\,\varepsilon\nu)\overline{m}^2],$$
$$a_5=i[-2\,\alpha k\tilde{\omega}_1^2-\overline{m}^2(k\nu+2\,\varepsilon\tilde{\omega}_1^2)],$$
$$a_6=-\overline{m}^2k\tilde{\omega}_1^2,$$
$$b_0=b_1=0,$$
$$b_2=i,\ \ b_3=i(\overline{m}^2+\nu^2-2\,\tilde{\omega}_1^2),$$
$$b_4=i(\tilde{\omega}_1^4-2\,\overline{m}^2\tilde{\omega}_1^2+\nu^2\overline{m}^{-2}),$$
$$b_5=i\overline{m}^2\tilde{\omega}_1^4.$$

容易验证，J 是实数。

将式（9.3.13）代入式（9.3.11），得

$$\overline{u}^2=B(0)\alpha\frac{M_6}{a_0\Delta_6}. \tag{9.3.14}$$

对于支承位于同一层之若干个相同容器的构架，用来计算 $\overline{u}^2$ 的所有公式依然如前，仅需将量 B 代以 sB，这里，s 是容器个数。

参 考 文 献

[1] A. Papoulis, Probability, Random Varibles, and Stochastic Processess, McGraw-Hill, 1965.

[2] R. W. Clough, J. Penzien, Dynamics of Structures, McGraw-Hill, 1975.

[3] J. D. Robson, An Introduction to Random Vibration, Edinburgh, 1963.

[4] N. Wiener, Extrapolation, Interpolation and Smothing of Stationary Time, John Wiley, 1949.

[5] И. И. Гольденблат, Г. Н. Аарцивадзе, Ш. Г. Напетваридзе, Проектирование сейсмостойких гидротехнических, транспортных и специальных сооружений, Раздел III, 1971.

[6] М. Ф. Барштейн Приложение Вероятностных методов к расчету сооружений на Сейсмические Воздействия, Строительная Механика и расчет сооружений, №, 1960.

[7] S. Jacobsen, S. Ayre, Hydrodynamic Experiments With Rigid Cylindrical Tanks Subjected to Transient Motions, Bull. Seism. Soc. Am. vol. 41, 1951.

[8] В. В. Болотин, Статистические Методы В Строительной Механике, Госстройиздат, 1961.

[9] Д. Е. Охоцимский, К теории движения тела с полостями частично заполненный жидкостью, Прикл. Матем. и Механ., Том XX, Вып. 1, 1956.

附　　录

一、椭圆坐标的推导

已知椭圆坐标 ξ,η 和直角坐标 x,y 之间有如下关系：

$$\left.\begin{aligned}x&=\gamma\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\eta,\\ y&=\gamma\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\eta.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

则有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x}&=\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial\eta}=A\frac{\partial p}{\partial\xi}+B\frac{\partial p}{\partial\eta},\\ \frac{\partial p}{\partial y}&=\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial\eta}=C\frac{\partial p}{\partial\xi}+D\frac{\partial p}{\partial\eta}.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

这里系数

$$A=\frac{\partial\xi}{\partial x},\quad B=\frac{\partial\eta}{\partial x},\quad C=\frac{\partial\xi}{\partial y},\quad D=\frac{\partial\eta}{\partial y}.$$

同理，我们把式(2)应用于高阶导数，则可导得：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2p}{\partial x^2}&=A\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)+B\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\\ &=A\left(A\frac{\partial^2p}{\partial\xi^2}+B\frac{\partial^2p}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial A}{\partial\xi}\frac{\partial p}{\partial\xi}+\frac{\partial B}{\partial\xi}\frac{\partial p}{\partial\eta}\right)+B\left(A\frac{\partial^2p}{\partial\xi\partial\eta}+B\frac{\partial^2p}{\partial\eta^2}+\right.\\ &\qquad\left.+\frac{\partial A}{\partial\eta}\frac{\partial p}{\partial\xi}+\frac{\partial B}{\partial\eta}\frac{\partial p}{\partial\eta}\right),\end{aligned}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2p}{\partial y^2}&=C\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)+D\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\\ &=C\left(C\frac{\partial^2p}{\partial\xi^2}+D\frac{\partial^2p}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial C}{\partial\xi}\frac{\partial p}{\partial\xi}+\frac{\partial D}{\partial\xi}\frac{\partial p}{\partial\eta}\right)+D\left(C\frac{\partial^2p}{\partial\xi\partial\eta}+D\frac{\partial^2p}{\partial\eta^2}+\right.\\ &\qquad\left.+\frac{\partial C}{\partial\eta}\frac{\partial p}{\partial\xi}+\frac{\partial D}{\partial\eta}\frac{\partial p}{\partial\eta}\right).\end{aligned}\tag{4}$$

合并(3)、(4)两式，则得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2p}{\partial y^2}&=\frac{\partial^2p}{\partial\xi^2}(A^2+C^2)+\frac{\partial^2p}{\partial\eta^2}(B^2+D^2)+2\frac{\partial^2p}{\partial\xi\partial\eta}(AB+CD)+\frac{\partial p}{\partial\xi}\left(A\frac{\partial A}{\partial\xi}+\right.\\ &\quad\left.+B\frac{\partial A}{\partial\eta}+C\frac{\partial C}{\partial\xi}+D\frac{\partial C}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial p}{\partial\eta}\left(A\frac{\partial B}{\partial\xi}+B\frac{\partial B}{\partial\eta}+C\frac{\partial D}{\partial\xi}+D\frac{\partial D}{\partial\eta}\right).\end{aligned}\tag{5}$$

现在再来寻求 A,B,C,D。对式(1)就 x 取导得到：

$$\left.\begin{aligned}1&=\gamma\,\mathrm{sh}\,\xi\cos\eta\frac{\partial\xi}{\partial x}-\gamma\,\mathrm{ch}\,\xi\sin\eta\frac{\partial\eta}{\partial x},\\ 0&=\gamma\,\mathrm{ch}\,\xi\sin\eta\frac{\partial\xi}{\partial x}+\gamma\,\mathrm{sh}\,\xi\cos\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}.\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

式(6)的第1式乘以 $\mathrm{ch}\,\xi\sin\eta$，第2式乘以 $\mathrm{sh}\,\xi\cos\eta$，则得：

$$\mathrm{ch}\,\xi\sin\eta=\gamma\,\mathrm{sh}\,\xi\,\mathrm{ch}\eta\sin\eta\cos\eta\frac{\partial\xi}{\partial x}-\gamma\,\mathrm{ch}^2\xi\sin^2\eta\frac{\partial\eta}{\partial x},$$

$$0=\gamma\ \mathrm{sh}\ \xi\ \mathrm{ch}\ \eta \sin\eta\cos\eta\frac{\partial\xi}{\partial x}+\gamma\ \mathrm{sh}^2\ \xi\ \cos^2\ \eta\frac{\partial\eta}{\partial x}.$$

故得
$$-\mathrm{ch}\ \xi\sin\eta=\gamma(\mathrm{ch}^2\ \xi\sin^2\eta+\mathrm{sh}^2\ \xi\cos^2\eta)\frac{\partial\eta}{\partial x}.$$

所以
$$B=\frac{\partial\eta}{\partial x}=-\frac{\mathrm{ch}\ \xi\sin\eta}{\gamma(\mathrm{ch}^2\ \xi\sin^2\eta+\mathrm{sh}^2\ \xi\cos^2\eta)},\tag{7}$$

$$A=\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\mathrm{sh}\ \xi\cos\eta}{\gamma(\mathrm{ch}^2\ \xi\sin^2\eta+\mathrm{sh}^2\ \xi\cos^2\eta)}.\tag{8}$$

同理，将(1)式对 y 求导，得到：

$$\left.\begin{aligned}0&=\gamma\ \mathrm{sh}\ \xi\cos\eta\frac{\partial\xi}{\partial x}-\gamma\ \mathrm{ch}\ \xi\sin\eta\frac{\partial\eta}{\partial y},\\1&=\gamma\ \mathrm{ch}\ \xi\sin\eta\frac{\partial\xi}{\partial y}+\gamma\ \mathrm{sh}\ \xi\cos\eta\frac{\partial\eta}{\partial y}.\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

将(9)式的第1式乘以 $\mathrm{ch}\ \xi\sin\eta$，第2式乘以 $\mathrm{sh}\ \xi\cos\eta$，得到：

$$0=\gamma\ \mathrm{ch}\ \xi\ \mathrm{sh}\ \xi\cos\eta\sin\eta\frac{\partial\xi}{\partial y}-\gamma\mathrm{ch}^2\ \xi\sin^2\eta\frac{\partial\eta}{\partial y},$$

$$\mathrm{sh}\ \xi\cos\eta=\gamma\ \mathrm{ch}\ \xi\ \mathrm{sh}\ \xi\cos\eta\sin\eta\frac{\partial\xi}{\partial y}+\gamma\ \mathrm{sh}^2\xi\cos^2\eta\frac{\partial\eta}{\partial y}.$$

故得

$$\mathrm{sh}\ \xi\ \mathrm{con}\eta=\gamma(\mathrm{ch}^2\ \xi\sin^2\eta+\mathrm{sh}^2\xi\cos^2\eta)\frac{\partial\eta}{\partial y},$$

即
$$D=\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\mathrm{sh}\ \xi\cos\eta}{\gamma(\mathrm{ch}^2\ \xi\sin^2\eta+\mathrm{sh}^2\ \xi\cos^2\eta)},\tag{10}$$

$$C=\frac{\partial\xi}{\partial y}=\frac{\mathrm{ch}\ \xi\sin\eta}{\gamma(\mathrm{ch}^2\ \xi\sin^2\eta+\mathrm{sh}^2\ \xi\cos^2\eta)}.\tag{11}$$

由(7)，(8)，(10)，(11)可得：

$$A^2+C^2=\frac{1}{\gamma^2(\mathrm{ch}^2\ \xi\sin^2\eta+\mathrm{sh}^2\ \xi\cos^2\eta)},\tag{12}$$

$$B^2+D^2=\frac{1}{\gamma^2(\mathrm{ch}^2\ \xi\sin^2\eta+\mathrm{sh}^2\ \xi\cos^2\eta)},\tag{13}$$

$$AB+CD=0.\tag{14}$$

再来求 $\partial p/\partial\xi$ 前的系数。

令
$$\gamma^2(\mathrm{ch}^2\xi\sin^2\eta+\mathrm{sh}^2\xi\cos^2\xi)=l_1,$$

则
$$A\cdot\frac{\partial A}{\partial\xi}=\frac{\mathrm{sh}\ \xi\cos\eta}{l_1}\left[\frac{(l_1)\mathrm{ch}\ \xi\cos\eta-\mathrm{sh}\ \xi\cos\eta(2\ \gamma\mathrm{ch}\ \xi\ \mathrm{sh}\ \xi\sin^2\eta+2\mathrm{sh}\ \xi\ \mathrm{ch}\ \xi\cos^2\eta)}{l_1^2}\right]$$

$$=\frac{\mathrm{sh}\ \xi\ \mathrm{ch}\ \xi\cos^2\eta}{l_1^2}-\frac{2\gamma\ \mathrm{sh}\ \xi\ \mathrm{ch}\ \xi\cos^2\eta\ \mathrm{sh}^2\xi}{l_1^3},\tag{15}$$

$$B\cdot\frac{\partial A}{\partial x}=\frac{-\mathrm{ch}\ \xi\sin\eta}{l_1}\left[\frac{(l_1)(-\mathrm{sh}\xi\sin\eta)-\mathrm{sh}\xi\mathrm{con}\eta(2\gamma\mathrm{ch}^2\xi\sin\eta\cos\eta-2\gamma\ \mathrm{sh}^2\xi\cos\eta\sin\eta)}{l_1^2}\right]$$

$$=\frac{\mathrm{sh}\ \xi\ \mathrm{ch}\ \xi\sin^2\eta}{l_1^2}+\frac{2\gamma\ \mathrm{sh}\xi\mathrm{ch}\xi\cos^2\eta\sin^2\eta}{l_1^3}\tag{16}$$

$$C\frac{\partial C}{\partial\xi}=\frac{\mathrm{ch}\ \xi\sin\eta}{l_1}\left[\frac{(l_1)\mathrm{sh}\ \xi\sin\eta-\mathrm{ch}\ \xi\sin\eta(2\gamma\ \mathrm{ch}\ \xi\ \mathrm{sh}\ \xi\sin^2\eta+2\gamma\ \mathrm{sh}\ \xi\ \mathrm{ch}\ \xi\cos^2\eta)}{l_1^2}\right]$$

$$=\frac{\operatorname{sh}\xi\operatorname{ch}\xi\sin\eta}{l_1^2}-\frac{\operatorname{ch}^2\xi\sin\eta(2\gamma\operatorname{ch}\xi\operatorname{sh}\xi)}{l_1^3},\tag{17}$$

$$D=\frac{\partial D}{\partial\eta}=\frac{\operatorname{sh}\xi\cos\eta}{l_1}+\frac{(l_1)\operatorname{ch}\xi\cos\eta-\operatorname{ch}\xi\sin\eta(2\gamma\operatorname{ch}^2\xi\sin\eta\cos\eta-2\gamma\operatorname{sh}^2\xi\cos\eta\sin\eta)}{l_1^2}$$

$$=\frac{\operatorname{sh}\xi\operatorname{ch}\xi\cos^2\eta}{l_1^2}-\frac{2\gamma\operatorname{sh}\xi\operatorname{ch}\xi\cos^2\eta\sin^2\eta}{l_1^3}.\tag{18}$$

将(15)，(16)，(17)，(18)四式相加，则得

$$A\frac{\partial A}{\partial\xi}+B\frac{\partial A}{\partial\eta}+C\frac{\partial C}{\partial\xi}+D\frac{\partial C}{\partial\eta}$$

$$=\frac{2\operatorname{sh}\xi\operatorname{ch}\xi}{l_1^2}-\frac{2\operatorname{sh}\xi\operatorname{ch}\xi[\gamma(\operatorname{sh}^2\xi\cos^2\eta+\operatorname{ch}^2\xi\sin^2\eta)]}{l_1^3}$$

$$=\frac{2\operatorname{sh}\xi\operatorname{ch}\xi}{l_1^2}-\frac{2\operatorname{sh}\xi\operatorname{ch}\xi}{l_1^2}=0.$$

同理可得

$$A\frac{\partial B}{\partial\xi}+B\frac{\partial B}{\partial\eta}+C\frac{\partial D}{\partial\xi}+D\frac{\partial D}{\partial\eta}=0.$$

所以

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 p}{l^2\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 p}{l^2\partial\eta^2},$$

式中，$l^2=\gamma^2(\operatorname{sh}^2\xi\cos^2\eta+\operatorname{ch}^2\xi\sin^2\eta)$

$$=\gamma^2\left[\frac{\operatorname{ch}2\xi-1}{2}\cos^2\eta+\frac{\operatorname{ch}2\xi+1}{2}\sin^2\eta\right]$$

$$=\frac{\gamma}{2}[\operatorname{ch}2\xi(\cos^2\eta+\sin^2\eta)-\cos^2\eta+\sin^2\eta]$$

$$=\frac{\gamma}{2}(\operatorname{ch}2\xi-\cos2\eta).$$

故经过坐标变换后椭圆柱体的波动方程为

$$\frac{\partial^2 p}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}(\operatorname{ch}2\xi-\cos2\eta)\frac{\gamma^2}{2}+\frac{\omega^2}{K^2}(\operatorname{ch}2\xi-\cos2\eta)\frac{\gamma^2}{2}p=0.$$

二、公式(7.3.28)的推导

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(q+\frac{S}{N}\right)^4-\Omega^2}=0\tag{1}$$

从数学分析上我们有

$$\operatorname{ctg}z=\frac{1}{z}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}^{*}\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n\pi}+\frac{1}{z-n\pi}\right)$$

$$=-\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{z+n\pi}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{z+n\pi}-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{z-n\pi},\tag{2}$$ [1]

若令　$q+\frac{S}{N}=X$，再使

$$X^4-\Omega^2=0，则\ X=\sqrt{\pm\Omega}.$$

即
$$X=\sqrt{\Omega},\ -\sqrt{\Omega},\ i\sqrt{\Omega},\ -i\sqrt{\Omega}.$$

$$\frac{1}{X^4-\Omega^2}=\frac{A}{X+\sqrt{\Omega}}+\frac{B}{X-\sqrt{\Omega}}+\frac{C}{X+i\sqrt{\Omega}}+\frac{D}{X-i\sqrt{\Omega}},$$

$$A=\frac{1}{(X-\sqrt{\Omega})(X^2+\Omega)}\Bigg|_{X=-\sqrt{\Omega}}=\frac{1}{(-2\sqrt{\Omega})2\Omega}=-\frac{1}{4\Omega\sqrt{\Omega}},$$

$$B=\frac{1}{(X+\sqrt{\Omega})(X^2+\Omega)}\Bigg|_{X=\sqrt{\Omega}}=\frac{1}{(2\sqrt{\Omega})2\Omega}=\frac{1}{4\Omega\sqrt{\Omega}},$$

$$C=\frac{1}{(X^2-\Omega)(X-i\sqrt{\Omega})}\Bigg|_{X=-i\sqrt{\Omega}}=\frac{1}{(-2\sqrt{\Omega})(-2i\sqrt{\Omega})}=-\frac{1}{4i\Omega\sqrt{\Omega}},$$

$$D=\frac{1}{(X^2-\Omega)(X+i\sqrt{\Omega})}\Bigg|_{X=i\sqrt{\Omega}}=\frac{1}{(-2\Omega)(2i\sqrt{\Omega})}=-\frac{1}{4i\Omega\sqrt{\Omega}},$$

故
$$\frac{1}{X^4-\Omega^2}=-\frac{1}{4\Omega\sqrt{\Omega}}\left[\frac{1}{X+\sqrt{\Omega}}-\frac{1}{X-\sqrt{\Omega}}\right]-\frac{1}{4i\Omega\sqrt{\Omega}}\left[\frac{1}{X+i\sqrt{\Omega}}-\frac{1}{X-i\sqrt{\Omega}}\right]. \tag{3}$$

将(3)代入(1)，则得

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty}\frac{-1}{\left(q+\frac{S}{N}\right)^4-\Omega^2}=\sum_{q=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{-1}{4\Omega\sqrt{\Omega}}\left[\frac{1}{q+\frac{S}{N}+\sqrt{\Omega}}-\frac{1}{q+\frac{S}{N}-\sqrt{\Omega}}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4i\Omega\sqrt{\Omega}}\left[\frac{1}{q+\frac{S}{N}+i\sqrt{\Omega}}-\frac{1}{q+\frac{S}{N}-i\sqrt{\Omega}}\right]\right\}=0. \tag{4}$$

参照式(2)，由(4)式立刻可以求得

$$-\operatorname{ctg}\pi\left(\frac{S}{N}+\sqrt{\Omega}\right)+\operatorname{ctg}\pi\left(\frac{S}{N}-\sqrt{\Omega}\right)-\frac{1}{i}\operatorname{ctg}\pi\left(\frac{S}{N}+i\sqrt{\Omega}\right)+$$

$$+\frac{1}{i}\operatorname{ctg}\pi\left(\frac{S}{N}-i\sqrt{\Omega}\right)=0. \tag{5}$$

若令

$$\alpha=\pi\left(\frac{S}{N}+\sqrt{\Omega}\right),\qquad \beta=\pi\left(\frac{S}{N}-\sqrt{\Omega}\right);$$

$$\alpha'=\pi\left(\frac{S}{N}+i\sqrt{\Omega}\right),\qquad \beta'=\pi\left(\frac{S}{N}-i\sqrt{\Omega}\right).$$

又从三角关系式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\sin\beta\pm\sin\beta\cos\alpha,$$
$$2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\beta+\alpha),$$

故(5)式可表为

---

* Σ' 表示和中不包含 $n=0$ 的项。

$$-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}-\frac{1}{i}\frac{\cos\alpha'}{\sin\alpha'}+\frac{1}{i}\frac{\cos\beta'}{\sin\beta'}$$

$$=\frac{-\cos\alpha\sin\beta+\cos\beta\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}+\frac{1}{i}\frac{-\cos\alpha'\sin\beta'+\cos\beta'\sin\alpha'}{\sin\alpha'\sin\beta'}$$

$$=2\left[\frac{\sin 2\pi\sqrt{\Omega}}{\cos 2\pi\sqrt{\Omega}-\cos 2\pi\frac{S}{N}}+\frac{1}{i}\frac{\sin 2\pi i\sqrt{\Omega}}{\cos 2\pi i\sqrt{\Omega}-\cos 2\pi\frac{S}{N}}\right]=0 \tag{6}$$

又因为

$$\operatorname{sh} x=-i\sin(ix),\quad \cos(ix)=\operatorname{ch} x,$$

故

$$\left.\begin{aligned}\sin 2\pi i\sqrt{\Omega}&=i\operatorname{sh} 2\pi\sqrt{\Omega},\\ \cos 2\pi i\sqrt{\Omega}&=\operatorname{ch} 2\pi\sqrt{\Omega}.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

将(7)代入(6)

$$\frac{\sin 2\pi\sqrt{\Omega}}{\cos 2\pi\sqrt{\Omega}-\cos 2\pi\frac{S}{N}}+\frac{\operatorname{sh} 2\pi\sqrt{\Omega}}{\operatorname{ch} 2\pi\sqrt{\Omega}-\cos 2\pi\frac{S}{N}}=0,$$

故得

$$\cos 2\pi\frac{S}{N}=\frac{\operatorname{sh} 2\pi\sqrt{\Omega}\cos 2\pi\sqrt{\Omega}+\operatorname{ch} 2\pi\sqrt{\Omega}\sin 2\pi\sqrt{\Omega}}{\operatorname{sh} 2\pi\sqrt{\Omega}+\sin 2\pi\sqrt{\Omega}}. \tag{8}$$

[1] M. A. 拉甫伦捷夫、Б. A. 沙巴特，复变函数论方法，下册 p. 425，施祥林、夏定中译，高等教育出版社，1956 年。